Глава IV
Статика

§ 1. Статика произвольной механической системы

62. Общее уравнение статики (принцип виртуальных перемещений). Задачи статики сформулированы в п. 47. В этом параграфе кратко рассмотрим некоторые основные вопросы статики произвольной механической системы с идеальными удерживающими связями. В следующем параграфе будут подробно изучены вопросы статики твердого тела, являющегося важнейшим для приложений частным случаем механической системы.

Рассмотрим несвободную систему материальных точек P_ν ($\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ N$) со связями, задаваемыми уравнениями (1), (2) п. 10. Найдем условия, которым должны удовлетворять связи, чтобы система при $\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_{\nu_0}$ могла находиться в состоянии равновесия на интервале времени $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Во-первых, конечно, положения точек, задаваемые радиусами-векторами $\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_{\nu_0}$, должны быть возможными на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, т. е. на этом интервале должны выполняться тождества

$$f_\alpha(\boldsymbol{r}_{\nu_0},\ t) \equiv 0 \qquad (\alpha = 1,\ 2,\ \ldots,\ r). \tag{1}$$

Во-вторых, из уравнений (2)–(5) п. 10, 11, задающих ограничения на скорости и ускорения точек системы, получаем при $\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_{\nu_0}$, $\boldsymbol{v}_\nu = 0$, $\boldsymbol{w}_\nu = 0$ и $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ тождества

$$a_\beta(\boldsymbol{r}_{\nu_0},\ t) \equiv 0,\ \frac{\partial a_\beta(\boldsymbol{r}_{\nu_0},\ t)}{\partial t} \equiv 0,\ \frac{\partial f_\alpha(\boldsymbol{r}_{\nu_0},\ t)}{\partial t} \equiv 0,\ \frac{\partial^2 f_\alpha(\boldsymbol{r}_{\nu_0},\ t)}{\partial t^2} \equiv 0$$
$$(\alpha = 1,\ \ldots,\ r;\quad \beta = 1,\ \ldots,\ s). \tag{2}$$

Из (1), (2) следует, что система при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ может находиться в состоянии равновесия в каком-либо ее возможном положении $\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_{\nu_0}$ только тогда, когда связи удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} f_\alpha(\boldsymbol{r}_{\nu_0},\ t) = 0, \qquad a_\beta(\boldsymbol{r}_{\nu_0},\ t) = 0 \\ (t_0 \leqslant t \leqslant t_1;\quad \alpha = 1,\ 2,\ \ldots,\ r;\quad \beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ s). \end{gathered} \tag{3}$$

Пусть тождества (3) выполнены, т. е. состояние равновесия $\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_{\nu_0}$ допускается связями, и пусть при $t = t_0$ имеем $\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_{\nu_0}$, $\boldsymbol{v}_\nu = 0$. Будет ли система при выполнении условий (3) находиться в состоянии равновесия, зависит от приложенных к ней сил.

В основе статики механической системы лежит принцип виртуальных перемещений, или принцип Лагранжа. Сформулируем его в виде теоремы.

Теорема. *Чтобы некоторое допускаемое идеальными удерживающими связями состояние равновесия системы действительно было ее состоянием равновесия на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, необходимо и достаточно, чтобы для любого момента времени из этого интервала элементарная работа активных сил на любом виртуальном перемещении равнялась нулю, т. е. чтобы выполнялось условие*

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0 \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1). \tag{4}$$

Уравнение (4) *называется общим уравнением статики.*

Доказательство необходимости.

При доказательстве необходимости условия (4) для равновесия системы воспользуемся общим уравнением динамики

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{F}_\nu - m_\nu \boldsymbol{w}_\nu) \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0, \tag{5}$$

которое справедливо в любой момент времени для систем с идеальными удерживающими связями. Если при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ система находится в состоянии равновесия, то $\boldsymbol{w}_\nu = 0$ и из уравнения (5) сразу следует условие (4).

