Глава II
Основные понятия и аксиомы динамики

§ 1. Законы (аксиомы) Ньютона. Задачи динамики

40. Инерциальные системы отсчета. Принцип относительности Галилея. Динамика изучает движение механических систем в связи с причинами, вызывающими или изменяющими это движение. *Материальная точка* в теоретической механике представляет собой геометрическую точку, наделенную механическими свойствами. Эти свойства точки определяются законами (аксиомами) динамики, которые рассмотрены в этом параграфе. Попутно дано определение некоторых важнейших понятий, которыми оперирует теоретическая механика.

Основание теоретической механики составляют законы, или аксиомы, Ньютона. Эти аксиомы представляют собой постулаты, справедливость которых подтверждается многовековыми наблюдениями и опытом человечества.

Законы механического движения были сформулированы Ньютоном по отношению к абсолютному (неподвижному) пространству. Системы координат, неподвижные относительно этого пространства или движущиеся относительно него поступательно, равномерно и прямолинейно, называют *инерциальными системами отсчета.*

В теоретической механике считается, что инерциальные системы отсчета эквивалентны во всех механических отношениях. Иными словами, все уравнения и законы механики не зависят от конкретного выбора инерциальной системы отсчета. В этом состоит важнейший принцип механики — принцип относительности Галилея.

Все аксиомы динамики формулируются по отношению к инерциальной системе отсчета.

41. Первый закон Ньютона (аксиома инерции). Сила. Следующую аксиому динамики называют первым законом Ньютона или аксиомой инерции: *если на материальную точку не действуют силы, то она сохраняет состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения.*

Остановимся подробнее на содержании этой аксиомы. Если система движется только под влиянием внутренних взаимодействий, т. е. взаимодействий точек, входящих в систему, то она называется *замкнутой системой.* Конечно, строго говоря, замкнутых систем в смысле данного определения не существует хотя бы потому, например, что гравитационное взаимодействие между материальными точками существует, на каком бы расстоянии одна от другой ни находились эти точки. Точность, с которой можно принять ту или иную систему материальных точек за замкнутую систему, определяется условиями конкретной задачи.

Замкнутая система, состоящая из одной материальной точки, называется *изолированной материальной точкой.* Ясно, что понятие изолированной материальной точки также является идеализированным понятием.

Аксиома инерции, фактически, постулирует существование инерциальных систем отсчета. Именно: *существуют такие системы отсчета, относительно которых изолированная материальная точка покоится или движется равномерно и прямолинейно.* Эти системы отсчета и являются инерциальными.

В действительности инерциальных систем не существует, но с большой степенью точности за инерциальную систему отсчета можно принять систему координат с началом в центре Солнечной системы и осями, направленными на «неподвижные» звезды. Для большинства технических задач за инерциальную систему отсчета принимают систему координат, жестко связанную с Землей.

Механическое действие материального объекта на данную материальную точку состоит в том, что она изменяет свое состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения. Не вдаваясь в физическую сущность причин, приводящих к появлению ускорения точки, мы говорим, что если точка движется с ускорением относительно инерциальной системы отсчета, то на нее действует сила. Именно в этом смысле мы говорим о существовании силы, приложенной к материальной точке. *Сила* есть причина возникновения ускорения точки; она является количественной мерой механического действия на точку, в результате которого возникает ускорение этой точки.

42. Масса. Второй закон Ньютона (основная аксиома динамики). Наблюдение и опыт показывают, что материальные тела обладают «врожденным» свойством, из-за которого тело «с трудом» выводится из состояния покоя или изменяет свое движение. «Способность» материальной точки «сопротивляться» изменению ее скорости называется *инертностью.*

Количественная мера инертности материальной точки, пропорциональная количеству вещества, заключенного в этой точке, называется ее *массой.* Масса представляет собой основную динамическую характеристику точки. В динамике материальная точка есть геометрическая точка, обладающая инертностью, и, следовательно, с динамической стороны характеризуется своей массой.

Масса является скалярной положительной величиной, обладающей свойством аддитивности: массы материальных точек складываются арифметически.

Масса материальной точки считается постоянной величиной, не зависящей от обстоятельств движения. Это свойство массы хорошо подтверждается опытом, если скорость точки мала по сравнению со скоростью света и если не учитывать внутриатомные процессы в веществе, образующем материальную точку. За единицу массы в Международной системе единиц принимается масса эталона, хранящегося в Париже. Единица массы называется *килограммом* (кг).

