Глава VI
Основные теоремы и законы динамики

§ 1. Основные динамические величины механической системы

80. Количество движения системы. *Количеством движения* механической системы называется вектор

$$\boldsymbol{Q} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu. \tag{1}$$

Так как $M\boldsymbol{r}_C = \sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{r}_\nu$, то $M\boldsymbol{v}_C = \sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{Q}$. Таким образом,

$$\boldsymbol{Q} = M\boldsymbol{v}_C, \tag{2}$$

т. е. количество движения системы равно массе системы, умноженной на скорость ее центра масс.

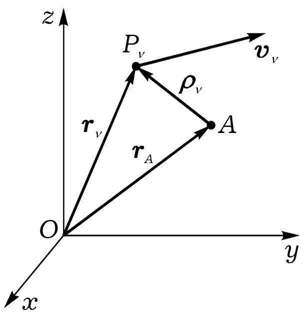

Рис. 82

81. Главный момент количеств движения (кинетический момент) системы. Пусть $\boldsymbol{\rho}_\nu$ — радиус-вектор точки P_ν системы относительно некоторой точки A, называемой *центром* (рис. 82). *Моментом количества движения* (*кинетическим моментом*) точки P_ν *относительно центра* A называется вектор $\boldsymbol{K}_{\nu A}$, определяемый по формуле

$$\boldsymbol{K}_{\nu A} = \boldsymbol{\rho}_\nu \times m_\nu \boldsymbol{v}_\nu.$$

Моментом количества движения (*кинетическим моментом*) *точки* P_ν *относительно оси* называется проекция на эту ось момента количества движения точки относительно любого выбранного на данной оси центра. В независимости момента количества движения относительно оси от выбора центра на этой оси можно убедиться точно так же, как в п. 49 при определении момента силы относительно оси.

Главным моментом количеств движения (*кинетическим моментом*) *системы относительно центра* A называется величина

$$\boldsymbol{K}_A = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_\nu \times m_\nu \boldsymbol{v}_\nu. \tag{3}$$

Главным моментом количеств движения (*кинетическим моментом*) *системы относительно оси* называется проекция на эту ось главного момента количеств движения системы относительно любого выбранного на данной оси центра.

При изменении центра кинетический момент изменяется. Найдем зависимость между его значениями для двух различных центров A и B. Пусть $\boldsymbol{\rho}_{\nu A}$ и $\boldsymbol{\rho}_{\nu A}$ — радиусы-векторы точки P_ν соответственно относительно центров A и B. Тогда

$$\boldsymbol{K}_B = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_{\nu B} \times m_\nu \boldsymbol{v}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{\rho}_{\nu A} + \overline{BA}) \times m_\nu \boldsymbol{v}_\nu =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_{\nu A} \times m_\nu \boldsymbol{v}_\nu + \overline{BA} \times \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{K}_A + \overline{BA} \times \boldsymbol{Q}.$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{K}_B = \boldsymbol{K}_A + \overline{BA} \times \boldsymbol{Q}. \tag{4}$$

Установим связь между значениями кинетического момента системы относительно какого-либо произвольного центра и относительно центра масс системы. Предварительно введем важное здесь и в дальнейшем понятие *движения системы относительно ее центра масс.* Таким движением называется движение точек системы относительно поступательно движущейся системы координат с началом в центре масс системы. Эта система координат называется еще *кениговой системой координат.*

Покажем, что абсолютный кинетический момент $\boldsymbol{K}_C$ системы относительно центра масс C равен относительному кинетическому моменту $\boldsymbol{K}_{Cr}$ относительно C. Действительно, пусть $\boldsymbol{v}_C$ — абсолютная скорость центра масс, $\boldsymbol{v}_\nu$ — абсолютная скорость точки P_ν системы, $\boldsymbol{v}_{\nu r}$ — скорость точки P_ν в ее движении относительно центра масс. В силу того что кенигова система координат движется поступательно, переносные скорости всех точек системы одинаковы и равны $\boldsymbol{v}_C$. Поэтому абсолютная скорость точки P_ν, участвующей в сложном движении, будет определяться формулой

$$\boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{\nu r}. \tag{5}$$

Пусть $\boldsymbol{\rho}_{\nu r}$ — радиус-вектор точки P_ν относительно центра масс. Тогда

$$\boldsymbol{K}_{Cr} = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_{\nu r} \times m_\nu \boldsymbol{v}_{\nu r}. \tag{6}$$

