§ 3. Работа. Силовая функция. Идеальные связи

51. Работа системы сил. Пусть $\boldsymbol{F}_\nu$ — равнодействующая всех сил системы (внутренних и внешних), приложенных к точке P_ν, а $d\boldsymbol{r}_\nu$ — смещение точки P_ν вдоль ее траектории. *Элементарной работой* $d'A_\nu$ силы $\boldsymbol{F}_\nu$ на перемещении $d\boldsymbol{r}_\nu$ называется скалярное произведение

$$d'A_\nu = \boldsymbol{F}_\nu \cdot d\boldsymbol{r}_\nu = F_{\nu x}dx_\nu + F_{\nu y}dy_\nu + F_{\nu z}dz_\nu. \qquad (1)$$

Элементарная работа $d'A$ всех сил системы получается путем суммирования выражений (1) по индексу ν:

$$d'A = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \cdot d\boldsymbol{r}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} (F_{\nu x}dx_\nu + F_{\nu y}dy_\nu + F_{\nu z}dz_\nu). \qquad (2)$$

Символ d' указывает на то, что правые части в (1) и (2) не обязательно являются полными дифференциалами.

В выражения (1) и (2) для элементарной работы входит работа как внешних, так и внутренних сил. Обозначив через $d'A^{(e)}$ работу внешних сил, а через $d'A^{(i)}$ — работу внутренних сил, выражение (2) можно записать в виде

$$d'A = d'A^{(e)} + d'A^{(i)}.$$

Пусть точка P_ν совершает конечное перемещение из положения M_{ν_0} в положение M_{ν_1}, описывая дугу $M_{\nu_0}M_{\nu_1}$, и пусть $\boldsymbol{F}_\nu$ и $d\boldsymbol{r}_\nu$ могут быть выражены через один и тот же скалярный параметр t (который не обязательно должен быть временем) так, что положения M_{ν_0} и M_{ν_1} точки отвечают значениям t_0 и t_1 этого параметра. Тогда выражение (1) будет представлено в виде функции параметра t, умноженной на его дифференциал, и может быть проинтегрировано по t в пределах от t_0 до t_1. Результат интегрирования называется *полной работой* A_ν силы $\boldsymbol{F}_\nu$ на рассматриваемом конечном перемещении вдоль пути $M_{\nu_0}M_{\nu_1}$. Полная работа всех сил системы представляет собой сумму по ν величин A_ν.

52. Элементарная работа сил, приложенных к твердому телу. Здесь покажем, что элементарная работа системы сил, приложенных к твердому телу, определяется лишь работой внешних сил, и найдем нужное для дальнейшего выражение элементарной работы через главный вектор, главный момент внешних сил и характеристики мгновенного кинематического состояния тела.

Будем представлять себе твердое тело как механическую систему, состоящую из N ($N \geqslant 2$) отдельных точек P_ν, взаимные расстояния между которыми не изменяются. Пусть $\boldsymbol{F}_\nu$ — равнодействующая всех сил, приложенных к точке P_ν тела, которую будем записывать в виде суммы равнодействующих $\boldsymbol{F}_\nu^{(e)} + \boldsymbol{F}_\nu^{(i)}$ всех внешних и внутренних сил, приложенных к точке P_ν.

Пусть O — произвольно выбранный полюс в твердом теле. Скорость $\boldsymbol{v}_\nu$ точки P_ν относительно неподвижной системы координат определяется по формуле (см. п. 24)

$$\boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_\nu,$$

где $\boldsymbol{v}_o$ — скорость полюса, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела. Поэтому смещение точки P_ν вдоль ее траектории равно $(\boldsymbol{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_\nu)\,dt$, где dt — дифференциал времени. Для элементарной работы системы сил получим выражение

$$d'A = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \cdot (\boldsymbol{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_\nu)\,dt = \left(\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu\right) \cdot \boldsymbol{v}_o\,dt + \sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_\nu) \cdot \boldsymbol{F}_\nu\,dt.$$

Воспользовавшись свойствами смешанного произведения, перепишем это выражение в виде

$$d'A = \left(\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu\right) \cdot \boldsymbol{v}_o\,dt + \left(\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{r}_\nu \times \boldsymbol{F}_\nu\right) \cdot \boldsymbol{\omega}\,dt.$$

Заменяя $\boldsymbol{F}_\nu$ на сумму $\boldsymbol{F}_\nu^{(e)}$ и $\boldsymbol{F}_\nu^{(i)}$ и учитывая, что главный вектор и главный момент внутренних сил равны нулю, получаем окончательно

$$d'A = \boldsymbol{R}^{(e)} \cdot \boldsymbol{v}_o\,dt + \boldsymbol{M}_o^{(e)} \cdot \boldsymbol{\omega}\,dt, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{R}^{(e)}$ и $\boldsymbol{M}_o^{(e)}$ — главный вектор и главный момент внешних сил относительно точки O.