Доказательство достаточности более сложно. Мы дадим его далее в п. 158. Здесь только заметим, что это доказательство будет по существу использовать принцип полной детерминированности движения, т. е. однозначного определения движения системы по начальным положениям и скоростям образующих ее материальных точек. Следующий пример показывает, что при отсутствии полной детерминированности движения принцип виртуальных перемещений может не иметь места.

Пусть материальная точка единичной массы движется вдоль оси Ox под действием силы $F(x) = \alpha x^\beta$ $(\alpha > 0;\ 0 < \beta < 1)$. Уравнение движения точки имеет вид

$$\ddot{x} = \alpha x^\beta. \tag{6}$$

Положение равновесия $x = 0$ допускается связями; условие (4) выполнено при всех t, так как в положении равновесия $F = 0$. Тем не менее точка, находясь при $t = 0$ в начале координат и имея при этом нулевую скорость, может не оставаться в нем при $t > 0$. Действительно, при начальных условиях $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ уравнение (6) помимо решения $x \equiv 0$ имеет еще одно решение вида

$$x(t) = at^b, \tag{7}$$

где

$$a = \left[\frac{\alpha(1-\beta)^2}{2(1+\beta)}\right]^{\frac{1}{1-\beta}}, \quad b = \frac{2}{1-\beta}.$$

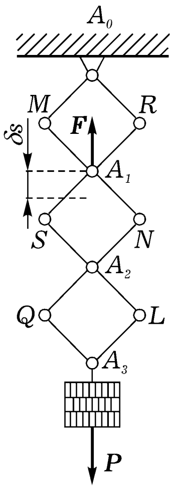

Рис. 58

Отметим еще, что, так как $b > 2$, для решения (7) $\ddot{x}(0) = 0$. Это указывает на то, что, если даже ускорение точки в положении равновесия равно нулю, все равно точка может не находиться в равновесии при $t > 0$, хотя и выполнены условия (3) и (4). Игнорирование этого обстоятельства привело к тому, что во многих учебниках и научно-методических статьях доказательство достаточности принципа виртуальных перемещений либо неполно, либо ошибочно[1].

Пример 1. *На рис. 58 изображен механизм, состоящий из стержней, образующих три одинаковых параллелограмма. Стержни MN, RS, SL и NQ — цельные, соединенные в точках пересечения шарнирами. Положим, что точки A_0 и A_1 соединены нитью; требуется определить ее натяжение.*

Мысленно перережем нить и заменим ее действие приложенной к точке A_1 силой $\boldsymbol{F}$. Пусть шарнир A_1 сдвинется вниз и δs — его виртуальное перемещение. Ввиду цельности стержней MN, RS, SL и NQ при виртуальном перемещении диагонали всех параллелограммов удлинятся на одну и ту же величину. Вследствие этого точка A_2 сместится вниз уже на $2\delta s$, а A_3 — на $3\delta s$.

Приравняв нулю сумму работ силы $\boldsymbol{F}$ и веса $\boldsymbol{P}$ на виртуальном перемещении, получим равенство

$$3P\delta s - F\delta s = 0.$$

[1] Довольно обширную библиографию по этому вопросу см., например, в работах: Геронимус Я. Л. О принципе виртуальных перемещений // Бюллетень Ясского Политехн. ин-та, 1963, Т. 9(13), вып. 3–4, С. 251–262; Блюмин Г. Д. О принципе виртуальных перемещений // Изв. АН СССР. МТТ, 1982, №6, С. 22–28.

Отсюда, ввиду того, что $\delta s \neq 0$, следует равенство

$$F = 3P.$$

Пример 2 (Закон Паскаля). *Закон Паскаля описывает характер распространения давления в несжимаемой жидкости: давление на поверхность жидкости, произведенное внешними для жидкости силами, передается ею равномерно во все стороны.*

Чтобы проиллюстрировать закон Паскаля, рассмотрим сосуд, целиком заполненный несжимаемой жидкостью; в сосуде имеются три отверстия, закрытые подвижными поршнями 1, 2 *и* 3 (рис. 59). *Пусть S_i — площадь i-го поршня, а δl_i, — его виртуальное перемещение* ($i = 1, 2, 3$).

