Пример 1. *Материальная точка $P(x, y)$ движется в плоскости и имеет скорость, постоянно направленную на движущуюся точку $P_0(x_0(t), y_0(t))$. Уравнение связи имеет вид*

$$\dot{y} = \frac{y - y_0(t)}{x - x_0(t)}\dot{x}. \tag{16}$$

При непостоянных x_0, y_0 это — дифференциальная неинтегрируемая связь. Следовательно, $m = 2$, $s = 1$, $n = 1$.

Пусть к точке P приложена сила $\boldsymbol{F}(y_0(t) - y, \ -x_0(t) + x)$. Ей отвечают такие обобщенные силы $(q_1 = x, \ q_2 = y)$:

$$Q_1 = y_0(t) - q_2, \qquad Q_2 = -x_0(t) + q_1.$$

Из уравнения связи (16) следует, что

$$\alpha_{11} = \frac{q_2 - y_0(t)}{q_1 - x_0(t)}.$$

Поэтому из формулы (13) имеем $Q'_1 = 0$.

Если вместо силы $\boldsymbol{F}$ к точке P приложена сила $\boldsymbol{F}^* = k\boldsymbol{F}$ $(k \neq 1)$, то аналогично получим $Q'^*_1 = 0$. Поэтому силы $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{F}^*$ в рассматриваемой неголономной системе эквивалентны.

Если бы связь (16) отсутствовала, то имел бы место случай голономной системы, а силы $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{F}^*$ не были бы эквивалентны.

§ 2. Статика твердого тела

65. Необходимые и достаточные условия равновесия твердого тела. Пусть к твердому телу приложена система внешних сил с главным вектором $\boldsymbol{R}^{(e)}$ и главным моментом $\boldsymbol{M}_O^{(e)}$ относительно произвольно выбранного полюса. Считая твердое тело свободным, получим необходимые и достаточные условия его равновесия. Если тело несвободно, то его можно рассматривать как свободное, мысленно отбросив связи и заменив их действие на тело реакциями (п. 45). В этом случае реакции связей, которые обычно являются неизвестными, войдут в выражения для $\boldsymbol{R}^{(e)}$ и $\boldsymbol{M}_O^{(e)}$.

К свободному твердому телу, как к системе с идеальными связями, применим принцип виртуальных перемещений, дающий необходимые и достаточные условия равновесия системы с идеальными удерживающими связями. Поэтому наша задача состоит только в том, чтобы выразить общее уравнение статики (4) п. 62 через главный вектор и главный момент сил, приложенных к конкретной системе — твердому телу.

Теорема. *Для равновесия твердого тела при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ необходимо и достаточно, чтобы в момент времени t_o тело покоилось, а главный вектор $\boldsymbol{R}^{(e)}$ и главный момент внешних сил $\boldsymbol{M}_O^{(e)}$ относительно произвольно выбранного полюса O при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ равнялись нулю:*

$$\boldsymbol{R}^{(e)} = 0, \quad \boldsymbol{M}_O^{(e)} = 0. \tag{1}$$

Доказательство.

Заметим, что, так как свободное твердое тело является склерономной системой, его произвольное действительное перемещение за время dt является виртуальным. Поэтому, воспользовавшись формулой (3) п. 52, можно элементарную работу сил, приложенных к твердому телу, на его виртуальном перемещении записать в виде

$$\delta A = \boldsymbol{R}^{(e)} \cdot \boldsymbol{v}_O \, dt + \boldsymbol{M}_O^{(e)} \cdot \boldsymbol{\omega} \, dt, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{v}_o$ — скорость полюса, а $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела в момент времени t $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$. Так как $\boldsymbol{v}_o$ и $\boldsymbol{\omega}$ — произвольные величины, то из общего уравнения статики $\delta A = 0$ следуют равенства (1). Теорема доказана.

Если $(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_k)$ — система внешних сил, приложенных к твердому телу, а x_i, y_i, z_i — координаты точек приложения силы $\boldsymbol{F}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ в декартовой прямоугольной системе координат с началом в полюсе O, то необходимые и достаточные условия равновесия твердого тела (1) запишутся в скалярной форме в виде следующих шести равенств:

$$\sum_{i=1}^{k} F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^{k} F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^{k} F_{iz} = 0, \tag{3}$$

$$\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{k} (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}) = 0, \\
\sum_{i=1}^{k} (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}) = 0, \\
\sum_{i=1}^{k} (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) = 0.
\end{gathered} \tag{4}$$

В частных случаях некоторые из шести равенств (3), (4) могут удовлетворяться тождественно.

Механическая система, у которой реакции всех наложенных связей могут быть определены из условий равновесия, получаемых в статике, называется *статически определимой*, в противном случае — *статически неопределимой*. Если рассматриваемое в данном пункте твердое тело несвободно, то равенства (3), (4) будут системой уравнений относительно проекций реакций связей. Случай статически определимой механической системы имеет место лишь тогда, когда число неизвестных проекций не превосходит числа не удовлетворяющихся тождественно уравнений системы (3), (4).

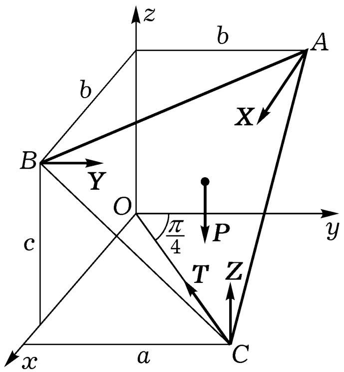

Рис. 63

Пример 1. *Однородная доска в форме равнобедренного треугольника ABC ($AC = BC$) весом P опирается вершинами на три координатные плоскости и привязана за точку C к точке O с помощью нити CO* (рис. 63). *Определим натяжение $\boldsymbol{T}$ нити и реакции $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{Z}$ в точках A, B, C. Даны расстояния a, b, c и угол $COy = \pi/4$.*

На доску действуют пять сил: сила тяжести, натяжение нити и реакции в точках A, B, C, причем последние, ввиду отсутствия трения, перпендикулярны соответствующим координатным плоскостям.

