

(рис. 78). Тогда

$$J_u = \sum_{\nu=1}^N m_\nu [x_\nu^2 + (y_\nu - d)^2] = \sum_{\nu=1}^N m_\nu (x_\nu^2 + y_\nu^2) - 2d \sum_{\nu=1}^N m_\nu y_\nu + \left(\sum_{\nu=1}^N m_\nu \right) d^2.$$

Первая сумма в полученном выражении есть J_c , вторая сумма обращается в нуль, так как она равна $M y_c$, а для выбранной системы координат $y_c = 0$, третья сумма равна массе системы M . Справедливость формулы (2) доказана.

Из формулы (2) следует соотношение между моментами инерции относительно любых параллельных осей u_1 и u_2 .

$$J_{u_1} = J_{u_2} + M(d_1^2 - d_2^2),$$

где d_1 и d_2 — расстояния осей u_1 и u_2 от центра масс.

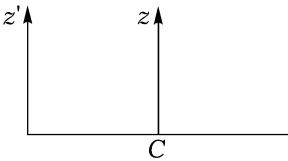


Рис. 79

ПРИМЕР 1. Подсчитаем момент инерции тонкого однородного стержня длиной a и массой m относительно оси z , перпендикулярной стержню и проходящей через его конец (рис. 79).

Так как (см. пример 1 п. 75) $J_C = ma^2/12$, то

$$J_{z'} = J_C + m(a/2)^2 = ma^2/3.$$

§ 2. Тензор и эллипсоид инерции

77. Моменты инерции относительно осей, проходящих через одну и ту же точку. Рассмотрим ось u , проходящую через начало системы координат $Oxyz$. Косинусы углов, образуемых осью u с осями Ox , Oy , Oz , обозначим соответственно α , β , γ . Тогда (рис. 80)

$$\begin{aligned} J_u &= \sum_{\nu=1}^N m_\nu \rho_\nu^2 = \sum_{\nu=1}^N m_\nu [(x_\nu^2 + y_\nu^2 + z_\nu^2) - (x_\nu \alpha + y_\nu \beta + z_\nu \gamma)^2] = \\ &= \sum_{\nu=1}^N m_\nu [(1 - \alpha^2)x_\nu^2 + (1 - \beta^2)y_\nu^2 + (1 - \gamma^2)z_\nu^2 - \\ &\quad - 2\alpha\beta x_\nu y_\nu - 2\alpha\gamma x_\nu z_\nu - 2\beta\gamma y_\nu z_\nu]. \end{aligned}$$

На основании тождества $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ заменяем $1 - \alpha^2$, $1 - \beta^2$, $1 - \gamma^2$ соответственно на $\beta^2 + \gamma^2$, $\alpha^2 + \gamma^2$, $\alpha^2 + \beta^2$ и приводим подобные

члены в выражении, стоящем в квадратных скобках. Получаем

$$J_u = J_x \alpha^2 + J_y \beta^2 + J_z \gamma^2 - 2J_{xy} \alpha \beta - 2J_{xz} \alpha \gamma - 2J_{yz} \beta \gamma, \quad (1)$$

где введены следующие обозначения:

$$J_x = \sum_{\nu=1}^N m_\nu (y_\nu^2 + z_\nu^2), \quad J_y = \sum_{\nu=1}^N m_\nu (z_\nu^2 + x_\nu^2), \quad (2)$$

$$J_z = \sum_{\nu=1}^N m_\nu (x_\nu^2 + y_\nu^2),$$

$$J_{xy} = \sum_{\nu=1}^N m_\nu x_\nu y_\nu, \quad J_{xz} = \sum_{\nu=1}^N m_\nu x_\nu z_\nu, \quad J_{yz} = \sum_{\nu=1}^N m_\nu y_\nu z_\nu. \quad (3)$$

Величины (2), (3), очевидно, не зависят от выбора оси u . Величины (2) называются *осевыми моментами инерции*: J_x — это момент инерции относительно оси Ox , J_y — относительно оси Oy и J_z — относительно оси Oz . Величины (3) называются *центробежными моментами инерции*. Осевой момент инерции представляет собой меру инертности системы при ее вращении вокруг соответствующей оси. Центробежные моменты инерции можно трактовать как меру неуравновешенности масс системы: они характеризуют несимметричность распределения масс относительно координатных плоскостей.

