равняется нулю, а t_1 — бесконечности, то материальная система в начальный момент времени находится в состоянии равновесия и остается в нем все время.

Состояние равновесия механической системы изучается в разделе динамики, называемом *статикой*. В статике решаются две задачи: 1) найти условия равновесия механической системы; 2) решить вопрос о приведении системы сил, т. е. о замене данной системы сил другой, в частности, более простой, оказывающей то же воздействие на движение механической системы, что и исходная система сил.

§ 2. Главный вектор и главный момент системы сил

48. Главный вектор системы сил. Обозначим $\boldsymbol{F}_\nu$ равнодействующую всех сил (активных и реакций связей), приложенных к точке P_ν. Сумма

$$\boldsymbol{R} = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \tag{1}$$

называется *главным вектором* этой *системы сил*. Пусть $F_{\nu x}, F_{\nu y}, F_{\nu z}$ — компоненты силы $\boldsymbol{F}_\nu$ в декартовой системе координат $Oxyz$. Тогда компоненты R_x, R_y, R_z главного вектора и его направление определяются в соответствии с формулами

$$R_x = \sum_{\nu=1}^{N} F_{\nu x}, \quad R_y = \sum_{\nu=1}^{N} F_{\nu y}, \quad R_z = \sum_{\nu=1}^{N} F_{\nu z}; \tag{2}$$

$$\cos(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{i}) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{j}) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{k}) = \frac{R_z}{R}, \tag{3}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}.$$

Здесь $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — орты осей Ox, Oy, Oz.

Сила $\boldsymbol{F}_\nu$ является суммой равнодействующих всех внешних $\boldsymbol{F}_\nu^{(e)}$ и всех внутренних сил $\boldsymbol{F}_\nu^{(i)}$, т. е.

$$\boldsymbol{F}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu^{(e)} + \boldsymbol{F}_\nu^{(i)} \qquad (\nu = 1\,2, \ldots, N). \tag{4}$$

Согласно третьему закону Ньютона силы, с которыми взаимодействуют две точки системы, равны по величине и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны. Поэтому когда мы подставим выражения (4) в (1), то в получившейся сумме внутренние силы взаимно уничтожаются. Таким образом, главный вектор внутренних сил обратится в нуль и

$$\boldsymbol{R} = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_{\nu}^{(e)}, \tag{5}$$

т. е. главный вектор $\boldsymbol{R}$ системы сил равен главному вектору $\boldsymbol{R}^{(e)}$ внешних сил.

49. Момент силы относительно точки и оси. *Моментом силы $\boldsymbol{F}$ относительно точки O* называется вектор

$$\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}, \tag{6}$$

где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки приложения силы $\boldsymbol{F}$ относительно точки O. Из свойств векторного произведения следует, что модуль момента силы относительно точки равен произведению модуля силы на ее плечо, т. е. на расстояние от точки O до линии действии силы $\boldsymbol{F}$. Направлен момент по нормали к плоскости, проходящей через точку O и линию действия силы $\boldsymbol{F}$, в ту сторону, откуда «вращение», вызванное силой, происходило бы против часовой стрелки. *Линией действия силы $\boldsymbol{F}$* мы называем прямую, на которой лежит вектор $\boldsymbol{F}$.

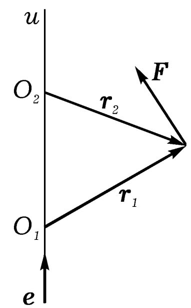

Рис. 46

Моментом силы $\boldsymbol{F}$ относительно оси u называется проекция на эту ось момента силы $\boldsymbol{F}$ относительно точки, взятой на этой оси. Момент силы $\boldsymbol{F}$ относительно оси u обозначается $m_u(\boldsymbol{F})$.

Пусть $\boldsymbol{e}$ — единичный вектор оси u (рис. 46). Возьмем на этой оси точки O_1 и O_2. Тогда, согласно определению, $m_u(\boldsymbol{F}) = (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{e}$, а также $m_u(\boldsymbol{F}) = (\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{e}$. Составим разность $(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{e} - (\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{e}$. Она равна нулю, так как $(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{e} - (\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{e} = ((\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{e} = (\overline{O_1 O_2} \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{e}$, а векторы $\overline{O_1 O_2} \times \boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{e}$ ортогональны. Тем самым показана независимость величины $m_u(\boldsymbol{F})$ от выбора точки на оси.

Пусть F_x, F_y, F_z и x, y, z — компоненты силы $\boldsymbol{F}$ и радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ точки ее приложения соответственно в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ с началом в точке O. Тогда из (6) следует, что момент силы $\boldsymbol{F}$ относительно точки O задается в этой системе координат компонентами

$$m_x(\boldsymbol{F}) = yF_z - zF_y, \quad m_y(\boldsymbol{F}) = zF_x - xF_z, \quad m_z(\boldsymbol{F}) = xF_y - yF_x. \tag{7}$$

Величины $m_x(\boldsymbol{F}), m_y(\boldsymbol{F})$ и $m_z(\boldsymbol{F})$ — моменты силы $\boldsymbol{F}$ относительно осей Ox, Oy и Oz. Из (7) сразу следует, что момент силы относительно оси равен нулю тогда и только тогда, когда линия действия силы и ось лежат в одной плоскости.

50. Главный момент системы сил. Пусть снова $\boldsymbol{F}_\nu$ — равнодействующая всех сил, приложенных к точке P_ν механической системы, а $\boldsymbol{r}_\nu$ — радиусы-векторы точек P_ν относительно точки O. *Главным моментом* $\boldsymbol{M}_0$ *этой системы сил относительно точки* O называется сумма

$$\boldsymbol{M}_O = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_\nu) = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{r}_\nu \times \boldsymbol{F}_\nu. \tag{8}$$

Так же, как и для главного вектора, можно показать, что главный момент внутренних сил равен нулю и $\boldsymbol{M}_O = \sum\limits_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_\nu^{(e)})$, т. е. главный момент всех сил системы равен главному моменту $\boldsymbol{M}_O^{(e)}$ ее внешних сил.

Главным моментом M_u *системы сил относительно оси* u называется проекция на эту ось главного момента $\boldsymbol{M}_O$, вычисленного для какой-либо точки оси. Независимость величины M_u от выбора точки на оси доказывается так же, как и в случае одной силы в п. 49.

В декартовой системе координат $Oxyz$ главный момент $\boldsymbol{M}_O$ имеет компоненты, вычисляемые по формулам

$$\begin{aligned} M_x &= \sum_{\nu=1}^{N} \left(y_\nu F_{\nu z} - z_\nu F_{\nu y}\right), \\ M_y &= \sum_{\nu=1}^{N} \left(z_\nu F_{\nu x} - x_\nu F_{\nu z}\right), \\ M_z &= \sum_{\nu=1}^{N} \left(x_\nu F_{\nu y} - y_\nu F_{\nu x}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Величины M_x, M_y и M_z — главные моменты сил относительно осей Ox, Oy и Oz.

Направление главного момента определяется формулами

$$\begin{gathered} \cos(\boldsymbol{M}_O, \boldsymbol{i}) = \frac{M_x}{M_O}, \quad \cos(\boldsymbol{M}_O, \boldsymbol{j}) = \frac{M_y}{M_O}, \quad \cos(\boldsymbol{M}_O, \boldsymbol{k}) = \frac{M_z}{M_O}, \\ M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}. \end{gathered} \tag{10}$$