Из геометрических соображений нетрудно получить, что центр тяжести доски имеет координаты $\frac{a+b}{3}$, $\frac{a+b}{3}$, $\frac{2c}{3}$.

Необходимые и достаточные условия равновесия (3), (4) *запишутся в виде следующей* (*совместной*) *системы шести линейных уравнений относительно четырех неизвестных X, Y, Z, T*:

$$-T\frac{\sqrt{2}}{2} + X = 0, \quad -T\frac{\sqrt{2}}{2} + Y = 0, \quad Z - P = 0,$$

$$Za - Yc - \frac{1}{3}P(a+b) = 0, \quad -Za + Xc + \frac{1}{3}P(a+b) = 0, \quad Yb - Xb = 0.$$

Решив эту систему, получим, что

$$X = Y = \frac{2a-b}{3c}P, \qquad Z = P, \qquad T = \frac{\sqrt{2}(2a-b)}{3c}P.$$

66. Критерий эквивалентности систем сил, приложенных к твердому телу. Критерий эквивалентности систем сил, приложенных к произвольной механической системе с идеальными удерживающими связями, получен в п. 64. Здесь получим критерий эквивалентности для систем сил, приложенных к твердому телу.

Теорема. *Для того чтобы две системы сил, приложенных к твердому телу, были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы они имели одинаковые главные векторы и главные моменты относительно некоторого полюса.*

Доказательство.

Пусть система сил $(\boldsymbol{F}_1,\ \boldsymbol{F}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{F}_k)$ имеет главный вектор $\boldsymbol{R}^{(e)}$ и главный момент $\boldsymbol{M}_O^{(e)}$, а другая система сил $(\boldsymbol{F}_1^*,\ \boldsymbol{F}_2^*,\ \ldots,\ \boldsymbol{F}_l^*)$ — главный вектор $\boldsymbol{R}^{*(e)}$ и главный момент $\boldsymbol{M}_O^{*(e)}$ Используя формулу (2), составим разность элементарных работ этих систем сил на одинаковых виртуальных перемещениях тела:

$$\delta A - \delta A^* = (\boldsymbol{R}^{(e)} - \boldsymbol{R}^{*(e)}) \cdot \boldsymbol{v}_O\, dt + (\boldsymbol{M}_O^{(e)} - \boldsymbol{M}_O^{*(e)}) \cdot \boldsymbol{\omega}\, dt.$$

Согласно определению, для эквивалентности систем сил необходимо и достаточно, чтобы эта разность равнялась нулю. Отсюда, ввиду произвольности $\boldsymbol{v}_O$ и $\boldsymbol{\omega}$, следует, что $\boldsymbol{R}^{(e)} = \boldsymbol{R}^{*(e)}$ и $\boldsymbol{M}_O^{(e)} = \boldsymbol{M}_O^{*(e)}$.

Получим связь между главными моментами одной и той же системы сил, вычисленными относительно разных полюсов. Согласно рис. 64, имеем

$$\boldsymbol{M}_{O_1} = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{\rho}_i \times \boldsymbol{F}_i = \sum_{i=1}^{k} (\overline{O_1O} + \boldsymbol{r}_i) \times \boldsymbol{F}_i = \\ = \overline{O_1O} \times \left(\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{F}_i\right) + \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i,$$

или

$$\boldsymbol{M}_{O_1} = \boldsymbol{M}_O + \overline{O_1O} \times \boldsymbol{R}. \qquad (5)$$

Таким образом, *при изменении полюса главный момент сил меняется на величину, равную моменту главного вектора* (*приложенного в старом полюсе*) *относительно нового полюса.* Отсюда следует, что если у двух систем сил главные векторы одинаковы и одинаковы главные моменты относительно какого-либо полюса, то последние одинаковы и для любого полюса.

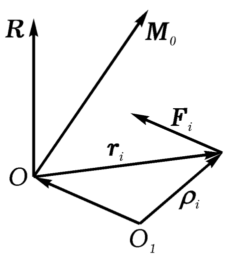

Рис. 64

Замечание 1. *При выполнении условий* (1) *система сил, приложенная к твердому телу, будет уравновешенной, или эквивалентной нулю. Это означает, что любое движение тела не изменится, если к приложенным к нему силам добавить или отбросить систему сил, удовлетворяющую равенствам* (1).

Пример 1. *По ребрам прямоугольного клина действуют силы* $\boldsymbol{F}_1$ *и* $\boldsymbol{F}_2$ (рис. 65)*, которые требуется заменить эквивалентными им силами* $\boldsymbol{F}_1^*$ *и* $\boldsymbol{F}_2^*$*. Величины сил* $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_1^*$ *пропорциональны длинам соответствующих ребер клина. Найти силу* $\boldsymbol{F}_2^*$*.*

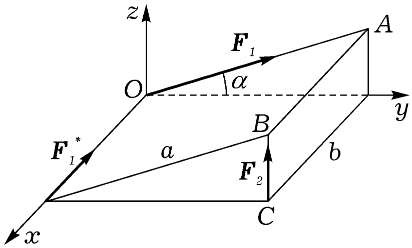

Рис. 65

Если a *и* b *— длины ребер* OA *и* AB *клина соответственно, а* f *— коэффициент пропорциональности* $(f > 0)$*, то*

$$F_1 = fa, \quad F_2 = fa\sin\alpha, \quad F_1^* = fb.$$

Введем систему координат $Oxyz$*, как показано на рис. 65. Главный вектор и главный момент системы сил* $(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2)$ *в этой системе координат имеют такие компоненты:*

$$R_x = 0, \quad R_y = fa\cos\alpha, \quad R_z = 2fa\sin\alpha,$$
$$M_x = fa^2\sin\alpha\cos\alpha, \quad M_y = -fab\sin\alpha, \quad M_z = 0.$$