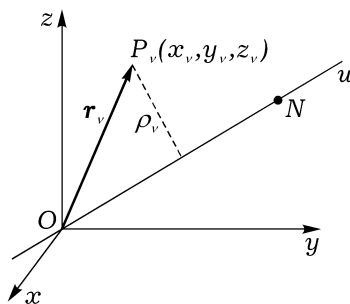


Рис. 80

Для различных точек O осевые и центробежные моменты инерции различны. Они изменяются также при повороте системы координат $Oxyz$ вокруг рассматриваемой точки O . Можно показать, что при повороте величины (2), (3) изменяются в соответствии с формулами, определяющими симметрический тензор второго ранга. Матрица \mathbf{J} вида

$$\mathbf{J} = \left\| \begin{array}{ccc} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{array} \right\| \quad (4)$$

определяет тензор второго ранга, который называют *тензором инерции* системы для точки O .

78. Эллипсоид инерции. Главные оси инерции. Формула (1) допускает наглядную геометрическую интерпретацию. На оси u отложим по обе стороны от точки O отрезки такой длины ON (рис. 80), что

$$ON = 1/\sqrt{J_u},$$

и найдем геометрическое место точек $N(x, y, z)$. Имеем

$$\alpha = \sqrt{J_u}x, \quad \beta = \sqrt{J_u}y, \quad \gamma = \sqrt{J_u}z.$$

Подставив эти значения α , β и γ в равенство (1), получим

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{xy}xy - 2J_{xz}xz - 2J_{yz}yz = 1. \quad (5)$$

Поверхность второго порядка (5) — эллипсоид. Действительно, отрезок ON имеет конечную длину, так как $J_u \geq \delta > 0$. Исключение составляет предельный случай, когда все точки P_ν лежат на одной прямой (например, случай бесконечно тонкого стержня). Тогда момент инерции $J_u = 0$, и эллипсоид инерции превращается в цилиндр.

Эллипсоид (5) называется *эллипсоидом инерции* системы для точки O . Если точка O совпадает с центром масс, то эллипсоид (5) называется *центральной эллипсоидом инерции*. При повороте системы координат $Oxyz$ уравнение эллипсоида инерции меняется. Главные оси эллипсоида инерции называются *главными осями инерции* системы для точки O . В системе координат $Ox_*y_*z_*$, оси которой направлены по главным осям эллипсоида инерции, уравнение (5) имеет вид

$$Ax_*^2 + By_*^2 + Cz_*^2 = 1. \quad (6)$$

В этой системе координат центробежные моменты инерции равны нулю: $J_{x_*y_*} = J_{x_*z_*} = J_{y_*z_*} = 0$. Величины A, B, C — моменты инерции относительно главных осей Ox_* , Oy_* , Oz_* соответственно. Они называются *главными моментами инерции* системы для точки O . Если точка O совпадает с центром масс, то оси Ox_* , Oy_* , Oz_* называются *главными центральными осями инерции*, а величины A, B, C — *главными центральными моментами инерции*.

Из аналитической геометрии известно, что для любого эллипсоида существуют главные оси. Величины A, B, C являются собственными значениями матрицы (4). Если они различны, то главные оси определяются однозначно. Если эллипсоид инерции для точки O является эллипсоидом вращения вокруг оси Oz_* , то за его главные оси можно принять ось Oz_* и любые две ортогональные оси, лежащие в экваториальной плоскости эллипсоида. Если $A = B = C$, то все оси, проходящие через точку O , являются для нее главными.