Вычислим теперь абсолютный кинетический момент системы относительно точки C:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}_C &= \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_{\nu r} \times m_\nu \boldsymbol{v}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_{\nu r} \times m_\nu (\boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{\nu r}) = \\ &= \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{\rho}_{\nu r} \right) \times \boldsymbol{v}_C + \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_{\nu r} \times m_\nu \boldsymbol{v}_{\nu r}. \end{aligned} \tag{7}$$

Так как центр масс находится в начале кениговой системы координат ($\boldsymbol{\rho}_{Cr} = 0$), то $\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{\rho}_{\nu r} = M\boldsymbol{\rho}_{Cr} = 0$ и, следовательно, из (6), (7) вытекает, что $\boldsymbol{K}_C = \boldsymbol{K}_{Cr}$.

Замечая, что

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_{\nu r} = M\boldsymbol{v}_{Cr} = 0,$$

т. е. количество движения системы в ее движении относительно центра масс равно нулю, из (4) получаем, что кинетический момент системы в ее движении относительно центра масс одинаков для всех точек пространства и, согласно предыдущему, равен $\boldsymbol{K}_C$.

Поэтому абсолютный кинетический момент системы относительно центра O равен сумме ее относительного кинетического момента (одинакового для всех точек пространства) и момента вектора $\boldsymbol{Q}$ относительно центра O в предположении, что он приложен в центре масс системы.

82. Кинетический момент твердого тела, движущегося вокруг неподвижной точки. Примем неподвижную точку O тела за начало системы координат $Oxyz$, оси которой неподвижны относительно тела. Пусть $\boldsymbol{\rho}_\nu$ — радиус-вектор точки P_ν тела относительно начала координат, его проекции на оси Ox, Oy, Oz обозначим x_ν, y_ν, z_ν. Проекции мгновенной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ тела на те же оси обозначим p, q, r.

Вычислим кинетический момент тела относительно точки O. Учитывая, что скорость $\boldsymbol{v}_\nu$ точки P_ν равна $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_\nu$, имеем

$$\boldsymbol{K}_O = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_\nu \times m_\nu \boldsymbol{v}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_\nu \times m_\nu (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_\nu) = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{\rho}_\nu \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_\nu).$$

Используя формулу $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$ для двойного векторного произведения трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, выражение для $\boldsymbol{K}_O$ можно переписать в виде

$$\boldsymbol{K}_O = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \rho_\nu^2 \boldsymbol{\omega} - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\rho}_\nu)\boldsymbol{\rho}_\nu =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (x_\nu^2 + y_\nu^2 + z_\nu^2)\boldsymbol{\omega} - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (p x_\nu + q y_\nu + r z_\nu)\boldsymbol{\rho}_\nu.$$

Отсюда получаем следующее выражение для проекции K_{Ox} вектора $\boldsymbol{K}_O$ на ось Ox:

$$K_{Ox} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (x_\nu^2 + y_\nu^2 + z_\nu^2) p - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (p x_\nu + q y_\nu + r z_\nu) x_\nu =$$
$$= \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (y_\nu^2 + z_\nu^2)\right) p - \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu x_\nu y_\nu\right) q - \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu x_\nu z_\nu\right) r.$$

Аналогично можно выписать выражения для проекций K_{Oy} и K_{Oz}. Учтя формулы (2), (3) п. 77 для осевых и центробежных моментов инерции, окончательно получим

$$\begin{aligned} K_{Ox} &= J_x p - J_{xy} q - J_{xz} r, \\ K_{Oy} &= -J_{xy} p + J_y q - J_{yz} r, \\ K_{Oz} &= -J_{xz} p - J_{yz} q + J_z r. \end{aligned} \tag{8}$$

Эти формулы можно записать более компактно, использовав матрицу $\mathbf{J}$, определяющую тензор инерции тела для точки O (см. п. 77):

$$\boldsymbol{K}_O = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}. \tag{9}$$

В частном случае, когда оси Ox, Oy, Oz представляют собой главные оси инерции тела для точки O, матрица $\mathbf{J}$ диагональна; ее диагональными элементами служат главные моменты инерции тела для точки O, т. е. $J_x = A$, $J_y = B$, $J_z = C$. В этом случае

$$K_{Ox} = Ap, \quad K_{Oy} = Bq, \quad K_{Oz} = Cr. \tag{10}$$

Если твердое тело вращается вокруг неподвижной оси, например вокруг оси Oz, то $p = q = 0$ и, согласно (8),

$$K_{Ox} = -J_{xz} r, \quad K_{Oy} = -J_{yz} r, \quad K_{Oz} = J_z r. \tag{11}$$

Из (11) видно, что при вращении тела вокруг неподвижной оси направления оси вращения и кинетического момента тела, вообще говоря, различны. Они совпадают тогда и только тогда, когда ось вращения является главной осью инерции тела.