Пусть F_{2x}^*, F_{2y}^*, F_{2z}^* *— компоненты искомой силы* $\boldsymbol{F}_2^*$*, а* x, y, z *— координаты точки ее приложения. Главный вектор и главный момент системы сил* $(\boldsymbol{F}_1^*, \boldsymbol{F}_2^*)$ *имеют компоненты, задаваемые равенствами*

$$R_x^* = -fb + F_{2x}^*, \quad R_y^* = F_{2y}^*, \quad R_z^* = F_{2z}^*,$$
$$M_x^* = yF_{2z}^* - zF_{2y}^*, \quad M_y^* = zF_{2x}^* - xF_{2z}^*, \quad M_z^* = xF_{2y}^* - yF_{2x}^*.$$

Система трех уравнений, вытекающая из равенства соответствующих компонент главных векторов эквивалентных систем сил $(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2)$ *и* $(\boldsymbol{F}_1^*, \boldsymbol{F}_2^*)$*, позволяет найти компоненты силы* $\boldsymbol{F}_2^*$*:*

$$F_{2x}^* = fb, \quad F_{2y}^* = fa\cos\alpha, \quad F_{2z}^* = 2fa\sin\alpha.$$

Эти равенства задают направление силы $\boldsymbol{F}_2^*$ *и ее модуль*

$$F_2^* = \sqrt{F_{2x}^{*2} + F_{2y}^{*2} + F_{2z}^{*2}} = \sqrt{F_1^2 + 3F_2^2 + F_1^{*2}}.$$

Приравняв соответствующие компоненты главных моментов обеих систем сил и произведя некоторые упрощения, придем к системе уравнений, определяющей координаты x, y, z *точки приложения силы* F_2^**:*

$$2y\sin\alpha - z\cos\alpha = a\sin\alpha\cos\alpha; \quad 2ax\sin\alpha - bz = ab\sin\alpha,$$
$$ax\cos\alpha - by = 0.$$

Эти уравнения определяют не одну точку приложения силы $\boldsymbol{F}_2^*$, а, как нетрудно проверить, целую прямую — линию действия этой силы:

$$\frac{2x-b}{b}=\frac{2y-a\cos\alpha}{a\cos\alpha}=\frac{z}{a\sin\alpha}.$$

Линия действия силы F_2^* проходит через вершину B клина и точку пересечения диагоналей его нижней грани.

67. О равнодействующей. Теорема Вариньона. Если система сил $(\boldsymbol{F}_1,\ \boldsymbol{F}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{F}_k)$, приложенная к твердому телу, эквивалентна одной силе $\boldsymbol{R}^*$, то эта сила называется *равнодействующей* данной системы сил.

Теорема. *Если система сил имеет равнодействующую, то эта равнодействующая $\boldsymbol{R}^*$ равна главному вектору $\boldsymbol{R}$, а ее момент относительно произвольного полюса O равен главному моменту $\boldsymbol{M}_O$ данной системы сил относительно этого полюса.*

Доказательство следует из определения равнодействующей и критерия эквивалентности двух систем сил, приложенных к твердому телу. Вторая часть приведенной теоремы носит название *теоремы Вариньона.*

68. Частные случаи условий равновесия твердого тела.

1. Из условий (1) следует, что под действием одной, не равной нулю, силы твердое тело не может находиться в равновесии (хотя бы потому, что $\boldsymbol{R}^{(e)} \neq 0$).

2. Под действием двух сил твердое тело при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ находится в состоянии равновесия тогда и только тогда, когда оно покоится в начальный момент $t = t_0$, а силы при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, во-первых, равны по величине и противоположно направлены, а во-вторых, имеют общую линию действия. Первое требование вытекает из условия $\boldsymbol{R}^{(e)} = 0$, второе — из условия $\boldsymbol{M}_O^{(e)} = 0$.

3. Если под действием трех сил $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$ твердое тело находится в равновесии и линии действия двух сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ пересекаются, то все три силы лежат в одной плоскости и их линии действия пересекаются в одной точке. Это утверждение (которое часто называют *теоремой о трех силах)* сразу вытекает из условий (1) равновесия твердого тела. В самом деле, из условия $\boldsymbol{R}^{(e)} = 0$ следует, что $\boldsymbol{F}_3 = -(\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2)$, и поэтому сила $\boldsymbol{F}_3$ лежит в плоскости сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$. Замечая теперь, что моменты сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ относительно точки O пересечения линий их действия равны нулю, из условия $\boldsymbol{M}_O^{(e)} = 0$ получаем, что линия действия силы $\boldsymbol{F}_3$ проходит через точку O.

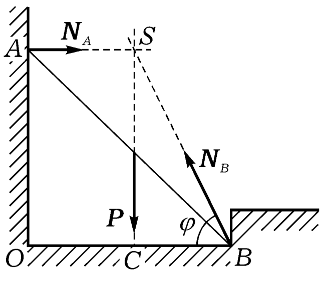

Рис. 66

Пример 1. *Однородный стержень AB длины $2l$ опирается одним концом на гладкую вертикальную стенку, а другим концом упирается в угол B, расстояние $OB = a$* (рис. 66). *Требуется найти направление реакции в точке B при равновесии стержня.*

Реакция в точке A ортогональна стенке, ее линия действия пересекает линяю действия силы тяжести P в точке S. При равновесии третья сила — реакция в точке B — также проходит через точку S. Из $\triangle BCS$ находим

$$\operatorname{tg}\varphi = 2\frac{\sqrt{4l^2 - a^2}}{a}.$$

Замечание 2. *Очевидно, что при переносе вектора какой-либо силы системы вдоль линии его действия главный вектор системы сил и ее главный момент относительно заданного полюса остаются неизменными. Поэтому из критерия эквивалентности системы сил, приложенных к твердому телу, следует, что, не нарушая движения тела* (*и, в частности, его состояния равновесия*), *можно перенести точку приложения силы в произвольную точку тела, лежащую на линии действия этой силы, т. е. сила, приложенная к твердому телу, — скользящий вектор.*

4. *Системой сходящихся сил* называется система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке.