53. Силовое поле. Силовая функция. Потенциал. Предположим, что на материальную точку, движущуюся относительно инерциальной системы отсчета, во всем пространстве или в какой-то его части действует сила, зависящая от положения точки (и, быть может, от времени), но не зависящая от скорости точки. В этом случае говорят, что в пространстве или его части задано *силовое поле*, а также, что точка движется в силовом поле. Соответствующие понятия для системы материальных точек аналогичны.

Силы, зависящие от положения, в механике встречаются очень часто. Такова, например, сила, приложенная к точке, движущейся по горизонтальной прямой под действием пружины, к которой эта точка прикреплена. Важнейшим примером силового поля в природе является гравитационное поле: действие Солнца на планету данной массы вполне определяется в каждой точке пространства законом всемирного тяготения.

Силовое поле называется потенциальным, если существует скалярная функция U, зависящая только от координат x_ν, y_ν, z_ν точек P_ν материальной системы (и, быть может, от времени), такая, что

$$F_{\nu x} = \frac{\partial U}{\partial x_\nu},\ F_{\nu y} = \frac{\partial U}{\partial y_\nu},\ F_{\nu z} = \frac{\partial U}{\partial z_\nu}, \qquad (\nu = 1,\ 2, \ldots ,\ N). \tag{4}$$

Функция U называется *силовой функцией*. Функция $\Pi = -U$ называется *потенциалом*, или *потенциальной энергией*. Функция Π определена с точностью до аддитивной постоянной. Потенциальное поле называется *нестационарным* или *стационарным* в зависимости от того, зависит функция Π явно от времени или нет.

Силы $\boldsymbol{F}_\nu$, удовлетворяющие равенствам (4), называются потенциальными.

Элементарная работа сил стационарного потенциального поля представляет собой полный дифференциал. В самом деле, из (2) и (4) получаем

$$d'A = \sum_{\nu=1}^{N} \left(\frac{\partial U}{\partial x_\nu} dx_\nu + \frac{\partial U}{\partial y_\nu} dy_\nu + \frac{\partial U}{\partial z_\nu} dz_\nu \right) = dU = -d\Pi. \tag{5}$$

Поэтому если в рассматриваемой области пространства Π является однозначной функцией от x_ν, y_ν, z_ν $(\nu = 1,\ 2, \ldots ,\ N)$, то полная работа сил потенциального поля при переходе из одного положения системы в другое не зависит от путей перехода точек из их начальных положений в конечные. В частности, если все точки системы описывают замкнутые пути, то полная работа равна нулю.

Пример 1 (Однородное поле тяжести). *Пусть m — масса точки, g — ускорение свободного падения. Тогда* (рис. 47)

$$F_x = 0,\ F_y = 0,\ F_z = -mg;\ \Pi = mgz.$$

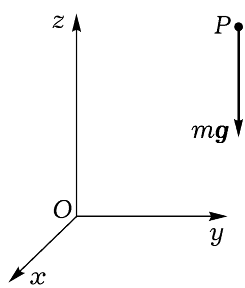

Рис. 47

Пример 2 (Силовое поле упругой пружины). *Пусть материальная точка движется вдоль оси Ox* (рис. 48) *под действием пружины, к которой она прикреплена. Если при $x = 0$ пружина не деформирована, то при малых отклонениях точки можно считать, что со стороны пружины к ней приложена сила $F = -kx$ $(k > 0)$. В этом случае $\Pi = {}^1\!/_2 kx^2$.*

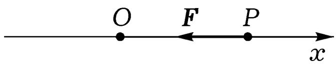

Рис. 48

Пример 3 (Центральное силовое поле). *Силовое поле называется центральным, если сила, приложенная к движущейся в нем точке, направлена вдоль прямой, проходящей через заданный центр — неподвижную точку O. Пусть при этом величина силы зависит только от расстояния от точки до центра. Так как $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = F(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}$, где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки P относительно центра O, то*

$$d'A = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = F(r)\frac{\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r}}{r} = \frac{1}{2}F(r)\frac{d\boldsymbol{r}^2}{r} = F(r)dr = -d\Pi.$$