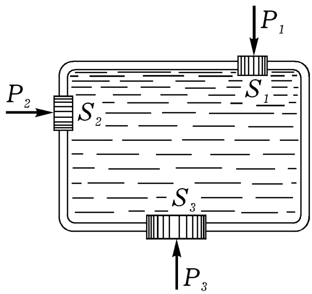

Рис. 59

Закрепим мысленно поршень 3, *тогда будут двигаться поршни* 1 *и* 2. *Определенное движение поршня* 1 *вызовет определенное движение поршня* 2. *Объем жидкости, вдавленной первым поршнем, равен $S_1 \delta l_1$; объем жидкости, вошедшей в трубку второго поршня, равен $S_2 \delta l_2$. Из условия несжимаемости жидкости имеем $S_1 \delta l_1 = S_2 \delta l_2$.*

Составим сумму работ сил $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{P}_2$ на рассмотренном виртуальном перемещении:

$$P_1 \delta l_1 - P_2 \delta l_2 = 0, \quad P_1 \delta l_1 - P_2 \frac{S_1}{S_2} \delta l_1 = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{P_1}{S_1} = \frac{P_2}{S_2}.$$

Аналогично, мысленно закрепляя поршень 2, *можно получить, что*

$$\frac{P_1}{S_1} = \frac{P_3}{S_3},$$

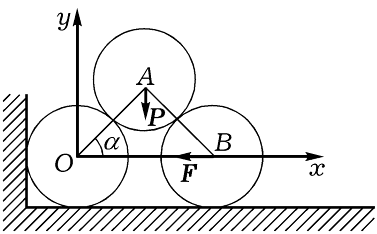

Рис. 60

т. е. давление на жидкость передается равномерно во все стороны.

Пример 3. *У стены здания положены три одинаковые трубы, как показано на рис.* 60. *Какую горизонтальную силу $\boldsymbol{F}$ нужно приложить к оси правой трубы, чтобы удержать трубы в равновесии, если вес каждой трубы равен P?*

Если правой нижней трубе сообщить виртуальное перемещение вдоль оси Ox, то работу совершат только две указанные на рис. 60 *силы:* $\boldsymbol{P}$ *и* $\boldsymbol{F}$. *Радиусы-векторы* $\boldsymbol{r}_A$ *и* $\boldsymbol{r}_B$ *точек их приложения в системе координат* Oxy *задаются равенствами* (a *— радиус сечения труб*)

$$\boldsymbol{r}'_A = (2a\cos\alpha,\ 2a\sin\alpha), \qquad \boldsymbol{r}'_B = (4a\cos\alpha,\ 0).$$

На указанном виртуальном перемещении угол α *получает приращение* $\delta\alpha$. *Поэтому*

$$\delta r'_A = 2a\,\delta\alpha(-\sin\alpha,\ \cos\alpha), \qquad \delta r'_B = 4a\,\delta\alpha(-\sin\alpha,\ 0).$$

Приравняв нулю сумму работ сил $\boldsymbol{P}$ *и* $\boldsymbol{F}$ *на виртуальном перемещении, получим равенство*

$$\boldsymbol{P}\cdot\delta\boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{r}_B = 0,$$

которое с учетом того, что

$$\boldsymbol{P}' = (0,\ -P), \quad \boldsymbol{F}' = (-F,\ 0),$$

можно записать в виде

$$-P\cdot 2a\cos\alpha\cdot\delta\alpha + F\cdot 4a\sin\alpha\cdot\delta\alpha = 0.$$