Теорема. *Система сходящихся сил имеет равнодействующую, и эта равнодействующая проходит через точку пересечения их линий действия.*

Доказательство следует из предыдущего замечания и закона сложения сил (п. 44). Пусть O — точка пересечения линий действия сил системы[1]. Тогда $\boldsymbol{M}_O^{(e)} = 0$ и условия (1) сводятся к одному векторному равенству $\boldsymbol{R}^{(e)} = 0$, которое в скалярной форме запишется в виде трех равенств (3).

Пример 2. *Полушар весом P и радиусом r привязан за край нитью к точке A гладкой вертикальной стены и опирается на стену выпуклой поверхностью в точке B* (рис. 67). *Какова длина нити, если в положении равновесия плоскость лежащего в основании большого круга об-*

[1]Может оказаться, что точка O не принадлежит твердому телу. Однако это не меняет наших рассуждений, так как точку O можно считать принадлежащей твердому телу, мысленно представив ее лежащей на одном из концов невесомого стержня, который вторым своим концом жестко прикреплен к телу.

разует с вертикалью угол $\pi/4$? Каково натяжение нити и давление полушара на стену?

На полушар действуют три силы: сила тяжести $\boldsymbol{P}$, давление стены $\boldsymbol{N}$ и натяжение нити $\boldsymbol{T}$. Линии действия сил $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{N}$ пересекаются в точке S. Согласно теореме о трех силах, в положении равновесия линия действия силы $\boldsymbol{T}$ (т. е. направление нити) также должна проходить через точку S. Таким образом, полушар находится в равновесии под действием системы сходящихся сил.

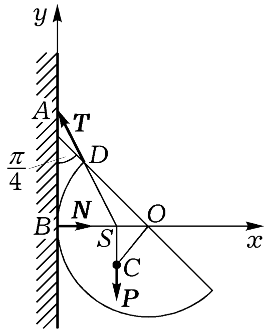

Рис. 67

В прямоугольном треугольнике OSC $\angle SOC = \pi/4$ и, так как центр тяжести C полушара отстоит от центра O окружности большого круга на расстоянии $OC = 3r/8$, $OS = OC\cos(\pi/4) = 3\sqrt{2}r/16$.

Обозначим α угол между направлением нити и вертикалью. В $\triangle ODS$ $\angle DOS = \pi/4$, $\angle OSD = \pi/2 + \alpha$, $\angle ODS = \pi/4 - \alpha$, поэтому

$$\frac{SD}{\sin(\pi/4)} = \frac{OD}{\sin(\pi/2+\alpha)} = \frac{OS}{\sin(\pi/4-\alpha)},$$

или

$$\sqrt{2}SD = \frac{r}{\cos\alpha} = \frac{3r}{8(\cos\alpha - \sin\alpha)}.$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{8}\left(\sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{89}},\ \cos\alpha = \frac{8}{\sqrt{89}}\right), \qquad SD = \frac{\sqrt{178}}{16}r.$$

Из $\triangle ABS$ теперь находим длину нити

$$AD = \frac{\sqrt{89}}{10}(2-\sqrt{2})r.$$

Приравняв нулю суммы проекций сил $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{T}$ на оси системы координат Bxy, получим два уравнения, определяющих натяжение нити и давление полушара на стену:

$$T\cos\alpha = P, \qquad T\sin\alpha = N,$$

откуда найдем

$$T = \frac{\sqrt{89}}{8}P, \qquad N = \frac{5}{8}P.$$

Пример 3. *Три стержня AO, BO и CO прикреплены к вертикальной стене шарнирами и скреплены шарниром в точке O, к которой прикреплен груз весом P. Стержни AO и BO расположены в горизонтальной плоскости и образуют со стеной углы по $60°$. Третий стержень CO расположен в вертикальной плоскости, проходящей через O и середину AB, и образует со стеной угол $30°$. Определить усилия в стержнях AO, BO и CO. Весом самих стержней пренебречь.*

Для определения искомых величин рассмотрим равновесие точки (узла) O. На узел O действуют активная сила $\boldsymbol{P}$ и реакции $\boldsymbol{S}_A$, $\boldsymbol{S}_B$ и $\boldsymbol{S}_C$ стержней, образующие систему сходящихся сил, не лежащих в одной плоскости.

Условия равновесия запишем в виде равенств (3), выбрав систему координат, как показано на рис. 68. Имеем

$$\sum F_{ix} = S_A \cos 60° - S_B \cos 60° = 0,$$
$$\sum F_{iy} = -S_A \sin 60° - S_B \sin 60° - S_C \sin 30° = 0,$$
$$\sum F_{iz} = -S_C \cos 30° - P = 0.$$

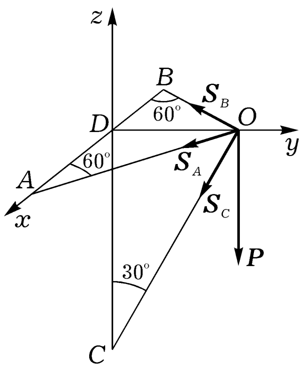

Рис. 68

Решив полученную систему уравнений, найдем

$$S_A = S_B = \tfrac{1}{3}P, \qquad S_C = -\frac{2\sqrt{3}}{3}P.$$

Величины S_A и S_B положительны, следовательно, реакции $\boldsymbol{S}_A$ и $\boldsymbol{S}_B$ направлены так, как показано на рис. 68 (стержни OA и OB растянуты), величина S_C отрицательна (стержень OC сжат).