Поэтому

$$\Pi = -\int F(r)dr + \text{const}. \qquad (6)$$

В качестве конкретного примера найдем потенциал для движения точки массой m_2 в ньютоновском гравитационном поле точки массой m_1. В этом случае $F(r) = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}$, где γ — универсальная гравитационная постоянная. Если считать, что $\Pi = 0$ при $r = \infty$, то из (6) следует такое выражение для потенциала центрального ньютоновского силового поля:

$$\Pi = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r}. \qquad (7)$$

54. Элементарная работа системы сил в обобщенных координатах. Обобщенные силы. Пусть $\boldsymbol{F}_\nu$ — равнодействующая всех сил, приложенных к точке P_ν системы ($\nu = 1,\ 2, \ldots,\ N$), а $\boldsymbol{r}_\nu$ — радиусы-векторы точек P_ν относительно начала координат. Пусть положение системы задается ее обобщенными координатами q_j $(j = 1,\ 2, \ldots,\ m)$. Элементарную работу $d'A$ системы сил на виртуальных перемещениях $\delta\boldsymbol{r}_\nu$ будем обозначать δA. Найдем выражение элементарной работы через обобщенные координаты и их вариации δq_j.

Радиусы-векторы точек P_ν являются функциями обобщенных координат и времени, а виртуальные перемещения $\delta\boldsymbol{r}_\nu$, выражаются через вариации δq_j обобщенных координат по формуле (27) п. 16. Поэтому

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \cdot \delta\boldsymbol{r}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \cdot \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j}\delta q_j = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j}\right)\delta q_j. \qquad (8)$$

Введем обозначение

$$Q_j = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j} \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{9}$$

Тогда формула (8) запишется в виде

$$\delta A = \sum_{j=1}^{m} Q_j \delta q_j.$$

Величина Q_j называется *обобщенной силой*, соответствующей обобщенной координате $q_j \quad (1,\ 2,\ \ldots,\ m)$. В общем случае обобщенные силы будут функциями обобщенных координат, скоростей и времени.

В практических задачах при вычислении обобщенных сил формулами (9), как правило, не пользуются. Обычно дают системе такое виртуальное перемещение, при котором $\delta q_k = 0$ для всех k, кроме $k = j$. Тогда $\delta A = \delta A_j = Q_j \delta q_j$ и

$$Q_j = \frac{\delta A_j}{\delta q_j}.$$

Пусть силы $\boldsymbol{F}_\nu$ потенциальные с потенциалом $\Pi = \Pi(\boldsymbol{r}_\nu,\ t)$. Тогда и обобщенные силы — потенциальные, причем им соответствует потенциал, полученный из функции $\Pi(\boldsymbol{r}_\nu,\ t)$, если в ней величины $\boldsymbol{r}_\nu$ выразить через обобщенные координаты. В самом деле, учитывая (5), имеем

$$\delta A = \sum_{j=1}^{m} Q_j \delta q_j = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu = -\delta \Pi = -\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \delta q_j.$$

Отсюда следует, что в случае потенциальных сил обобщенные силы могут быть вычислены по формулам

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Пример 1 (Материальная точка движется вдоль оси Ox под действием силы F_x). *В этом случае $m = 1$, обобщенная координата — абсцисса x точки, $\delta A = F_x \delta x$, $Q_x = F_x$.*

Пример 2 (Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси u). *Здесь $m = 1$, за обобщениую координату примем угол φ поворота тела вокруг оси. Пусть $\boldsymbol{R}^{(e)}$ и $\boldsymbol{M}_O^{(e)}$ — главный вектор и главный момент внешних сил относительно полюса O, выбранного на оси вращения. Для подсчета величины δA воспользуемся формулой (3) п. 52, взяв* *вместо действительного перемещения виртуальное. Последнее возможно, так как твердое тело является склерономной механической системой (п. 18), а для склерономных систем действительное перемещение является одним из виртуальных (п. 12). Учитывая, что* $\boldsymbol{v}_o = 0$, *получим*

$$\delta A = \boldsymbol{R}^{(e)} \cdot \boldsymbol{v}_o\, dt + \boldsymbol{M}_o^{(e)} \cdot \boldsymbol{\omega}\, dt = M_u^{(e)} \delta\varphi.$$

Следовательно,

$$Q_\varphi = M_u^{(e)}.$$

Здесь $M_u^{(e)}$ *— главный момент внешних сил относительно оси* u.

