§ 3. Принцип Гаусса

59. Формулировка принципа Гаусса (принципа наименьшего принуждения). Вариационные принципы Даламбера–Лагранжа и Журдена не связаны с понятием экстремальности. Гаусс предложил замечательную модификацию принципа Даламбера–Лагранжа, которая вводит в этот принцип понятие минимальности некоторого выражения. Эта модификация принципа Даламбера–Лагранжа получила название принципа Гаусса, или принципа наименьшего принуждения.

Для получения математической формулировки принципа Гаусса будем сравнивать в некоторый момент времени движения, в которых все точки системы имеют те же возможные положения $\boldsymbol{r}_\nu^*$ и скорости $\boldsymbol{v}_\nu^*$, что и в действительном движении. Возможные же ускорения точек системы в сравниваемых движениях будут отличаться (на величины, не обязательно являющиеся бесконечно малыми). Такой способ синхронного варьирования называется *варьированием по Гауссу* (п. 12).

Если для разности возможных ускорений $\boldsymbol{w}_{\nu_1}^* - \boldsymbol{w}_{\nu_2}^*$ в двух сравниваемых кинематически возможных движениях ввести обозначение $\delta \boldsymbol{w}_\nu$, то, согласно п. 12, $\delta \boldsymbol{r}_\nu = {}^1\!/_2 \delta \boldsymbol{w}_\nu (\Delta t)^2$. Подставив это значение виртуального перемещения в общее уравнение динамики (3) п. 57 и сократив его на ${}^1\!/_2 (\Delta t)^2$, получим

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{F}_\nu - m_\nu \boldsymbol{w}_\nu) \cdot \delta \boldsymbol{w}_\nu = 0. \tag{1}$$

Замечая, что массы точек m_ν, постоянны, а силы $\boldsymbol{F}_\nu$ не зависят от ускорений точек системы, уравнение (1) можно записать в виде

$$\delta Z = 0, \tag{2}$$

где введена величина

$$Z = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\boldsymbol{w}_\nu - \frac{\boldsymbol{F}_\nu}{m_\nu} \right)^2, \tag{3}$$

называемая *принуждением* или *мерой принуждения.*

Согласно (2), величина Z, рассматриваемая как функция возможных ускорений, стационарна при значениях ускорений точек системы, соответствующих действительному движению.

Величина Z не только стационарна, но и минимальна на действительном движении. В самом деле, пусть $\boldsymbol{w}_{\nu_0}$ — ускорения точек системы в их действительном движении, а Z_0 — соответствующее им значение величины Z. Тогда, полагая, что в сравниваемом с действительным кинематически возможном движении величина $\boldsymbol{w}_\nu$ равна $\boldsymbol{w}_{\nu_0} + \delta\boldsymbol{w}_{\nu_0}$, находим, что

$$Z - Z_0 = \sum_{\nu=1}^{N}(m_\nu \boldsymbol{w}_{\nu_0} - \boldsymbol{F}_\nu)\delta\boldsymbol{w}_{\nu_0} + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\delta\boldsymbol{w}_{\nu_0})^2. \tag{4}$$

Первая сумма в правой части равенства (4) обращается в нуль в силу уравнения (1), а вторая строго положительна, так как не все величины $\delta\boldsymbol{w}_{\nu_0}$ $(\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ N)$ равны нулю. Поэтому величина Z на действительном движении принимает наименьшее значение в классе возможных ускорений системы.

Таким образом, мы получили принцип Гаусса или, как часто говорят, *принцип наименьшего принуждения: среди сравниваемых кинематически возможных движений (для которых $\boldsymbol{r}^*_{\nu_1} = \boldsymbol{r}^*_{\nu_2}$, $\boldsymbol{v}^*_{\nu_1} = \boldsymbol{v}^*_{\nu_2}$, $\delta\boldsymbol{w}_\nu \neq 0$) действительное движение выделяется тем, что для него принуждение Z минимально.*

Пример 1. *Найдем ускорение точек m_1 и m_2 из примера 1 п. 57, применяя принцип Гаусса. Имеем*

$$Z = \frac{1}{2}m_1(-w - g)^2 + \frac{1}{2}m_2(w - g)^2,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial w} = m_1(w + g) + m_2(w - g) = 0,$$

$$w = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}g.$$

Пример 2. *Применяя принцип Гаусса, найдем дифференциальное уравнение движения математического маятника (пример 2 п. 57). Функция Z имеет вид*

$$Z = \frac{1}{2}m\left[\left(\ddot{x} - \frac{F_x}{m}\right)^2 + \left(\ddot{y} - \frac{F_y}{m}\right)^2\right] =$$
$$= \frac{1}{2}m(l^2\ddot{\varphi}^2 + 2gl\sin\varphi\ddot{\varphi}) + \frac{1}{2}m(l^2\dot{\varphi}^4 + 2gl\cos\varphi\dot{\varphi}^2 + g^2).$$

Из условия $\partial Z/\partial\ddot{\varphi} = 0$ следует уравнение (6) п. 57.