5. Рассмотрим теперь равновесие твердого тела, к которому приложена плоская система сил, т. е. система сил, линии действия которых лежат в одной плоскости. Пусть этой плоскостью будет плоскость Oxy. Тогда проекции F_{iz} сил на ось Oz и координаты z_i, точек их приложения ($i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k$) равны нулю и условия (3), (4) сводятся к трем равенствам

$$\sum_{i=1}^{k} F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^{k} F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^{k} (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) = 0. \tag{6}$$

Таким образом, *для равновесия свободного твердого тела при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ под действием плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы в момент $t = t_0$ тело покоилось, а суммы проекций сил* *на две координатные оси и сумма моментов сил относительно третьей оси при* $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ *равнялись нулю.*

Упражнение 1. *Показать, что условия равновесия твердого тела под действием плоской системы сил могут быть представлены и следующих, эквивалентных условию* (6), *формулировках:* а) *суммы моментов сил относительно каждой из трех произвольных, не лежащих на одной прямой, точек равны нулю* (*теорема о трех моментах*); б) *суммы моментов сил относительно каждой из двух произвольных точек и сумма проекций сил на произвольную ось, не перпендикулярную прямой, проходящей через эти точки, равны нулю.*

Пример 4. *Однородный стержень, изогнутый под прямым углом, имеющий оба колена одинаковой длины* $2l$, *опирается на край стола длины* $AB = a = 2l/5$. *Найти положение равновесия и давления* N_A *и* N_B *на края стола. Трением пренебречь.*

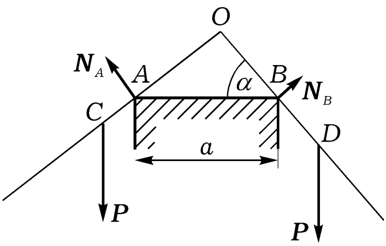

Рис. 69

Пусть положение равновесия определяется величиной α *угла* OBA (*рис.* 69). *Стержень находится в равновесии под действием плоской системы четырех сил, показанных на рис.* 69; *реакции в точках* A *и* B *ортогональны соответствующим коленам стержня. Приравняв нулю суммы проекций сил на оси, направленные по* OC *и* OD, *получим*

$$N_A = 2P\sin\alpha, \qquad N_B = 2P\cos\alpha.$$

Условие равенства нулю суммы моментов сил относительно точки O *дает*

$$\frac{2}{5}lN_A\sin\alpha + Pl\cos\alpha = \frac{2}{5}lN_B\cos\alpha + Pl\sin\alpha,$$

или

$$\frac{4}{5}(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) = \sin\alpha - \cos\alpha.$$

Последнее уравнение имеет три решения. Для первого решения

$$\sin\alpha = \cos\alpha, \qquad \alpha_1 = \frac{\pi}{4}, \qquad N_A = N_B = \sqrt{2}P.$$

Для второго и третьего решений

$$\frac{4}{5}(\sin\alpha + \cos\alpha) = 1, \quad \alpha_2 = \alpha_* = \frac{1}{2}\arcsin\frac{9}{16}, \quad \alpha_3 = \frac{\pi}{2} - \alpha_*,$$

$$N_A = \frac{P}{2}\sqrt{\frac{16 \mp 5\sqrt{7}}{2}}, \qquad N_B = \frac{P}{2}\sqrt{\frac{16 \pm 5\sqrt{7}}{2}}.$$

В последних двух равенствах верхний и нижний знаки отвечают соответственно значениям $\alpha = \alpha_2$, $\alpha = \alpha_3$.

Пример 5. *Два одинаковых однородных стержня весом P каждый соединены шарниром B и прикреплены шарнирами A и C к неподвижной опоре так, что стержень AB горизонтален, а стержень BC образует с вертикалью угол α* (рис. 70). *Определить реакции шарниров.*

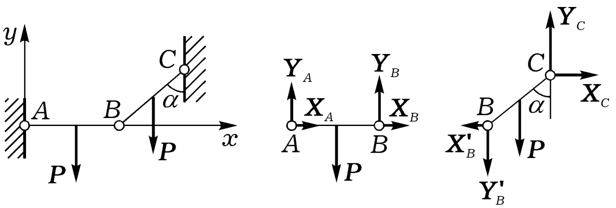

Рис. 70

Мысленно уберем шарнир B и рассмотрим равновесие каждого из стержней в отдельности. На каждый из стержней действуют сила тяжести и реакции шарниров, которые мы представляем их компонентами в системе координат Axy, показанной на рис. 70. *При этом, согласно третьему закону Ньютона, реакции* $\boldsymbol{X}'_B$, $\boldsymbol{Y}'_B$ *шарнира B, действующие на стержень BC, должны быть направлены противоположно реакциям* $\boldsymbol{X}_B$, $\boldsymbol{Y}_B$, *действующим на стержень AB. По величине же*

$$X'_B = X_B, \qquad Y'_B = Y_B.$$

Составим условия равновесия (6) *для каждого из стержней. Введя обозначение $AB = BC = 2a$, найдем для стержня AB*

$$\sum F_{ix} = X_A + X_B = 0, \qquad \sum F_{iy} = Y_A + Y_B - P = 0,$$
$$\sum m_{Az}(\boldsymbol{F}_i) = Y_B \cdot 2a - Pa = 0,$$

для стержня BC

$$\sum F_{ix} = -X_B + X_C = 0, \qquad \sum F_{iy} = -Y_B + Y_C - P = 0,$$
$$\sum m_{Bz}(\boldsymbol{F}_i) = -Pa\sin\alpha - X_C \cdot 2a\cos\alpha + Y_C \cdot 2a\sin\alpha = 0.$$

Из полученной системы шести уравнений с шестью неизвестными найдем

$$X_A = -X_B = -X_C = -P\operatorname{tg}\alpha, \quad Y_A = Y_B = \frac{1}{2}P, \quad Y_C = \frac{3}{2}P.$$

Направление реакции $\boldsymbol{X}_A$ *противоположно указанному на рисунке.*

69. Равнодействующая двух параллельных сил.