Пример 3 (Движение двойного маятника в вертикальной плоскости в поле тяжести (рис. 15)). *Пусть стержни, образующие маятник, имеют одинаковую длину* l *и одинаковую массу* m. *Эта система имеет две степени свободы. За обобщенные координаты примем углы* φ *и* ψ, *изображенные на рис. 15. Для вычисления потенциала* Π *возьмем систему координат с началом в точке* A *и с осью* Ax, *направленной вертикально вниз. Тогда, обозначая через* x_1 *и* x_2 *абсциссы центров тяжести верхнего и нижнего стержней, имеем*

$$\Pi = -mgx_1 - mgx_2.$$

Но $x_1 = \dfrac{l}{2}\cos\varphi$, $x_2 = l\cos\varphi + \dfrac{l}{2}\cos\psi$. *Поэтому*

$$\Pi = -\frac{1}{2}mgl(3\cos\varphi + \cos\psi),$$

и для обобщенных сил получаются следующие выражения:

$$Q_\varphi = -\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi} = -\frac{3}{2}mgl\sin\varphi, \qquad Q_\psi = -\frac{\partial\Pi}{\partial\psi} = -\frac{1}{2}mgl\sin\psi.$$

55. Идеальные связи. При движении несвободной системы на ее точки действуют реакции связей. Пусть $\boldsymbol{R}_\nu$ — равнодействующая реакций связей, действующих на точку P_ν системы ($\nu = 1, 2, \ldots, N$).

Связи называются *идеальными*, если работа δA реакций этих связей на любых виртуальных перемещениях равна нулю, т. е.

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{R}_\nu \cdot \delta\boldsymbol{r}_\nu = 0. \tag{10}$$

Условие идеальности связей не вытекает из их уравнений, оно вводится дополнительно. Рассмотрим несколько примеров идеальных связей.

Пример 1 (Материальная точка P движется по гладкой поверхности (движущейся или неподвижной)). *Виртуальные перемещения $\delta \boldsymbol{r}$ лежат в касательной к поверхности плоскости как в случае неподвижной, так и в случае движущейся поверхности (см. п. 12). А реакция поверхности ортогональна ей (рис. 49). Поэтому* $\delta A = \boldsymbol{R} \cdot \delta \boldsymbol{r} = 0$.

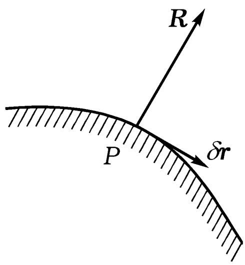

Рис. 49

Пример 2 (Свободное твердое тело). *У свободного твердого тела нет других связей, кроме тех, которые обеспечивают постоянство взаимных расстояний между точками, образующими твердое тело. Эти связи действуют на точки тела посредством сил, которые для твердого тела являются внутренними. Но, согласно п. 52, внутренние силы в случае твердого тела не совершают работу. Поэтому* $\delta A = 0$.

В дополнение к п. 18 мы можем теперь сказать, что свободное твердое тело представляет собой голономную склерономную систему с идеальными связями.

Пример 3 (Твердое тело, имеющее одну неподвижную точку (рис. 50)). *В этом случае $\delta A = 0$, так как $\delta \boldsymbol{r} = 0$ (неподвижна точка приложения реакции связи $\boldsymbol{R}$).*

Пример 4 (Твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси). *Здесь $\delta A = 0$ по той же причине, что и в примере 3.*

Пример 5 (Два твердых тела, соединенных в точке O шарниром (рис. 51)). *Здесь $\boldsymbol{R}_1 = -\boldsymbol{R}_2$, $\delta \boldsymbol{r}_1 = \delta \boldsymbol{r}_2$. Поэтому* $\delta A = \boldsymbol{R}_1 \cdot \delta \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{R}_2 \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R}_1 \cdot (\delta \boldsymbol{r}_1 - \delta \boldsymbol{r}_2) = 0$.

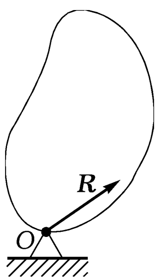

Рис. 50

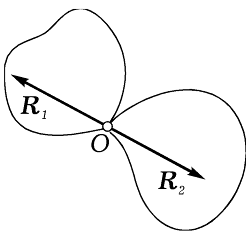

Рис. 51

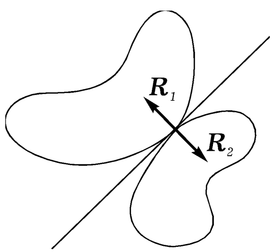

Рис. 52

Пример 6 (Два твердых тела, соприкасающихся при движении гладкими поверхностями (рис. 52)). *Относительная скорость точ-*

ки соприкосновения тел лежит в общей касательной плоскости к поверхностям тел в точке их касания. В этой же плоскости лежит разность $\delta \boldsymbol{r}_1 - \delta \boldsymbol{r}_2$ виртуальных перемещений точек, в которых соприкасаются тела. Кроме того, как всегда, $\boldsymbol{R}_1 = -\boldsymbol{R}_2$, но в рассматриваемом случае реакции $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$ перпендикулярны общей касательной плоскости. Поэтому $\delta A = \boldsymbol{R}_1 \cdot \delta \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{R}_2 \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R}_1 \cdot (\delta \boldsymbol{r}_1 - \delta \boldsymbol{r}_2) = 0$.

