Глава III
Дифференциальные вариационные принципы механики

§ 1. Принцип Даламбера–Лагранжа

56. Понятие о вариационных принципах механики. Принципами называют, во-первых, некоторые основные начала, на которых может быть построена какая-либо теория, научная система и т. п., а во-вторых — законы, основные положения о чем-либо. Под принципами часто понимают также точку зрения, убеждения и т. д.

Принципы теоретической механики можно разделить на вариационные и невариационные. К *невариационным принципам* относятся, например, аксиомы динамики, обсуждавшиеся в §1 предыдущей главы, а также законы механики, например закон сохранения энергии, закон всемирного тяготения и т. п.

Вариационные принципы механики представляют собой выраженные языком математики условия, которые отличают истинное (действительное) движение системы от других кинематически возможных, т. е. допускаемых связями, движений. Вариационные принципы делятся на *дифференциальные* и *интегральные*. Первые дают критерий истинного движения для данного фиксированного момента времени, а вторые — на конечном интервале времени.

В этой главе рассматриваются дифференциальные вариационные принципы механики.

57. Общее уравнение динамики (принцип Даламбера–Лагранжа). Рассмотрим систему, состоящую из N материальных точек P_ν ($\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ N$). Система может быть как свободной, так и несвободной. В последнем случае связи, наложенные на систему, считаются удерживающими и идеальными. Пусть $\boldsymbol{F}_\nu$ и $\boldsymbol{R}_\nu$ — равнодействующие всех активных сил и реакций связей, приложенных к точке P_ν. Имеют место следующие уравнения движения (п. 45):

$$m_\nu \boldsymbol{w}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu + \boldsymbol{R}_\nu \qquad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ N), \tag{1}$$

где m_ν — масса точки P_ν, а $\boldsymbol{w}_\nu$ — ее ускорение в инерциальной системе отсчета.

Поскольку связи идеальны, то для любых виртуальных перемещений $\delta \boldsymbol{r}_\nu$ выполняется равенство

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{R}_\nu \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0. \tag{2}$$

Запишем уравнения (1) в виде

$$\boldsymbol{F}_\nu - m_\nu \boldsymbol{w}_\nu = -\boldsymbol{R}_\nu \qquad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ N).$$

Умножим обе части этого равенства скалярно на $\delta \boldsymbol{r}_\nu$ и произведем суммирование по ν. Тогда с учетом условия (2) получим соотношение

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{F}_\nu - m_\nu \boldsymbol{w}_\nu) \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0. \tag{3}$$

Соотношение (3) является необходимым и достаточным условием для того, чтобы движение, совместимое с идеальными связями, отвечало данной системе активных сил $\boldsymbol{F}_\nu$ $(\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ N)$. Необходимость условия (3) мы только что показали. Предположим теперь, что некоторое совместимое со связями движение системы удовлетворяет условию (3). Тогда если положить $\boldsymbol{R}_\nu = m_\nu \boldsymbol{w}_\nu - \boldsymbol{F}_\nu$ $(\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ N)$, то получим, что удовлетворяются равенство (2) и уравнения движения (1), полученные непосредственно из законов Ньютона.

Соотношение (3) характеризует движение всякой системы с идеальными удерживающими связями по отношению к активным силам $\boldsymbol{F}_\nu$ и соответствующим (для данного момента времени) виртуальным перемещениям. Оно получило название *общего уравнения динамики.*

Входящие в (3) произведения $m_\nu \boldsymbol{w}_\nu$ масс точек системы на их ускорения, взятые с обратным знаком, называют *силами инерции.* Применяя эту терминологию, можно сказать, что общее уравнение динамики показывает, что в любой фиксированный момент времени сумма элементарных работ активных сил и сил инерции на любых виртуальных перемещениях равна нулю.

Общее уравнение динамики получено в предположении об идеальности связей (2). Если же связи таковы, что все или часть их реакций $\boldsymbol{G}_\nu$ не удовлетворяют условию (2), то можно к системе активных сил добавить реакции $\boldsymbol{G}_\nu$, и уравнение (3) примет вид

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{F}_\nu + \boldsymbol{G}_\nu - m_\nu \boldsymbol{w}_\nu) \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0. \tag{4}$$

В общем случае силы $\boldsymbol{G}_\nu$ (или часть из них) неизвестны. Эта неопределенность должна компенсироваться дополнительными данными о физических свойствах и характере связей, порождающих реакции $\boldsymbol{G}_\nu$.

Важным свойством общего уравнения динамики является то, что оно не содержит реакций идеальных связей.

Соотношение (3) на самом деле является не одним уравнением, а содержит в себе число уравнений, равное n, т. е. числу степеней свободы системы, которое определяется количеством независимых виртуальных перемещений δx_1, δy_1, δz_1, ..., δx_N, δy_N, δz_N (см. п. 55). В каждом из этих n уравнений отсутствуют реакции связей.

Общее уравнение динамики (3) содержит в себе всю информацию о движении данной механической системы с идеальными удерживающими связями под действием заданных активных сил. В последующих главах оно будет положено в основу получения всех основных дифференциальных уравнений движения механических систем, голономных и неголономных.

Общее уравнение динамики называют также *дифференциальным вариационным принципом Даламбера–Лагранжа*. Вариационным принцип называется потому, что в (3) входят вариации — виртуальные перемещения. Название дифференциального принцип носит потому, что в нем сравнивается данное положение системы с ее варьированным положением в фиксированный, хотя и произвольный момент времени (синхронное варьирование, согласно п. 12).

