Глава V
Геометрия масс

§ 1. Центр масс. Момент инерции

74. Центр масс. Рассмотрим систему материальных точек P_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, N$). Пусть m_ν — масса, а $\boldsymbol{r}_\nu$ — радиус-вектор точки P_ν относительно начала некоторой системы координат $Oxyz$.

Центром масс системы называется геометрическая точка C пространства, определяемая радиусом-вектором

$$\boldsymbol{r}_C = \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{r}_\nu}{M}, \qquad (1)$$

где M — масса системы,

$$M = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu.$$

Центр масс системы называют также ее *центром инерции.*

75. Момент инерции системы относительно оси. Радиус инерции. Пусть расстояние точки P_ν до некоторой оси u равно ρ_ν. Тогда величина

$$J_u = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \rho_\nu^2$$

называется *моментом инерции системы относительно оси u.*

Момент инерции J_u можно записать в виде $M\rho^2$; положительная величина ρ называется *радиусом инерции* системы относительно оси u.

Замечание 1. *В конкретных задачах при нахождении центра масс и моментов инерции сплошных тел суммы в выражениях для $\boldsymbol{r}_C$, M, J_u переходят в интегралы.*

Упражнение 1. *Полярным моментом инерции относительно точки O называется величина*

$$J_0 = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu r_\nu^2.$$

Показать, что центр масс системы можно определить как такую точку пространства, для которой полярный момент инерции наименьший. Отсюда, в частности, следует, что положение центра масс в пространстве не зависит от конкретного выбора системы координат.

Пример 1. *Вычислим моменты инерции однородного прямоугольного параллелепипеда массой m со сторонами a, b, c относительно прямых, проходящих через центр и параллельных ребрам.*

Выберем систему координат $Oxyz$ с началом в центре параллелепипеда, оси которой параллельны соответствующим ребрам (рис. 75). *Разобьем параллелепипед на ряд элементарных масс dm в форме прямоугольных параллелепипедов со сторонами dx, dy, dz. Тогда*

$$dm = \frac{m}{abc} dx\, dy\, dz.$$

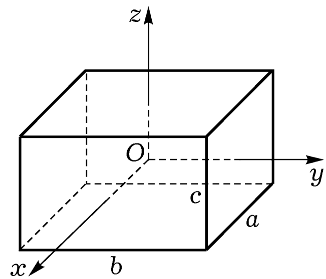

Рис. 75

Пусть x, y, z — координаты одной из таких элементарных масс.

Предварительно вычисляем интегралы:

$$\int x^2 dm = \frac{m}{abc} \int\limits_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int\limits_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2\, dx\, dy\, dz = \frac{m}{abc} \cdot c \cdot b \cdot \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2\, dx = \frac{1}{12} ma^2;$$

аналогично

$$\int y^2\, dm = \frac{1}{12} mb^2 \quad \text{и} \quad \int z^2\, dm = \frac{1}{12} mc^2.$$

Поэтому для искомых моментов инерции получаем

$$J_x = \int (y^2 + z^2) dm = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2),$$

$$J_y = \int (z^2 + x^2) dm = \frac{1}{12} m(c^2 + a^2),$$

$$J_z = \int (x^2 + y^2) dm = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2).$$

Чтобы получить момент инерции тонкого однородного стержня длиной a относительно оси z, перпендикулярной стержню и проходящей *через его середину, можно взять третье из этих равенств и положить в нем $b = 0$. Получим*

$$J_z = ma^2/12.$$

Пример 2. *Определим момент инерции относительно оси вращения однородной цилиндрической круговой трубки массой m, внутренний радиус которой равен r, а внешний R* (рис. 76).

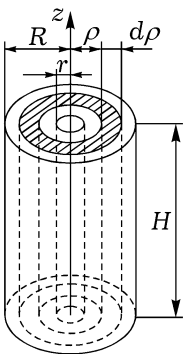

Рис. 76

За элементарную массу dm примем массу цилиндрического слоя, образуемую двумя коаксиальными цилиндрами радиусов ρ и $\rho + d\rho$. Имеем

$$dm = \frac{m}{\pi(R^2 - r^2)H} 2\pi\rho H \cdot d\rho = \frac{2m\rho\, d\rho}{R^2 - r^2},$$

$$J_z = \int \rho^2\, dm = \frac{2m}{R^2 - r^2} \int_r^R \rho^3\, d\rho = \frac{1}{2} m(R^2 + r^2).$$

При $r = 0$ отсюда следует формула для момента инерции сплошного цилиндра относительно его оси:

$$J_z = mR^2/2.$$

Пример 3. *Вычислим момент инерции однородного шара массой m и радиусом R относительно диаметра.*

Поместив начало системы координат $Oxyz$ в центре шара, из симметрии фигуры заключаем, что $J_x = J_y = J_z$. Обозначим этот одинаковый для всех диаметров момент инерции шара через J. Тогда

$$3J = J_x + J_y + J_z = 2 \int (x^2 + y^2 + z^2) dm.$$

За элементарную массу dm примем массу сферического слоя, образуемого двумя концентрическими сферами радиусов ρ и $\rho + d\rho$. Тогда

$$dm = \frac{m}{4/3\pi R^3} 4\pi\rho^2\, d\rho = \frac{3m}{R^3} \rho^2\, d\rho.$$