Пример 7 (Два твердых тела, соприкасающихся при движении абсолютно шероховатыми поверхностями). *По определению это означает, что относительные скорости точек, которыми соприкасаются тела, равны нулю. Следовательно, $\delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) = 0$, и поэтому $\delta A = \boldsymbol{R}_1 \cdot \delta \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{R}_2 \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R}_1 \cdot \delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) = 0$.*

Пример 8 (Две материальные точки, соединенные натянутой идеальной нитью). *Под идеальной нитью понимается не обладающая массой нерастяжимая нить, которая не оказывает сопротивления изменению ее формы. Для определенности будем считать, что нить перекинута через неподвижный гладкий стержень A* (рис. 53). *Так как нить невесома, то ее реакции $\boldsymbol{T}_1$ и $\boldsymbol{T}_2$, приложенные к точкам P_1 и P_2, равны по модулю, $T_1 = T_2 = T$ (натяжение нити всюду одинаково). Найдем работу реакций на виртуальных перемещениях точек. В силу того, что нить нерастяжима, $\delta r_1 \cos\alpha_1 = \delta r_2 \cos\alpha_2$. Поэтому $\delta A = \boldsymbol{T}_1 \cdot \delta \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{T}_2 \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 = T_1 \delta r_1 \cos\alpha_1 - T_2 \delta r_2 \cos\alpha_2 = T(\delta r_1 \cos\alpha_1 - \delta r_2 \cos\alpha_2) = 0$.*

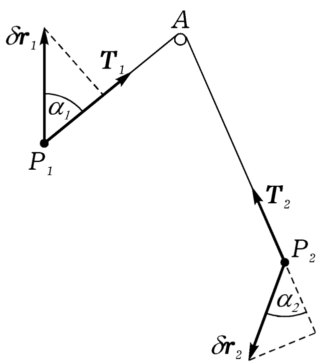

Рис. 53

Очень многие механизмы можно трактовать как сочетание простейших «деталей», рассмотренных в примерах 1–8. Однако в действительности не существует ни абсолютно гладких, ни абсолютно шероховатых поверхностей, не существует абсолютно твердых тел и нерастяжимых нитей. Поэтому в реальных ситуациях работа реакций связей отлична от нуля. Часто эта работа бывает малой и в допустимом приближении может считаться равной нулю. Этот факт и приводит в теоретической механике к выделению важнейшего класса связей, названных выше идеальными.

Однако очень часто связи нельзя считать идеальными. Такой случай встречается, например, когда при движении тела соприкасаются не абсолютно гладкими участками своих поверхностей и имеет место относительное скольжение. В этом случае, отнеся силы трения к неизвестным активным силам, можно условно считать связи идеальными.

Появление новых неизвестных требует тогда привлечения новых экспериментальных данных, например законов трения скольжения.

В дальнейшем мы будем рассматривать, как правило, только идеальные связи.

Остановимся на следующем весьма важном обстоятельстве. Упомянутая в п. 47 первая задача динамики для случая несвободной системы может быть более подробно сформулирована так. Заданы активные силы $\boldsymbol{F}_\nu$, приложенные к точкам P_ν материальной системы, массы m_ν точек, связи, возможные начальные положения $\boldsymbol{r}_{\nu_0}$ и скорости $\boldsymbol{v}_{\nu_0}$ точек системы. Требуется найти положения точек $\boldsymbol{r}_\nu$ и реакции связей $\boldsymbol{R}_\nu$ как функции времени. Таким образом, требуется найти $6N$ скалярных неизвестных.

Для решения этой задачи мы имеем $3N + r + s$ скалярных уравнений: $3N$ уравнений из векторных уравнений движения (2) п. 45 и $r + s$ уравнений связей (1), (2) п. 10. Так как число $6N$ больше $3N + r + s$ (на число степеней свободы системы $n = 3N - r - s$), то сформулированная задача неопределенна. Выделением класса систем с идеальными связями мы делаем задачу определенной, так как одно равенство (10) эквивалентно n уравнениям. Для их получения нужно в правой части равенства (10) выразить зависимые из виртуальных перемещений δx_1, δy_1, δz_1, ... , δx_N, δy_N, δz_N через независимые и затем приравнять нулю коэффициенты при этих независимых виртуальных перемещениях. Число же последних равно числу степеней свободы, т. е. n.