Отсюда при $\delta\alpha \neq 0$ *получаем*

$$F = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\alpha P.$$

63. Общее уравнение статики в обобщенных координатах. Пусть $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_m$ — обобщенные координаты системы, а $Q_j(\boldsymbol{q},\ \dot{\boldsymbol{q}},\ t)$ — соответствующие им обобщенные силы. Уравнение (4) в обобщенных координатах запишется в виде

$$\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{F}_\nu\cdot\delta\boldsymbol{r}_\nu = \sum_{j=1}^{m} Q_j(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{0},\ t)\delta q_j = 0. \tag{8}$$

Если система голономна, то число ее обобщенных координат m совпадает с числом степеней свободы n и величины δq_j в (8) независимы. Приравнивая нулю коэффициенты при δq_j в уравнении (8), получаем, что в положении равновесия системы $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_0$ (и только в нем) обобщенные силы равны нулю:

$$Q_i = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{9}$$

Равенства (9) образуют систему n уравнений относительно неизвестных q_{10}, q_{20}, ..., q_{n0}, задающих положение равновесия системы.

Если все активные силы потенциальны, то, согласно п. 54, из (9) получаем

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{10}$$

где П — потенциальная энергия системы. Отсюда следует, что необходимые и достаточные условия равновесия голономной системы (с идеальными удерживающими связями, в потенциальном поле сил) совпадают с необходимыми условиями экстремума потенциальной энергии в рассматриваемом положении равновесия системы.

В частности, если система движется в однородном поле тяжести, то условия (10) примут вид $\partial z_C/\partial q_i = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, где z_C — координата центра тяжести рассматриваемой системы в неподвижной системе координат с вертикальной осью Oz, т. е. для тяжелой системы необходимые и достаточные условия равновесия совпадают с необходимыми условиями экстремальности высоты ее центра тяжести над горизонтальной плоскостью.

Если система неголономна, то величины δq_j, в (8) не будут независимы; они связаны s уравнениями (28) п. 16. Среди m величин δq_j независимыми будут только n $(n = m - s)$ из них. Пусть для определенности это будут величины δq_1, δq_2, ..., δq_n. Разрешив уравнения (28) п. 16 относительно δq_{n+1}, δq_{n+2}, ..., δq_m, получим

$$\delta q_{n+k} = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{kl}\delta q_l \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m - n = s), \tag{11}$$

где величины α_{kl} являются функциями коэффициентов $b_{\beta j}$, входящих в уравнения (28) п. 16. Уравнение (8) после подстановки в него выражений (11) и приведения подобных членов примет вид

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i'\delta q_i = 0, \tag{12}$$

где

$$Q_i' = Q_i + \sum_{p=1}^{m-n} \alpha_{pi} Q_{n+p} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{13}$$

Так как величины δq_i независимы, то из (12) следует, что

$$Q_i' = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{14}$$

Равенства (14) представляют собой систему n уравнений относительно m неизвестных $q_{10},$, q_{20}, $\ldots$, q_{m0}, определяющих положение равновесия системы. Так как число неизвестных превышает число уравнений, то в общем случае имеем многообразие состояний равновесия, размерность которого не меньше числа s неголономных связей.

Отметим, что из (13) и (14) следует, что для неголономной системы в потенциальном поле сил некоторые или даже все частные производные потенциальной энергии в положении равновесия могут быть отличными от нуля.

Пример 1. *Пусть несвободная материальная точка с неинтегрируемой связью*

$$\dot{q}_3 = q_1\dot{q}_2$$

движется в силовом поле с потенциалом вида

$$\Pi = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2).$$

Тогда $m = 3$, $s = 1$, $n = 2$; $\alpha_{11} = 0$, $\alpha_{12} = q_1$; $Q_i = -q_i$ $(i = 1, 2, 3)$; $Q_1' = -q_1$, $Q_2' = -q_2 - q_1q_3$. *Условия равновесия* (14) *запишутся в виде двух уравнений с тремя неизвестными:*

$$q_1 = 0, \quad q_2 + q_1q_3 = 0.$$

Отсюда следует, что положения равновесия образуют одномерное многообразие

$$q_1 = 0, \quad q_2 = 0, \quad q_3 = q_{30},$$

где q_{30} *— произвольное число.*

Если $q_{30} \neq 0$, *то в положении равновесия производная* $\partial\Pi/\partial q_3$ *отлична от нуля.*