Теорема. *Две параллельные и одинаково направленные силы* $\boldsymbol{F}_1$ *и* $\boldsymbol{F}_2$ (рис. 71), *приложенные к твердому телу, имеют равнодействующую* $\boldsymbol{R}^* = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$*; эта равнодействующая лежит в плоскости сил* $\boldsymbol{F}_1$ *и* $\boldsymbol{F}_2$*, и ее линия действия делит отрезок, соединяющий точки* P_1 *и* P_2 *приложения сил, внутренним образом на части, обратно пропорциональные величинам* F_1 *и* F_2*. Две параллельные, не равные по величине и противоположно направленные силы* $\boldsymbol{F}_1$ *и* $\boldsymbol{F}_2$ *имеют равнодействующую* $\boldsymbol{R}^* = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$*; она направлена в сторону большей силы, лежит в плоскости сил* $\boldsymbol{F}_1$ *и* $\boldsymbol{F}_2$*, а линия ее действия делит отрезок* P_1P_2 *внешним образом на части, обратно пропорциональные величинам* F_1 *и* F_2*.*

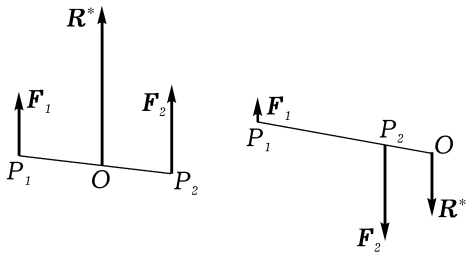

Рис. 71

Доказательство.

Если положить $\boldsymbol{R}^* = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$ и выбрать точку O так, что $F_1 \cdot OP_1 = F_2 \cdot OP_2$, то, согласно п. 66, система двух сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ будет эквивалентна системе, состоящей из одной силы $\boldsymbol{R}^*$ (т. е. $\boldsymbol{R}^*$ будет равнодействующей сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$). Действительно, обе системы сил имеют одинаковые главные векторы $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^* = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$ и одинаковые (равные нулю) главные моменты $\boldsymbol{M}_O$ относительно точки O.

70. Теория пар. Пусть параллельные силы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$, приложенные к твердому телу, равны по модулю и противоположно направлены ($\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2$). Такую систему сил называют *парой сил*. Плоскость, в которой лежат силы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$, называют *плоскостью пары*, а расстояние d между линиями действия сил — *плечом пары* ($d \neq 0$).

Главный момент сил, составляющих пару, не зависит от точки, относительно которой он вычисляется. В самом деле, возьмем произвольную точку O пространства (рис. 72) и найдем главный момент сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ относительно этой точки:

$$\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 = -\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 =$$
$$= (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \times \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{d} \times \boldsymbol{F}_2.$$

Отсюда видно, что величина $\boldsymbol{M}_O$ не зависит от точки O.

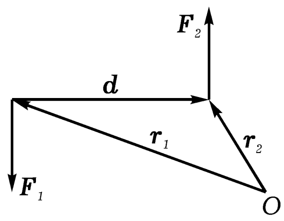

Рис. 72

Векторное произведение $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{d} \times \boldsymbol{F}_2$ называют *моментом пары*. Вектор $\boldsymbol{M}$ перпендикулярен плоскости пары и направлен так, что наблюдатель с конца вектора $\boldsymbol{M}$ «видит» векторы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ указывающими на вращение плоскости пары против часовой стрелки. Если F — модули сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$, то $M = dF$. Момент пары — это свободный вектор, и, как будет видно из последующих теорем этого пункта, он полностью определяет действие пары на твердое тело.

Теорема. *Пара сил не имеет равнодействующей.*

Доказательство.

Предположим противное, а именно предположим, что существует сила $\boldsymbol{R}^*$ такая, что $(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2) \sim \boldsymbol{R}^*$. Возьмем произвольную точку O на линии действия силы $\boldsymbol{R}^*$. Согласно критерию эквивалентности систем сил, приложенных к твердому телу (п. 66), главный момент $\boldsymbol{M}_O$ системы сил $(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2)$ относительно точки O должен равняться моменту силы $\boldsymbol{R}^*$ относительно той же точки, т. е. должен быть равен нулю. Но момент $\boldsymbol{M}_O$ равен моменту пары и, следовательно, отличен от нуля. Противоречие доказывает теорему.

Теорема. *Пары сил с равными моментами эквивалентны.*

Эта теорема сразу следует из теоремы п. 66 об эквивалентности систем сил, приложенных к твердому телу, так как у двух пар главные векторы равны (каждый из них равен нулю), а главные моменты (т. е. моменты пар) равны по условию.

Следствие 1. *Пару сил, приложенную к твердому телу, можно заменить другой парой в той же плоскости, если при такой замене не изменяется величина момента пары и его направление.*

Следствие 2. *Пару сил, приложенную к твердому телу, можно переносить в плоскость, параллельную плоскости пары.*

Теорема. *Совокупность нескольких пар с моментами $\boldsymbol{M}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ эквивалентна одной паре, момент $\boldsymbol{M}$ которой равен сумме моментов данных пар:*

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 + \ldots + \boldsymbol{M}_n. \tag{7}$$

Эта теорема также является следствием теоремы п. 66 об эквивалентности систем сил, приложенных к твердому телу.