Если эллипсоид инерции для точки O построен, то момент инерции относительно какой-либо оси u равен $1/ON^2$, где ON — отрезок, соединяющий точку O с точкой пересечения оси u с эллипсоидом. Наибольшую величину имеет момент инерции относительно наименьшей оси эллипсоида, а наименьшую — относительно наибольшей его оси.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть при каком-либо выборе системы координат $Oxyz$ не все три центробежных момента инерции равны нулю, а только два из них, например $J_{xz} = J_{yz} = 0$, а $J_{xy} \neq 0$. Покажем, что ось Oz будет главной. Чтобы убедиться в этом, надо показать, что систему координат $Oxyz$ можно повернуть на такой угол α вокруг оси Oz , что в повернутой системе координат $Ox'y'z'$ уже все центробежные моменты инерции будут равны нулю. Действительно, пусть система координат $Ox'y'z'$ получается из $Oxyz$ поворотом вокруг оси Oz на угол α против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного направления оси Oz . Тогда координаты точки P_ν в исходной и повернутой системах координат связаны соотношениями

$$x'_\nu = x_\nu \cos \alpha + y_\nu \sin \alpha, \quad y'_\nu = -x_\nu \sin \alpha + y_\nu \cos \alpha, \quad z'_\nu = z_\nu. \quad (7)$$

Используя равенство (7) и условие $J_{xz} = J_{yz} = 0$, получаем

$$\begin{aligned} J_{x'z'} &= \sum_{\nu=1}^N m_\nu x'_\nu z'_\nu = \sum_{\nu=1}^N m_\nu (x_\nu \cos \alpha + y_\nu \sin \alpha) z_\nu = \\ &= \left(\sum_{\nu=1}^N m_\nu x_\nu z_\nu \right) \cos \alpha + \left(\sum_{\nu=1}^N m_\nu y_\nu z_\nu \right) \sin \alpha = J_{xz} \cos \alpha + J_{yz} \sin \alpha = 0. \end{aligned}$$

Аналогично получаем, что $J_{y'z'} = 0$, т. е. центробежные моменты инерции, которые были равны нулю до поворота системы координат, остаются равными нулю при любом угле поворота вокруг оси Oz . Вычислим теперь третий центробежный момент инерции:

$$\begin{aligned} J_{x'y'} &= \sum_{\nu=1}^N m_\nu x'_\nu y'_\nu = \\ &= \sum_{\nu=1}^N m_\nu (x_\nu \cos \alpha + y_\nu \sin \alpha)(-x_\nu \sin \alpha + y_\nu \cos \alpha) = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\sum_{\nu=1}^N m_\nu (x_\nu^2 - y_\nu^2) \right) \sin 2\alpha + \left(\sum_{\nu=1}^N m_\nu x_\nu y_\nu \right) \cos 2\alpha. \end{aligned}$$

Замечая, что

$$\sum_{\nu=1}^N (x_\nu^2 - y_\nu^2) = J_y - J_x$$

и приравнявая $J_{x'y'}$ нулю, получаем уравнение для нахождения угла α :

$$-\frac{1}{2}(J_y - J_x) \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha = 0$$

Если $J_x = J_y$, то $\alpha = \pi/4$, если же $J_x \neq J_y$, то

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}.$$

Таким образом, ось Oz , отвечающая общему индексу (в рассмотренном случае индексу z) равных нулю центробежных моментов инерции, является главной осью инерции для точки O .

УПРАЖНЕНИЕ 2. Показать, что если между радиусом основания R однородного прямого кругового конуса и его высотой h выполняется соотношение $R = 2h$, то эллипсоид инерции конуса для его вершины есть сфера.

УПРАЖНЕНИЕ 3. Показать, что: а) главная ось инерции остается главной для всех своих точек тогда и только тогда, когда она является главной центральной осью инерции; б) если в системе есть ось материальной симметрии, то эта ось является главной центральной осью инерции; в) если у системы есть плоскость материальной симметрии, то любая прямая, перпендикулярная этой плоскости, является главной осью инерции системы для точки, в которой эта прямая пересекает плоскость симметрии; г) для однородного тела вращения ось вращения и любые две взаимно перпендикулярные и перпендикулярные ей оси образуют систему главных осей инерции.