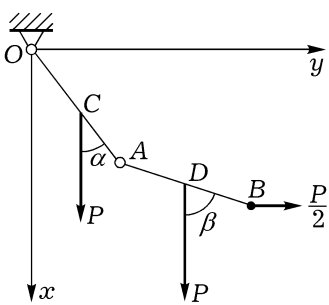

Рис. 61

Пример 2. *Два одинаковых стержня* OA *и* AB *весом* P *и длиной* $2a$ *скреплены шарниром* A. *Конец* O *стержня* OA *закреплен в неподвижном шарнире, а к концу* B *стержня* AB *приложена горизонтальная сила* $P/2$. *Оба стержня расположены в вертикальной плоскости. Требуется найти углы* α *и* β *при равновесии системы* (рис. 61).

Система имеет две степени свободы и является голономной. За обобщенные координаты примем углы α *и* β. *Найдем обобщенные силы* Q_α *и* Q_β, *отвечающие этим обобщенным координатам. В плоскости* *стержней возьмем систему координат Oxy, ось Ox которой направим вертикально вниз. Для активных сил $\boldsymbol{F}_C$, $\boldsymbol{F}_D$, $\boldsymbol{F}_B$ и радиусов-векторов $\boldsymbol{r}_C$, $\boldsymbol{r}_D$, $\boldsymbol{r}_B$ точек их приложения имеем*

$$\boldsymbol{F}'_C = (P,\ 0),\ \boldsymbol{F}'_D = (P,\ 0),\ \boldsymbol{F}'_B = \left(0,\ \frac{P}{2}\right);$$

$$\boldsymbol{r}'_C = a(\cos\alpha,\ \sin\alpha), \quad \boldsymbol{r}'_D = a(2\cos\alpha + \cos\beta,\ 2\sin\alpha + \sin\beta),$$
$$\boldsymbol{r}'_B = 2a(\cos\alpha + \cos\beta,\ \sin\alpha + \sin\beta).$$

Вычислим элементарную работу активных сил на виртуальном перемещении системы, отвечающем вариациям $\delta\alpha$ и $\delta\beta$ обобщенных координат. Так как

$$\begin{aligned}
\delta\boldsymbol{r}'_C &= a\delta\alpha(-\sin\alpha,\ \cos\alpha),\\
\delta\boldsymbol{r}'_D &= a(-2\sin\alpha\cdot\delta\alpha - \sin\beta\cdot\delta\beta,\ 2\cos\alpha\cdot\delta\alpha + \cos\beta\cdot\delta\beta),\\
\delta\boldsymbol{r}'_B &= 2a(-\sin\alpha\cdot\delta\alpha - \sin\beta\cdot\delta\beta,\ \cos\alpha\cdot\delta\alpha + \cos\beta\cdot\delta\beta),
\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}
\delta A &= \boldsymbol{F}_C\cdot\delta\boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{F}_D\cdot\delta\boldsymbol{r}_D + \boldsymbol{F}_B\cdot\delta\boldsymbol{r}_B =\\
&= Pa[(\cos\alpha - 3\sin\alpha)\delta\alpha + (\cos\beta - \sin\beta)\delta\beta].
\end{aligned}$$

Поэтому

$$Q_\alpha = Pa(\cos\alpha - 3\sin\alpha), \quad Q_\beta = Pa(\cos\beta - \sin\beta).$$

Из условий (9) *получаем теперь, что при равновесии системы*

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}, \qquad \operatorname{tg}\beta = 1.$$

Пример 3. *Тяжелое колечко надето на прут, которому придана форма кривой, определяемой уравнениями*

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1, \quad \frac{x}{6} + \frac{y}{3} + z = 1,$$

где ось Oz направлена вертикально вверх. Найдем положения равновесия колечка.