Поэтому

$$J = \frac{2}{3} \int (x^2 + y^2 + z^2) dm = \frac{2}{3} \cdot \frac{3m}{R^3} \int_0^R \rho^4\, d\rho = \frac{2}{5}\, mR^2.$$

Пример 4. *Найдем момент инерции конуса относительно его оси. Масса конуса равна m, радиус основания R.*

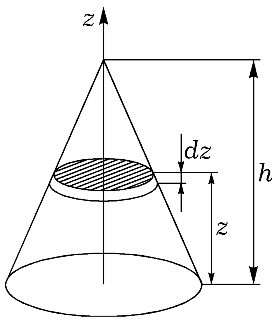

Рис. 77

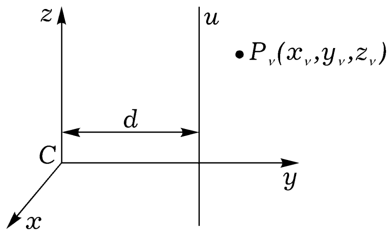

Рис. 78

За элементарную массу dm *примем массу тонкого диска толщиной* dz*, плоскость которого параллельна основанию конуса и отстоит от него на расстоянии* z (рис. 77). *Тогда*

$$dm = \frac{m}{1/3\pi R^2 h} \cdot \pi \left[\frac{(h-z)R}{h}\right]^2 dz = \frac{3m}{h^3}(h-z)^2\,dz$$

и для искомого момента инерции получаем

$$J_z = \int \frac{1}{2}\left[\frac{(h-z)R}{h}\right]^2 dm = \frac{3mR^2}{2h^5}\int_0^h (h-z)^4\,dz = \frac{3}{10}mR^2.$$

76. Моменты инерции относительно параллельных осей. Момент инерции, очевидно, зависит от выбора оси u. Найдем зависимость между моментами инерции относительно параллельных осей. Сначала покажем, что если известен момент инерции J_C относительно некоторой оси, проходящей через центр масс системы, то момент инерции J_u относительно любой параллельной оси может быть найден по формуле

$$J_u = J_C + Md^2, \tag{2}$$

где d — расстояние между осями[1].

Действительно, поместим начало координат в центре масс C, направив ось Cz по оси, относительно которой известен момент инерции J_C, а ось Cy так, чтобы она пересекала ось u, параллельную оси Cz

[1]Это утверждение называется *теоремой Гюйгенса–Штейнера.*

(рис. 78). Тогда

$$J_u = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu [x_\nu^2 + (y_\nu - d)^2] = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (x_\nu^2 + y_\nu^2) -$$
$$-2d \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu y_\nu + \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \right) d^2.$$

Первая сумма в полученном выражении есть J_c, вторая сумма обращается в нуль, так как она равна My_c, а для выбранной системы координат $y_c = 0$, третья сумма равна массе системы M. Справедливость формулы (2) доказана.

Из формулы (2) следует соотношение между моментами инерции относительно любых параллельных осей u_1 и u_2.

$$J_{u_1} = J_{u_2} + M(d_1^2 - d_2^2),$$

где d_1 и d_2 — расстояния осей u_1 и u_2 от центра масс.

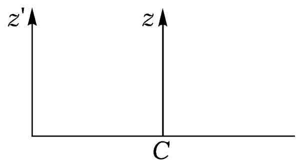

Рис. 79

Пример 1. *Подсчитаем момент инерции тонкого однородного стержня длиной a и массой m относительно оси z, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец* (рис. 79).

Так как (*см. пример* 1 *п.* 75) $J_C = ma^2/12$, *то*

$$J_{z'} = J_C + m(a/2)^2 = ma^2/3.$$

§ 2. Тензор и эллипсоид инерции

77. Моменты инерции относительно осей, проходящих через одну и ту же точку. Рассмотрим ось u, проходящую через начало системы координат $Oxyz$. Косинусы углов, образуемых осью u с осями Ox, Oy, Oz, обозначим соответственно α, β, γ. Тогда (рис. 80)

$$J_u = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \rho_\nu^2 = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu [(x_\nu^2 + y_\nu^2 + z_\nu^2) - (x_\nu \alpha + y_\nu \beta + z_\nu \gamma)^2] =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu [(1-\alpha^2) x_\nu^2 + (1-\beta^2) y_\nu^2 + (1-\gamma^2) z_\nu^2 -$$
$$-2\alpha\beta x_\nu y_\nu - 2\alpha\gamma x_\nu z_\nu - 2\beta\gamma y_\nu z_\nu].$$

На основании тождества $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ заменяем $1-\alpha^2$, $1-\beta^2$, $1-\gamma^2$ соответственно на $\beta^2+\gamma^2$, $\alpha^2+\gamma^2$, $\alpha^2+\beta^2$ и приводим подобные