§ 2. Теоремы об изменении основных динамических величин системы

85. Общие замечания о теоремах и законах динамики. Рассмотрим движение системы материальных точек P_ν $(\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ N)$ в некоторой инерциальной системе координат. Пусть m_ν — масса точки P_ν, а $\boldsymbol{\rho}_\nu$ — ее радиус-вектор относительно начала координат. Если система несвободна, то ее можно рассматривать как свободную, если помимо активных сил, приложенных к точкам системы, учесть реакции связей. Если затем все силы, приложенные к системе, разбить на внешние и внутренние, то из аксиом Ньютона получим дифференциальные уравнения движения рассматриваемой механической системы в виде

$$m_\nu \boldsymbol{w}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu^{(e)} + \boldsymbol{F}_\nu^{(i)} \qquad (\nu = 1,\ 2, \ldots,\ N), \tag{1}$$

где $\boldsymbol{w}_\nu$ — ускорение точки P_ν в инерциальной системе отсчета, а $\boldsymbol{F}_\nu^{(e)}$ и $\boldsymbol{F}_\nu^{(i)}$ — соответственно равнодействующие всех внешних и внутренних сил системы, приложенных к точке P_ν.

Для исследования движения надо при заданных начальных условиях проинтегрировать систему уравнений (1) и найти зависимость $\boldsymbol{r}_\nu$ от времени. Это в большинстве случаев невозможно, особенно если число уравнений (1) велико.

Однако при практическом исследовании движения очень часто нет необходимости изучать систему (1), а достаточно знать изменение со временем некоторых величин, общих для всей материальной системы и являющихся функциями координат и скоростей точек системы (и, быть может, времени). Если такая функция при движении системы остается постоянной, то она называется *первым интегралом уравнений движения* (1). Использование первых интегралов позволяет упростить задачу исследования движения системы, а иногда и решить ее до конца.

Самый распространенный прием получения первых интегралов уравнений (1) основан на изучении поведения основных динамических величин системы: количества движения, кинетического момента, кинетической энергии. Изменение этих величин во времени описывается основными теоремами динамики, являющимися непосредственными следствиями уравнений (1). Утверждения, описывающие условия, при которых некоторые из основных динамических величин остаются постоянными, называются законами сохранения.

86. Теорема об изменении количества движения. Сложив почленно уравнения (1), получим

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{w}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu^{(e)} + \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu^{(i)}. \tag{2}$$

Первая сумма в правой части равенства (2) равна главному вектору $\boldsymbol{R}^{(e)}$ внешних сил системы, а вторая сумма равна нулю, так как по третьему закону Ньютона внутренние силы попарно равны и противоположны. Принимая во внимание постоянство массы каждой из точек системы, равенство (2) можно записать в виде

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = \boldsymbol{R}^{(e)}. \tag{3}$$

Это равенство выражает теорему об изменении количества движения системы: *производная по времени от количества движения системы равна главному вектору всех внешних сил системы.*

Эту теорему можно представить в интегральной форме. Проинтегрировав обе части равенства (3) от t_1 до t_2, получим

$$\Delta \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_2 - \boldsymbol{Q}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{R}^{(e)} dt. \tag{4}$$

Интеграл в правой части формулы (4) называется *импульсом внешних сил* системы за время $t_2 - t_1$. Таким образом, *приращение количества движения за конечное время равно импульсу внешних сил за это время.*

Дифференциальной форме теоремы об изменении количества движения можно придать другую формулировку. Так как $\boldsymbol{Q} = M\boldsymbol{v}_C$, где M — масса системы, а $\boldsymbol{v}_C$ — скорость центра масс, то формула (3) с учетом постоянства массы M может быть представлена в виде равенства

$$M\frac{d\boldsymbol{v}_C}{dt} = \boldsymbol{R}^{(e)}. \tag{5}$$

Это равенство означает, что *центр масс системы движется так же, как двигалась бы материальная точка, масса которой равнялась бы массе системы, под действием силы, равной главному вектору всех внешних сил системы.* Это утверждение называют теоремой о движении центра масс (центра инерции).

Если система замкнута, то $\boldsymbol{R}^{(e)} = 0$ и из (3) следует закон сохранения количества движения: *при движении замкнутой системы ее количество движения* $\boldsymbol{Q}$ *постоянно.* На основании равенства (5) закон сохранения количества движения можно сформулировать еще так: *скорость* $\boldsymbol{v}_C$ *центра масс замкнутой системы постоянна.* Ясно, что эти утверждения справедливы и для системы, не являющейся замкнутой, если только $\boldsymbol{R}^{(e)} = 0$ во все время движения.

Проектируя вектор $\boldsymbol{Q}$ на оси координат, получаем из закона сохранения количества движения три первых интеграла:

$$Q_x = c_1, \quad Q_y = c_2, \quad Q_z = c_3,$$

или

$$\dot{x}_C = c_1', \quad \dot{y}_C = c_2', \quad \dot{z}_C = c_3',$$

где Q_x, Q_y, Q_z и $\dot{x}_C$, $\dot{y}_C$, $\dot{z}_C$ — проекции на оси Ox, Oy, Oz соответственно количества движения и скорости центра масс системы, а c_i, c_i' $(i = 1,\ 2,\ 3)$ — произвольные постоянные.