Пусть виртуальное перемещение колечка задается величинами δx, δy, δz. Продифференцировав уравнения, задающие форму прута, получим, что на виртуальном перемещении должны выполняться условия

$$x\,\delta x + 4y\,\delta y + 36z\,\delta z = 0, \quad \delta x + 2\,\delta y + 6\,\delta z = 0.$$

Для положения равновесия элементарная работа $P\delta z$ (P — вес колечка) силы тяжести должна равняться нулю. Поэтому $\delta z = 0$, и предыдущие два уравнения запишутся в виде

$$x\,\delta x + 4y\,\delta y = 0, \quad \delta x + 2\,\delta y = 0$$

или, после исключения δy,

$$(x - 2y)\,\delta x = 0.$$

Это условие должно выполняться при любых δx, следовательно,

$$x = 2y.$$

Принимая во внимание уравнения кривой, по которой изогнут прут, получим два решения:

$$1)\ x = 4,\ y = 2,\ z = -\frac{1}{3};$$
$$2)\ x = 0,\ y = 0,\ z = 1.$$

Пример 4. *Однородный стержень AD опирается концом A на вертикальную стену, а в некоторой другой точке — на ребро B* (рис. 62). *Длина стержня $2a$, расстояние точки B от стены b. Найти угол α при равновесии стержня.*

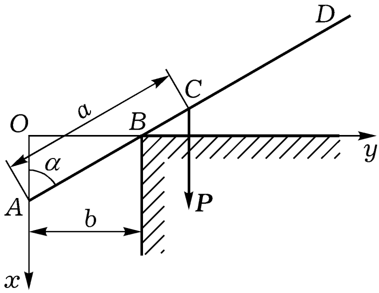

Рис. 62

Рассматриваемая система голономна и имеет одну степень свободы. Примем угол α за обобщенную координату. Потенциальная энергия $\Pi = -Px_C$, где x_C — абсцисса центра тяжести стержня:

$$x_C = b\,\mathrm{ctg}\,\alpha - a\cos\alpha.$$

Условие равновесия $\partial\Pi/\partial\alpha = 0$ дает уравнение для α:

$$-\frac{b}{\sin^2\alpha} + a\sin\alpha = 0,$$

откуда

$$\sin\alpha = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}.$$

Равновесие стержня возможно только в том случае, когда $b \leqslant a$.

64. Эквивалентные системы сил. Рассмотрим совокупность сил $(\boldsymbol{F}_1,\ \boldsymbol{F}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{F}_k)$, приложенную к некоторой механической системе. Допустим, что эта совокупность сил в данной механической системе заменена на совокупность сил $(\boldsymbol{F}_1^*,\ \boldsymbol{F}_2^*,\ \ldots,\ \boldsymbol{F}_l^*)$. При этом количество, точки приложения, величины и направления сил в первой и второй системах могут быть различными. Движения механической системы под действием первой и второй систем сил при одинаковых начальных положениях точек системы и одинаковых их начальных скоростях могут быть одинаковыми, а могут отличаться.

Если две системы сил могут быть заменены одна другой без изменения движения (или состояния покоя) механической системы, то такие системы сил будем называть *эквивалентными.*

В частности, если добавление или отбрасывание некоторой системы сил не изменяет движение механической системы, то говорят, что эта система сил является *уравновешенной* или *эквивалентной нулю.*

Эквивалентность систем сил обозначается символом $\sim$: если две системы $(\boldsymbol{F}_1,\ \boldsymbol{F}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{F}_k)$ и $(\boldsymbol{F}_1^*,\ \boldsymbol{F}_2^*,\ \ldots,\ \boldsymbol{F}_l^*)$ эквивалентны, то пишут $(\boldsymbol{F}_1,\ \boldsymbol{F}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{F}_k) \sim (\boldsymbol{F}_1^*,\ \boldsymbol{F}_2^*,\ \ldots,\ \boldsymbol{F}_l^*)$.