Пример 3. *Материальная точка массой m под действием активной силы $\boldsymbol{F}$ движется по гладкой поверхности, задаваемой уравнением $z = f(x,\ y)$. Найдем дифференциальные уравнения движения точки. Из уравнения связи имеем*

$$\ddot{z} = \frac{\partial f}{\partial x}\ddot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\ddot{y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dot{x}^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\dot{x}\dot{y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\dot{y}^2. \tag{5}$$

Нужно минимизировать величину, равную

$$(m\ddot{x} - F_x)^2 + (m\ddot{y} - F_y)^2 + (m\ddot{z} - F_z)^2,$$

где производная $\ddot{z}$ задана формулой (5)*. Независимыми переменными являются $\ddot{x}$ и $\ddot{y}$. Окончательно получаем уравнение*

$$m\ddot{x} - F_x + (m\ddot{z} - F_z)\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad m\ddot{y} - F_y + (m\ddot{z} - F_z)\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

где $\ddot{z}$ следует заменить на правую часть равенства (5)*.*

60. Физический смысл принципа Гаусса. Пусть в момент времени t точки P_ν несвободной механической системы имеют радиусы-векторы $\boldsymbol{r}_\nu$ и скорости $\boldsymbol{v}_\nu$; m_ν, как всегда, обозначает массу точки P_ν, а $\boldsymbol{F}_\nu$ — равнодействующую всех активных сил, приложенных к точке P_ν.

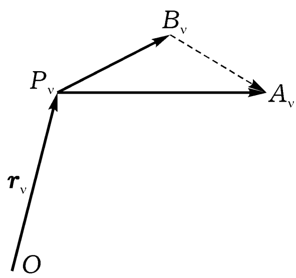

Рис. 56

В момент времени $t+dt$ точка P_ν займет положение A_ν (рис. 56). При этом

$$\overline{P_\nu A_\nu} = \boldsymbol{v}_\nu dt + \frac{1}{2}\boldsymbol{w}_\nu (dt)^2 + \ldots,$$

где многоточием обозначены члены выше второго порядка относительно dt.

Если бы в момент времени t система была освобождена от связей (без изменения $\boldsymbol{F}_\nu$, m_ν, $\boldsymbol{r}_\nu$, $\boldsymbol{v}_\nu$), то движение ее точек на интервале времени dt было бы отличным от движения точек несвободной системы. Пусть B_ν — положение, которое заняла бы точка P_ν в момент времени $t + dt$. Тогда

$$\overline{P_\nu B_\nu} = \boldsymbol{v}_\nu dt + \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{F}_\nu}{m_\nu}(dt)^2 + \ldots$$

Удаление $\overline{B_\nu A_\nu}$ точки при несвободном движении от ее положения при свободном движении вызвано действием связей, принуждающих точки системы отклоняться от движения, свойственного точкам свободной системы. Математически это принуждающее воздействие связей можно характеризовать длиной вектора $\overline{B_\nu A_\nu}$. С другой стороны, для того чтобы сообщить материальной точке какое-то ускорение, необходимо воздействие тем большее, чем больше (при прочих равных условиях) ее масса. Поэтому принуждающее воздействие связей на точку естественно оценивать величиной $m_\nu \overline{B_\nu A_\nu}^2$, а для всей системы — суммой этих величин по всем точкам P_ν $(\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ N)$. Если пренебречь членами выше четвертого порядка относительно dt, то

$$m_\nu \overline{B_\nu A_\nu}^2 = m_\nu(\overline{P_\nu A_\nu} - \overline{P_\nu B_\nu})^2 = \frac{1}{4} m_\nu (dt)^4 \left(\boldsymbol{w}_\nu - \frac{\boldsymbol{F}_\nu}{m_\nu}\right)^2.$$

Если просуммировать эти величины по всем точкам системы и отбросить несущественный множитель $\frac{1}{2}(dt)^4$, то получим принуждение для системы в виде

$$Z = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\boldsymbol{w}_\nu - \frac{\boldsymbol{F}_\nu}{m_\nu}\right)^2.$$

Величина Z является мерой отклонения действительного движения системы от ее свободного движения. Так как, согласно принципу Гаусса, величина Z в действительном движении минимальна, то можно сказать, что несвободная система совершает движение, наиболее близкое к свободному.

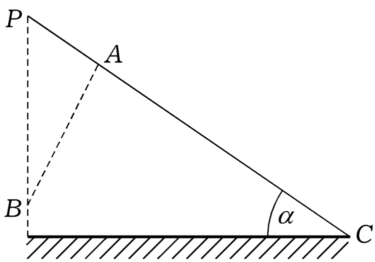

Рис. 57

Пример 1. *Материальная точка массой m движется под действием силы тяжести по гладкой прямой, наклоненной к горизонтальной плоскости под углом α* (рис. 57). *Найдем ускорение точки, пользуясь тем, что ее действительное движение наименее отклоняется от свободного движения. Пусть в начальный момент точка занимает положение P и имеет скорость, равную нулю. При свободном движении точка движется по вертикали и за время dt проходит расстояние $PB = \frac{1}{2}g(dt)^2$. В действительном несвободном движении по прямой PC точка движется с неизвестным ускорением w и за время dt проходит расстояние $PA = \frac{1}{2}w(dt)^2$. Поэтому*

$$BA^2 = \left(\frac{g(dt)^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{w(dt)^2}{2}\right)^2 - 2\frac{g(dt)^2}{2}\frac{w(dt)^2}{2}\sin\alpha =$$
$$= \frac{(dt)^4}{4}(w^2 - 2gw\sin\alpha + g^2).$$

Минимум этой величины достигается при $w = g\sin\alpha$. Это и есть искомое ускорение.

61. Экстремальное свойство реакций связей. Физический смысл принципа Гаусса можно выразить и в других терминах. Замечая, что $m_\nu \boldsymbol{w}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu + \boldsymbol{R}_\nu$, мы можем переписать выражение для принуждения в виде

$$Z = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{N} \frac{R_\nu^2}{m_\nu}. \tag{6}$$

Условие того, что величина Z минимальна для действительного движения, приводит к экстремальному свойству реакций связей: для действительного движения реакции связей минимальны (в смысле минимума величины (6)).