Второй закон Ньютона устанавливает связь между массой материальной точки, приложенной к ней силой и возникающим при этом ускорением точки. Если m — масса точки, а $\boldsymbol{w}$ — ее ускорение в инерциальной системе отсчета, то, согласно второму закону Ньютона,

$$m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{F}$ — сила, приложенная к точке. За единицу силы в Международной системе единиц принимается такая сила, которая, будучи приложена к материальной точке массой 1 кг, вызывает ее ускорение в инерциальной системе координат, равное 1 м/с^2. Эта единица называется *ньютоном* (Н). В дальнейшем считается, что сила $\boldsymbol{F}$ может зависеть только от положений точек системы, их скоростей и времени, но не зависит от ускорений точек.

43. Третий закон Ньютона (аксиома взаимодействия материальных точек). Следующая аксиома постулирует характер взаимодействия материальных точек. *Если одна материальная точка действует на другую, то и вторая точка действует на первую, причем силы, приложенные к каждой из них, равны по величине и направлены вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны.*

44. Аксиома независимости действия сил (закон сложения сил). *Опыт показывает, что силы взаимодействия двух материальных точек не могут быть изменены возможными действиями на них других материальных точек, если положение, скорости и физическое состояние (электрическое, магнитное и т. д.) этих точек остаются неизменными. Когда точки P_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ действуют на одну и ту же точку P с силами $\boldsymbol{F}_i$, то ускорения $\boldsymbol{w}_i$, которые они вызвали бы у нее, действуя каждая отдельно, складываются.* В этом состоит аксиома независимости действия сил.

Если m — масса точки P, то согласно формуле (1), $\boldsymbol{w}_i = \frac{1}{m}\boldsymbol{F}_i$. Поэтому ускорение $\boldsymbol{w}$ точки P в соответствии с аксиомой независимости действия сил вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 + \ldots + \boldsymbol{w}_k = \frac{1}{m}(\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \ldots + \boldsymbol{F}_k),$$

откуда видно, что ускорение $\boldsymbol{w}$ точки P таково, каким оно было бы, если бы к ней было приложено не k отдельных сил, а одна сила $\boldsymbol{F}$, равная сумме сил $\boldsymbol{F}_i$:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \ldots + \boldsymbol{F}_k.$$

Это и есть *закон сложения сил.* Он является эквивалентной формулировкой аксиомы независимости действия сил. Упомянутая сила, действие которой заменяет действие всех k сил $\boldsymbol{F}_i$, называется *равнодействующей* сил $\boldsymbol{F}_1, \ldots, \boldsymbol{F}_k$, приложенных к точке P.

45. Активные силы и реакции связей. Рассмотрим движение системы N материальных точек P_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, N$) относительно некоторой инерциальной системы отсчета. Пусть m_ν — масса точки P_ν, а $\boldsymbol{r}_\nu$ — ее радиус-вектор относительно начала координат. Если система свободная, то ускорения $\ddot{\boldsymbol{r}}_\nu$ образующих ее точек определяются из второго закона Ньютона $m_\nu \ddot{\boldsymbol{r}}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu$, где $\boldsymbol{F}_\nu$ — равнодействующая сил, приложенных к точке P_ν. Если же система не является свободной, то на ускорения ее точек наложены вполне определенные ограничения. Эти ограничения мы рассмотрели в п. 11. Величины

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_\nu = \frac{1}{m_\nu}\boldsymbol{F}_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N)$$

не будут, вообще говоря, удовлетворять уравнениям (4) и (5) п. 11 для ускорений, т. е. ускорения $\boldsymbol{w}_\nu$ точек P_ν несвободной системы будут отличаться от их ускорений $\ddot{\boldsymbol{r}}_\nu$ в случае свободной системы. Таким образом, наличие связей приводит к возникновению у точек системы дополнительного ускорения $\boldsymbol{w}_\nu - \ddot{\boldsymbol{r}}_\nu$.

Но, согласно второму закону Ньютона, всякое ускорение точки возникает за счет действия на нее некоторых сил. В рассмотренном случае эти силы обусловлены наличием связей. Их называют *реакциями связей.* Чтобы не смешивать реакции связей с остальными силами, приложенными к точкам несвободной системы, назовем эти остальные силы *активными силами.* Заметим, что здесь $\boldsymbol{F}_\nu$ — равнодействующая активных сил.

Активные силы можно также условно назвать *заданными силами*; это те из сил, приложенных к механической системе, которые сохраняются, если связи мгновенно исчезнут. Реакции связей называют иногда *пассивными силами*; они заранее неизвестны и зависят не только от тех материальных приспособлений, которые реализуют связи, но и от активных сил и от движения системы.