79. Свойства главных моментов инерции. Не всякий эллипсоид может служить эллипсоидом инерции. Действительно, если за оси Ox_* , Oy_* , Oz_* приняты главные оси инерции для точки O , то уравнение эллипсоида инерции имеет вид (6), где

$$A = \sum_{\nu=1}^N m_\nu (y_{*\nu}^2 + z_{*\nu}^2), \quad B = \sum_{\nu=1}^N m_\nu (z_{*\nu}^2 + x_{*\nu}^2),$$

$$C = \sum_{\nu=1}^N m_\nu (x_{*\nu}^2 + y_{*\nu}^2).$$

Главные моменты инерции (как, впрочем, и осевые моменты инерции (2)) удовлетворяют неравенствам треугольника

$$A + B \geq C, \quad A + C \geq B, \quad B + C \geq A. \quad (8)$$

Проверим первое из этих неравенств. Имеем

$$\begin{aligned}
 A + B &= \sum_{\nu=1}^N m_{\nu}(x_{*\nu}^2 + y_{*\nu}^2 + 2z_{*\nu}^2) = \\
 &= \sum_{\nu=1}^N m_{\nu}(x_{*\nu}^2 + y_{*\nu}^2) + 2 \sum_{\nu=1}^N m_{\nu}z_{*\nu}^2 = C + 2 \sum_{\nu=1}^N m_{\nu}z_{*\nu}^2 \geq C,
 \end{aligned}$$

причем знак равенства возможен только для случая, когда все точки системы лежат в плоскости Ox_*y_* , т. е. когда $z_{*\nu} = 0$ для всех ν . Второе и третье неравенства из (8) проверяются аналогично.

Для графического представления области допустимых значений моментов инерции введем обозначения $\theta_A = A/B$, $\theta_C = C/B$. Неравенства (8) запишутся в виде

$$\theta_A + 1 \geq \theta_C, \quad \theta_A + \theta_C \geq 1, \quad 1 + \theta_C \geq \theta_A. \quad (9)$$

Область допустимых значений параметров показана на рис. 81 штриховкой. Она представляет собой бесконечную полосу, лежащую между параллельными прямыми $\theta_A + 1 = \theta_C$ и $1 + \theta_C = \theta_A$ и расположенную правее и выше прямой $\theta_A + \theta_C = 1$. Участки границы области допустимых значений параметров $\theta_A + 1 = \theta_C$, $\theta_A + \theta_C = 1$ и $1 + \theta_C = \theta_A$ отвечают системам материальных точек, лежащим соответственно в плоскостях Ox_*y_* , Ox_*z_* и Oy_*z_* . Точка (1, 0) на рис. 81, точка (0, 1) и бесконечно удаленные точки прямых $\theta_A + 1 = \theta_C$, $1 + \theta_C = \theta_A$ отвечают системам материальных точек, лежащим соответственно на осях Oz_* , Ox_* и Oy_* .

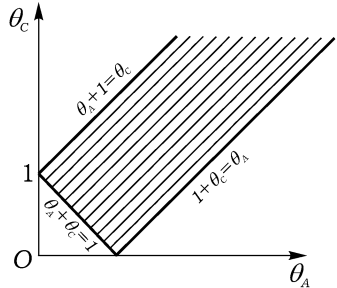


Рис. 81

УПРАЖНЕНИЕ 4. Показать, что симметрическую матрицу, образованную элементами J_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$; $J_{ij} = J_{ji}$), можно рассматривать как матрицу тензора инерции реального твердого тела тогда и только тогда, когда одновременно выполняются неравенства¹

$$\begin{aligned}
 x_1 &> 0, & x_1x_2 - J_{12}^2 &> 0, \\
 x_1x_2x_3 - x_1J_{23}^2 - x_2J_{13}^2 - x_3J_{12}^2 - 2J_{12}J_{13}J_{23} &> 0,
 \end{aligned}$$

где

$$x_1 = \frac{J_{22} + J_{33} - J_{11}}{2}, \quad x_2 = \frac{J_{11} + J_{33} - J_{22}}{2}, \quad x_3 = \frac{J_{11} + J_{22} - J_{33}}{2}.$$

¹См.: Пеньков В. И., Сарычев В. А. Оптимизация гравитационной системы стабилизации спутников с одноступенным подвесом на слабоэллиптической орбите, М.: Ин-т прикладной математики АН СССР, препринт № 90, 1974.