Из общего уравнения динамики следует (см. замечание 1 в п. 57), что *две системы сил эквивалентны тогда и только тогда, когда они совершают одинаковую работу на любых* (*одних и тех же для обеих систем сил*) *виртуальных перемещениях механической системы.*

Выразим этот критерий эквивалентности через обобщенные силы. Пусть Q_j и Q_j^* $(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ — обобщенные силы, отвечающие первой и второй системам сил соответственно, а δA и δA^* — элементарные работы этих систем на виртуальных перемещениях $\delta q_1,\ \delta q_2,\ \ldots,\ \delta q_m$. Составим разность

$$\delta A - \delta A^* = \sum_{j=1}^{m}(Q_j - Q_j^*)\delta q_j. \tag{15}$$

Для голономной системы величины δq_j независимы. Поэтому, приравняв нулю левую часть формулы (15), получим, что системы сил, приложенные к голономной системе, эквивалентны тогда и только тогда, когда их обобщенные силы совпадают при каком-либо выборе обобщенных координат.

В случае неголономной системы величины δq_j, зависимы. Подставив в этом случае величины (11) в (15), приведя подобные члены и приравняв результат нулю, получим, что в случае неголономной системы для эквивалентности двух систем сил необходимо и достаточно, чтобы при каком-то выборе обобщенных координат совпадали величины Q'_i и ${Q'}_i^*$, вычисленные для обеих систем сил по формулам (13).

Пример 1. *Материальная точка $P(x,y)$ движется в плоскости и имеет скорость, постоянно направленную на движущуюся точку $P_0(x_0(t),\, y_0(t))$. Уравнение связи имеет вид*

$$\dot{y} = \frac{y - y_0(t)}{x - x_0(t)}\dot{x}. \tag{16}$$

При непостоянных x_0, y_0 это — дифференциальная неинтегрируемая связь. Следовательно, $m = 2$, $s = 1$, $n = 1$.

Пусть к точке P приложена сила $\boldsymbol{F}(y_0(t) - y,\ -x_0(t) + x)$. Ей отвечают такие обобщенные силы ($q_1 = x$, $q_2 = y$):

$$Q_1 = y_0(t) - q_2, \qquad Q_2 = -x_0(t) + q_1.$$

Из уравнения связи (16) следует, что

$$\alpha_{11} = \frac{q_2 - y_0(t)}{q_1 - x_0(t)}.$$

Поэтому из формулы (13) имеем $Q_1' = 0$.

Если вместо силы $\boldsymbol{F}$ к точке P приложена сила $\boldsymbol{F}^* = k\boldsymbol{F}$ ($k \neq 1$), то аналогично получим ${Q'}_1^* = 0$. Поэтому силы $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{F}^*$ в рассматриваемой неголономной системе эквивалентны.

Если бы связь (16) отсутствовала, то имел бы место случай голономной системы, а силы $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{F}^*$ не были бы эквивалентны.

§ 2. Статика твердого тела

65. Необходимые и достаточные условия равновесия твердого тела. Пусть к твердому телу приложена система внешних сил с главным вектором $\boldsymbol{R}^{(e)}$ и главным моментом $\boldsymbol{M}_O^{(e)}$ относительно произвольно выбранного полюса. Считая твердое тело свободным, получим необходимые и достаточные условия его равновесия. Если тело несвободно, то его можно рассматривать как свободное, мысленно отбросив связи и заменив их действие на тело реакциями (п. 45). В этом случае реакции связей, которые обычно являются неизвестными, войдут в выражения для $\boldsymbol{R}^{(e)}$ и $\boldsymbol{M}_O^{(e)}$.

К свободному твердому телу, как к системе с идеальными связями, применим принцип виртуальных перемещений, дающий необходимые и достаточные условия равновесия системы с идеальными удерживающими связями. Поэтому наша задача состоит только в том, чтобы выразить общее уравнение статики (4) п. 62 через главный вектор и главный момент сил, приложенных к конкретной системе — твердому телу.