Обозначив $\boldsymbol{R}_\nu$ равнодействующую реакций связей, приложенных к точке P_ν, согласно второму закону Ньютона получим $m_\nu(\boldsymbol{w}_\nu - \ddot{\boldsymbol{r}}_\nu) = \boldsymbol{R}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, N)$. Отсюда и из равенств $m_\nu \ddot{\boldsymbol{r}}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu$ следуют уравнения движения точек системы

$$m_\nu \boldsymbol{w}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu + \boldsymbol{R}_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N). \tag{2}$$

Эти уравнения показывают, что с точки зрения динамики несвободную систему можно рассматривать как свободную, движущуюся под действием активных сил и реакций связей. В дальнейшем при изучении движения несвободных систем мы часто будем пользоваться этим положением.

В механике считается справедливым *принцип детерминированности Ньютона–Лапласа.* Согласно этому принципу движение системы материальных точек является вполне детерминированным: задание начальных положений $\boldsymbol{r}_{\nu 0}$ и скоростей $\boldsymbol{v}_{\nu 0}$ точек единственным образом определяет их дальнейшее движение, т. е. функции $\boldsymbol{r}_\nu(t)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, N)$.

46. Силы внешние и внутренние. Совокупность всех сил, приложенных к точкам P_ν материальной системы (иногда говорят «систему сил»), можно разделить на внутренние и внешние силы. *Внутренними силами* называются силы взаимодействия между точками P_ν, образующими материальную систему. Силы, возникающие благодаря воздействию на точки P_ν материальной системы других материальных точек, не входящих в эту систему, называют *внешними.*

Отметим, что деления системы сил на внутренние и внешние силы и на активные силы и реакции связей не взаимосвязаны.

47. Задачи динамики. Равновесие. Статика. Рассматривая движение систем в связи с силами, приложенными к образующим их материальным точкам, динамика ставит целью решение следующих двух *основных задач*: 1) по заданным силам найти движение системы; 2) по известному движению системы найти неизвестные силы, приложенные к точкам системы.

В динамике изучается также частный случай движения — состояние равновесия механической системы. Под состоянием *равновесия* системы понимается такое ее состояние, когда скорость $\boldsymbol{v}_\nu$ каждой точки системы равна нулю на протяжении некоторого промежутка времени, т. е. $\boldsymbol{v}_\nu \equiv 0$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$; если при $t = t_0$ $\boldsymbol{v}_\nu = 0$, то это условие эквивалентно условию $\boldsymbol{w}_\nu \equiv 0$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. В частности, если t_0

равняется нулю, а t_1 — бесконечности, то материальная система в начальный момент времени находится в состоянии равновесия и остается в нем все время.

Состояние равновесия механической системы изучается в разделе динамики, называемом *статикой*. В статике решаются две задачи: 1) найти условия равновесия механической системы; 2) решить вопрос о приведении системы сил, т. е. о замене данной системы сил другой, в частности, более простой, оказывающей то же воздействие на движение механической системы, что и исходная система сил.

§ 2. Главный вектор и главный момент системы сил

48. Главный вектор системы сил. Обозначим $\boldsymbol{F}_\nu$ равнодействующую всех сил (активных и реакций связей), приложенных к точке P_ν. Сумма

$$\boldsymbol{R} = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \tag{1}$$

называется *главным вектором* этой *системы сил*. Пусть $F_{\nu x}, F_{\nu y}, F_{\nu z}$ — компоненты силы $\boldsymbol{F}_\nu$ в декартовой системе координат $Oxyz$. Тогда компоненты R_x, R_y, R_z главного вектора и его направление определяются в соответствии с формулами

$$R_x = \sum_{\nu=1}^{N} F_{\nu x}, \quad R_y = \sum_{\nu=1}^{N} F_{\nu y}, \quad R_z = \sum_{\nu=1}^{N} F_{\nu z}; \tag{2}$$

$$\cos(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{i}) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{j}) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{k}) = \frac{R_z}{R}, \tag{3}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}.$$

Здесь $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — орты осей Ox, Oy, Oz.

Сила $\boldsymbol{F}_\nu$ является суммой равнодействующих всех внешних $\boldsymbol{F}_\nu^{(e)}$ и всех внутренних сил $\boldsymbol{F}_\nu^{(i)}$, т. е.

$$\boldsymbol{F}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu^{(e)} + \boldsymbol{F}_\nu^{(i)} \qquad (\nu = 1\,2, \ldots, N). \tag{4}$$

Согласно третьему закону Ньютона силы, с которыми взаимодействуют две точки системы, равны по величине и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны. Поэтому когда мы подставим выражения (4) в (1), то в получившейся сумме внутренние силы взаимно