83. Кинетическая энергия системы. Теорема Кёнига. *Кинетической энергией* системы называется величина T, определяемая по формуле

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_\nu^2. \tag{12}$$

При вычислении кинетической энергии очень часто используется следующее утверждение.

Теорема (Кёнига). *Кинетическая энергия системы равна сумме кинетической энергии, которую имела бы материальная точка, расположенная в центре масс системы и имеющая массу, равную массе системы, и кинетической энергии движения системы относительно центра масс.*

Доказательство.

Согласно (5) и (12), имеем

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{\nu r})^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \right) v_C^2 + \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_{\nu r} \right) \cdot \boldsymbol{v}_C + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_{\nu r}^2 = \\ &= \frac{1}{2} M v_C^2 + M \boldsymbol{v}_{Cr} \cdot \boldsymbol{v}_C + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_{\nu r}^2. \end{aligned}$$

Так как относительная скорость центра масс $\boldsymbol{v}_{Cr}$ равна нулю, то отсюда следует, что

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_{\nu r}^2. \tag{13}$$

Теорема доказана.

84. Кинетическая энергия твердого тела, движущегося вокруг неподвижной точки. Пусть $Oxyz$ — жестко связанная с телом система координат с началом в его неподвижной точке O и пусть мгновенная угловая скорость тела $\boldsymbol{\omega}$ направлена вдоль оси u, косинусы углов которой с осями Ox, Oy, Oz соответственно равны α, β, γ. Тогда проекции $\boldsymbol{\omega}$ на оси Ox, Oy, Oz вычисляются по формуле

$$p = \omega\alpha, \qquad q = \omega\beta, \qquad r = \omega\gamma. \tag{14}$$

Если d_ν — расстояние от точки P_ν до оси u, то $v_\nu = \omega d_\nu$ и для кинетической энергии тела имеем выражение

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_\nu^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu d_\nu^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}J_u\omega^2, \tag{15}$$

где J_u — момент инерции тела относительно оси u. Подставив в (15) выражение для J_u из формулы (1) п. 77 и воспользовавшись формулами (14), получим окончательно

$$T = \frac{1}{2}(J_x p^2 + J_y q^2 + J_z r^2) - J_{xy}pq - J_{xz}pr - J_{yz}qr. \tag{16}$$

Если оси Ox, Oy, Oz представляют собой главные оси инерции тела для точки O, то формула (16) принимает вид

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2), \tag{17}$$

где A, B, C — моменты инерции тела относительно осей Ox, Oy, Oz.

Для твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, например вокруг оси Oz, формула (16) сильно упрощается. Так как в этом случае $p = q = 0$, $|r| = \omega$, то

$$T = \frac{1}{2}J_z\omega^2. \tag{18}$$

Замечание 1. *Между мгновенной угловой скоростью* $\boldsymbol{\omega}$ *твердого тела и его кинетическим моментом относительно неподвижной точки* O *существует простое геометрическое соответствие. Действительно, из формул* (8) *и* (16) *следует, что*

$$T = \frac{1}{2}(\boldsymbol{K}_O \cdot \boldsymbol{\omega}). \tag{19}$$

Так как кинетическая энергия движущегося тела положительна, то отсюда следует, что угол между векторами $\boldsymbol{K}_O$ *и* $\boldsymbol{\omega}$ *будет всегда острым. Используя* (19)*, можно также геометрическим путем найти направление одного из двух векторов* $\boldsymbol{\omega}$ *и* $\boldsymbol{K}_O$*, когда задано направление другого.*

Упражнение 1. *Пусть известен эллипсоид инерции тела для неподвижной точки* O *и задана мгновенная угловая скорость* $\boldsymbol{\omega}$*. Найти направление и модуль кинетического момента* $\boldsymbol{K}_O$ *тела относительно точки* O*.*