Так как для системы пар $\boldsymbol{R}^{(e)} = 0$, то условия (1) равновесия твердого тела сводятся к одному векторному равенству $\boldsymbol{M} = 0$, которое на основании формулы (7) запишется в виде трех скалярных равенств

$$\sum_{i=1}^{n} M_{ix} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} M_{iy} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} M_{iz} = 0. \tag{8}$$

Если все пары лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях, то условия равновесия запишутся в виде одного скалярного равенства. Например, если плоскости пар перпендикулярны оси Oz, то условием равновесия будет последнее из равенств (8).

Пример 1. *К граням многогранника приложены пары сил, моменты которых пропорциональны площадям соответствующих граней и направлены перпендикулярно соответствующим граням внутрь многогранника. Показать, что такая система сил является уравновешенной.*

Пусть S — площадь какой-либо грани, а M — модуль момента соответствующей пары. Тогда $M = kS$, где k — коэффициент пропорциональности ($k > 0$), одинаковый для всех граней.

Пару, приложенную к рассматриваемой грани, можно заменить эквивалентной системой сил, действующих по каждой из сторон грани в направлении движения часовой стрелки, если смотреть со стороны внешней нормали. Модуль каждой из этих сил равен $1/2ka$, где a — длина соответствующей стороны грани.

Если такую процедуру проделать для всех пар, приложенных к граням многогранника, то вдоль каждого ребра многогранника будут действовать две равные по модулю, но противоположно направленные силы. Следовательно, приложенная к многограннику система пар сил является уравновешенной.

71. Теорема Пуансо. В предыдущих пунктах были рассмотрены задачи о приведении системы сил, приложенных к твердому телу, в частных случаях системы сходящихся сил, параллельных сил и пар. Теперь рассмотрим задачу о приведении сил в самом общем случае.

Теорема (Пуансо). *Произвольная система сил, приложенных к твердому телу, эквивалентна системе, состоящей из одной силы, приложенной в какой-либо точке O тела (центре приведения) и равной главному вектору $\boldsymbol{R}$ данной системы сил, и одной пары, момент которой равен главному моменту $\boldsymbol{M}_O$ всех сил относительно точки O.*

Справедливость этой теоремы непосредственно следует из критерия эквивалентности систем сил, приложенных к твердому телу (п. 66).

Следствие 3 (о параллельном переносе силы). *Сила, приложенная в какой-либо точке твердого тела, эквивалентна той же силе, при-*

ложенной в другой точке этого тела, и паре, момент которой равен моменту данной силы относительно новой точки приложения.

Пример 1. *В точке* $A(2,\ 2,\ 2)$ *к твердому телу приложена сила* $\boldsymbol{F}$ *с компонентами* $F_x = 1,\ F_y = -2,\ F_z = 3$. *Не изменяя действия силы, перенести ее в новую точку приложении* $B(-1,\ 4,\ 2)$.

Момент данной силы относительно точки B *имеет компоненты* $M_x = -6,\ M_y = -9,\ M_z = -4$.

Следовательно, в результате перенесения получится сила $\boldsymbol{F}$ *и пара с моментом, модуль которого* $M = \sqrt{133}$, *а направляющие косинусы равны*

$$-\frac{6}{\sqrt{133}}, \quad -\frac{9}{\sqrt{133}}, \quad -\frac{4}{\sqrt{133}}.$$

72. Статические инварианты. Динамический винт. Главный вектор $\boldsymbol{R}$ системы сил, являясь суммой всех сил системы, не зависит от выбора центра приведения. Вектор $\boldsymbol{R}$ называют *первым статическим инвариантом.* В более узком смысле будем называть *первым статическим инвариантом* квадрат модуля вектора $\boldsymbol{R}$:

$$I_1 = R_x^2 + R_y^2 + R_z^2. \tag{9}$$

Главный момент системы сил зависит от выбора центра приведения. Зависимость между главными моментами сил, приложенных к твердому телу, относительно двух различных центров приведения определяется формулой (5). Из этой формулы следует, что скалярное произведение главного момента и главного вектора системы сил не зависит от выбора центра приведения. Это произведение называют *вторым статическим инвариантом*:

$$I_2 = \boldsymbol{M}_O \cdot \boldsymbol{R}. \tag{10}$$

Из существования статических инвариантов следует, что проекция M^* главного момента системы сил на направление главного вектора не зависит от выбора центра приведения.

Совокупность силы и пары сил с моментом, коллинеарным силе, называется *динамическим винтом*, или *динамой.* По теореме Пуансо (п. 71), всякая система сил приводится к силе и паре. Возникает вопрос, нельзя ли так выбрать центр приведения, чтобы плоскость пары сил, о которой идет речь в теореме Пуансо, была перпендикулярна главному вектору, т. е. нельзя ли данную систему сил привести к динаме?

Теорема. *Если второй статический инвариант отличен от нуля, то систему сил можно привести к динаме.*

Доказательство.

Предположим, что для некоторого центра O приведения система сил приведена к силе $\boldsymbol{R}$ и паре сил с моментом $\boldsymbol{M}_O$, равным главному моменту системы сил относительно центра O. Выберем какую-либо неподвижную декартову прямоугольную систему координат с началом в точке O. Пусть R_x, R_y, R_z и M_{Ox}, M_{Oy}, M_{Oz} — соответственно проекции главного вектора и главного момента на оси этой системы координат.