С этой точки зрения принцип Даламбера–Лагранжа может быть сформулирован следующим образом: *истинное движение из всех кинематически возможных выделяется тем, что для него и только для него в данный момент времени сумма работ активных сил и сил инерции на любых виртуальных перемещениях равна нулю.*

Пример 1. *Две материальные точки массой m_1 и m_2* $(m_2 > m_1)$ *соединены идеальной нитью, перекинутой через гладкий стержень, и движутся в поле тяжести в вертикальной плоскости* (рис. 54). *Найти ускорения точек.*

Пусть x_1 и x_2 — абсциссы точек m_1 и m_2 соответственно. Тогда из общего уравнения динамики (3) *следует, что*

$$(m_1 g - m_1\ddot{x}_1)\delta x_1 + (m_2 g - m_2\ddot{x}_2)\delta x_2 = 0. \tag{5}$$

Но так как нить нерастяжима, то имеет место геометрическая связь $x_1 + x_2 + \pi R = \mathrm{const}$, где R — радиус сечения стержня. Поэтому $\delta x_1 = -\delta x_2$, $\ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2$, и уравнение (5) *запишется в виде*

$$[(m_2 - m_1)g - (m_1 + m_2)\ddot{x}_2]\delta x_2 = 0.$$

Отсюда в силу произвольности виртуального перемещения δx_2 *получаем*

$$\ddot{x}_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g.$$

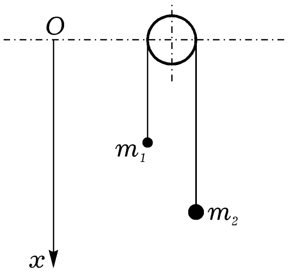

Рис. 54

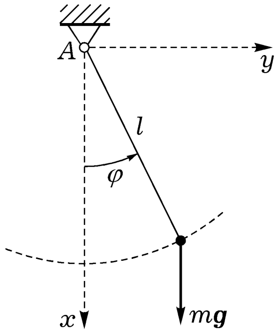

Рис. 55

Пример 2. *Найдем дифференциальное уравнение движения плоского математического маятника. Маятник будем для простоты представлять в виде точечной массы* m, *прикрепленной при помощи невесомого стержня длиной* l *к точке* A, *вокруг которой стержень может вращаться без трения в вертикальной плоскости. Направляя оси* Ax *и* Ay *декартовой системы координат, как показано на рис.* 55, *получаем*

$$x = l\cos\varphi,\ y = l\sin\varphi,$$

$$\delta x = -l\sin\varphi\,\delta\varphi,\ \delta y = l\cos\varphi\,\delta\varphi$$

$$\ddot{x} = -l\sin\varphi\,\ddot{\varphi} - l\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2,\ \ddot{y} = l\cos\varphi\,\ddot{\varphi} - l\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2,$$

$$F_x = mg,\ F_y = 0.$$

Общее уравнение динамики

$$(F_x - m\ddot{x})\delta x + (F_y - m\ddot{y})\delta y = 0$$

дает равенство

$$-ml(g\sin\varphi + l\ddot{\varphi})\delta\varphi = 0,$$

откуда, ввиду произвольности вариация $\delta\varphi$, *следует дифференциальное уравнение движения маятника*

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0 \tag{6}$$

Замечание 1. *Из общего уравнения динамики* (3) *видно, что оно* (*а, следовательно, и движение системы*) *не изменяется, если вместо системы сил* $\boldsymbol{F}_\nu$, *взять какую-либо другую систему сил* $\boldsymbol{F}^*_\nu$, *такую, чтобы элементарная работа обеих систем сил на любых одинаковых виртуальных перемещениях была одинакова, т. е.*

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}^*_\nu \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu.$$

§ 2. Принцип Журдена

58. Принцип Журдена. Представляет интерес преобразовать общее уравнение динамики таким образом, чтобы прийти к формулам, в основном эквивалентным уравнению (3) п. 57, но имеющим другую структуру. Так как уравнение (3) п. 57, по существу, содержит в себе все законы движения механических систем с идеальными удерживающими связями, то эти новые формулы не будут выражением принципов, существенно новых. Однако они могут дать новую интерпретацию, обнаруживающую общие свойства движения систем и наложенных на них связей, которые не могут быть получены из уравнения (3) п. 57 непосредственно.

Рассмотрим множество кинематически возможных движений из возможного положения $\boldsymbol{r}^*_\nu$ с различными возможными скоростями $\boldsymbol{v}^*_\nu$. Будем сравнивать их одно с другим и с действительным движением из того же положения в тот же момент времени. Так мы получаем *варьирование по Журдену* (п. 12), при котором $\delta \boldsymbol{r}_\nu = \delta \boldsymbol{v}_\nu \Delta t$, где величина $\delta \boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{v}^*_{\nu_1} - \boldsymbol{v}^*_{\nu_2}$ — разность возможных скоростей в сравниваемых движениях (эта величина не обязательно является бесконечно малой).

Подставляя это выражение для $\delta \boldsymbol{r}_\nu$ в общее уравнение динамики (3) и сокращая на Δt, получаем

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{F}_\nu - m_\nu \boldsymbol{w}_\nu) \cdot \delta \boldsymbol{v}_\nu = 0. \quad (1)$$

Формула (1) выражает *дифференциальный вариационный принцип Журдена.* Согласно этому принципу, среди сравниваемых кинематически возможных в данный момент времени движений (для которых $\boldsymbol{r}^*_{\nu_1} = \boldsymbol{r}^*_{\nu_2}$, $\delta \boldsymbol{v}_\nu \neq 0$) действительное движение выделяется тем, что для него и только для него выполнено уравнение (1).