Пусть O^* (рис. 73) — новый центр приведения, а x, y, z — его координаты. Чтобы убедиться в справедливости теоремы, достаточно показать, что центр приведения O^* может быть выбран так, чтобы главный момент $\boldsymbol{M}_{O^*}$ был коллинеарен $\boldsymbol{R}$:

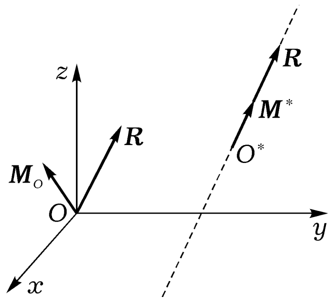

Рис. 73

$$\boldsymbol{M}_{O^*} = p\boldsymbol{R}. \tag{11}$$

Величина p отлична от нуля, так как из (10) и (11) следует, что

$$p = \frac{I_2}{I_1},$$

а величина I_2 не равна нулю по условию теоремы.

Использовав формулу (5), перепишем условие (11) в виде равенства

$$\boldsymbol{M}_O + \overline{O^*O} \times \boldsymbol{R} = p\boldsymbol{R} \tag{12}$$

Это равенство определяет не одну точку O^*, а целую прямую, обладающую тем свойством, что для выбранного на ней центра система сил приводится к динаме. В скалярной форме уравнение (12) имеет вид

$$\frac{M_{Ox} + (zR_y - yR_z)}{R_x} = \frac{M_{Oy} + (xR_z - zR_x)}{R_y} = \frac{M_{Oz} + (yR_x - xR_y)}{R_z} = p. \tag{13}$$

Прямая (13) называется ***центральной осью*** системы сил. Если $p > 0$, то динамический винт называется ***правым***, если $p < 0$ — ***левым***.

73. Частные случаи приведения системы сил. Пусть $I_2 = 0$, а $I_1 \neq 0$. Это возможно, либо когда $\boldsymbol{M}_O = 0$, либо когда $\boldsymbol{M}_O$ и $\boldsymbol{R}$ ортогональны. Из критерия эквивалентности системы сил, приложенных к твердому телу, следует, что в первом и во втором случаях система сил приводится к равнодействующей. Равнодействующая лежит на прямой, задаваемой уравнением (13) (при $p = 0$). В частности, если $\boldsymbol{M}_O = 0$, то равнодействующая проходит через данный центр приведения O.

Пусть теперь $I_2 = I_1 = 0$, а $\boldsymbol{M}_O \neq 0$. В этом случае система сил приводится к паре с моментом $\boldsymbol{M}_O$.

Наконец, если $I_2 = I_1 = 0$ и $\boldsymbol{M}_O = 0$, то система сил является уравновешенной.

В таблице представлены все возможные частные случаи приведения системы сил, приложенных к твердому телу. В последнем столбце таблицы для сравнения указаны соответствующие им аналоги в кинематике твердого тела.

$\boldsymbol{M}_O \cdot \boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{M}_O$	Случай приведения	Аналог в кинематике
$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	динамический винт (динама)	мгновенно винтовое движение (кинематический винт)
$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$ $= 0$	равнодействующая	мгновенное вращение
$= 0$	$= 0$	$\neq 0$	пара сил	мгновенно поступательное движение
$= 0$	$= 0$	$= 0$	уравновешенная система сил	покой

Упражнение 2. *Показать, что плоская система сил и система параллельных сил в пространстве не приводятся к динаме.*

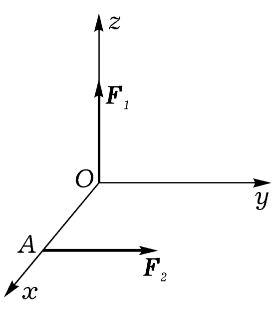

Рис. 74

Пример 1. *К твердому телу приложена система сил: $F_1 = 1$ Н, направленная по Oz, и $F_2 = 1$ Н, направленная параллельно Oy, как указано на рис. 74, где $OA = 1$ м. Привести эту систему сил к простейшему виду, а также найти наименьшую силу, которую нужно приложить к точке O, чтобы получающаяся при этом система трех сил приводилась к равнодействующей.*

Для главного вектора и главного момента имеем $\boldsymbol{R}' = (0,\ 1,\ 1)$, $\boldsymbol{M}'_O = (0,\ 0,\ 1)$. Подсчитываем кинематические инварианты: $I_1 = \boldsymbol{R}^2 = 2$, $I_2 = \boldsymbol{M}_O \cdot \boldsymbol{R} = 1$. Так как $I_2 \neq 0$, то система сил $(\boldsymbol{F}_1,\ \boldsymbol{F}_2)$

приводится к динаме. Параметр динамы $p = I_2/I_1 = {}^1\!/_2$. *Для момента* $\boldsymbol{M}$ *динамы получаем* $\boldsymbol{M}' = p\boldsymbol{R}' = (0,\ {}^1\!/_2,\ {}^1\!/_2)$.

Уравнение (13) *центральной оси получает вид*

$$\frac{z-y}{0} = \frac{x}{1} = \frac{1-x}{1} = \frac{1}{2},$$

или $z = y$, $x = {}^1\!/_2$. *Центральная ось проходит через середину отрезка* OA, *ортогональна оси* Ox *и составляет углы* $\pi/4$ *с осями* Oy *и* Oz.

Если к данной системе присоединить силу $\boldsymbol{F}_3$, $\boldsymbol{F}_3' = (X,\ Y,\ Z)$, *приложенную в начале координат, то главный момент не изменится, а для главного вектора получаем* $\boldsymbol{R}' = (X,\ Y+1,\ Z+1)$.

Условие существования равнодействующей $\boldsymbol{M}_O \cdot \boldsymbol{R} = 0$ *приводит к равенству* $Z + 1 = 0$, *откуда* $Z = -1$. *Поэтому* $\boldsymbol{F}_3' = (X,\ Y,\ -1)$, *где* X, Y *произвольны. Величина* $F_3 = \sqrt{X^2 + Y^2 + 1}$ *имеет наименьшее значение при* $X = Y = 0$. *Отсюда следует, что* $\boldsymbol{F}_3 = -\boldsymbol{F}_1$.