Если проекция главного вектора внешних сил на какую-нибудь одну ось, например на ось Ox, равна нулю, то имеем один первый интеграл

$$Q_x = \text{const} \qquad \text{или} \qquad \dot{x}_C = \text{const}.$$

Пример 1. *Два человека стоят на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости на расстоянии a друг от друга. Один из них бросает мяч массой m, другой подхватывает его через t секунд. С какой скоростью начнет скользить по плоскости бросивший мяч, если его масса равна M?*

Так как плоскость абсолютно гладкая, то горизонтальная составляющая главного вектора внешних сил (силы тяжести и реакции плоскости) равна нулю. Следовательно, проекция количества движения системы, состоящей из мяча и человека, бросившего мяч, на плоскость будет постоянна (равна нулю, так как в начальный момент времени система покоилась).

Пусть v — скорость, с которой начнет скользить человек после бросания мяча. Замечая, что горизонтальная составляющая абсолютной скорости центра масс мяча равна a/t, получаем равенство

$$Mv - m\frac{a}{t} = 0.$$

Отсюда

$$v = \frac{ma}{Mt}.$$

Пример 2. *Две притягивающиеся по некоторому закону точки одинаковой массы могут скользить без трения одна по оси Ox, а другая — по перпендикулярной ей оси Oy* (рис. 83). *Точки начинают движение из состояния покоя. Показать, что при любом законе притяжения они одновременно окажутся в начале координат.*

Внешними силами, действующими на рассматриваемую систему из двух материальных точек, являются реакции $\boldsymbol{N}_1$ *и* $\boldsymbol{N}_2$ *осей* Ox *и* Oy*; эти реакции ортогональны соответствующим осям. Ввиду того что каждая из точек вынуждена двигаться только вдоль своей координатной оси, имеем* $N_1 = F\cos\alpha$, $N_2 = F\sin\alpha$, *где* F *— модуль силы притяжения точек. Главный вектор* $\boldsymbol{R}^{(e)}$ *внешних сил имеет компоненты* $-N_2$, $-N_1$, *т. е.* $\boldsymbol{R}^{(e)}$ *коллинеарен вектору* $\overline{CO}$, *имеющему начало в центре масс* C *точек, а конец в начале координат. Так как при* $t = 0$ *система покоилась, то, согласно теореме о движении центра масс, точка* C *при* $t > 0$ *будет двигаться вдоль неизменной прямой, проходящей через точку* O *и начальное положение центра масс. Поэтому материальные точки одновременно достигнут начала координат.*

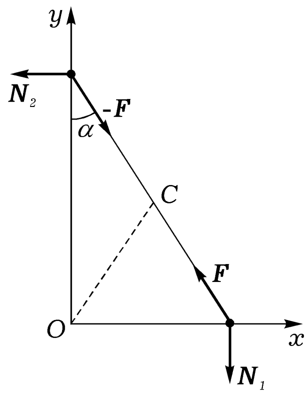

Рис. 83

87. Теорема об изменении кинетического момента. Пусть $\boldsymbol{v}_\nu$ — скорость точки P_ν системы в инерциальной системе отсчета, а $\boldsymbol{r}_\nu$ — ее радиус-вектор относительно начала координат (рис. 82). Возьмем произвольную точку A пространства, которая может и не совпадать с какой-либо материальной точкой системы во все время движения. Точка A может быть неподвижной, а может совершать произвольное движение; обозначим $\boldsymbol{v}_A$ ее скорость в выбранной инерциальной системе отсчета. Пусть $\boldsymbol{\rho}_\nu$ — радиус-вектор точки P_ν, относительно точки A. Тогда кинетический момент системы относительно точки A вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{K}_A = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_\nu \times m_\nu \boldsymbol{v}_\nu. \qquad (6)$$

Продифференцировав обе части равенства (6) по времени и воспользовавшись постоянством величин m_ν и уравнениями (1), получим

$$\frac{d\boldsymbol{K}_A}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{d\boldsymbol{\rho}_\nu}{dt} \times m_\nu \boldsymbol{v}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_\nu \times m_\nu \boldsymbol{w}_\nu = \\ = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{d\boldsymbol{\rho}_\nu}{dt} \times m_\nu \boldsymbol{v}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_\nu \times \left(\boldsymbol{F}_\nu^{(e)} + \boldsymbol{F}_\nu^{(i)}\right).$$

Последняя сумма в этом равенстве равна главному моменту $\boldsymbol{M}_A^{(e)}$ внешних сил относительно точки A (см. п. 50). Учитывая еще, что, согласно рис. 82, $\dfrac{d\boldsymbol{\rho}_\nu}{dt} = \dfrac{d\boldsymbol{r}_\nu}{dt} - \dfrac{d\boldsymbol{r}_A}{dt} = \boldsymbol{v}_\nu - \boldsymbol{v}_A$, а также что $\sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu = M\boldsymbol{v}_C$, получаем

$$\frac{d\boldsymbol{K}_A}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{v}_\nu - \boldsymbol{v}_A) \times m_\nu \boldsymbol{v}_\nu + \boldsymbol{M}_A^{(e)} = \\ = \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu\right) \times \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{M}_A^{(e)} = M\boldsymbol{v}_C \times \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{M}_A^{(e)}.$$

Таким образом,

$$\frac{d\boldsymbol{K}_A}{dt} = M\boldsymbol{v}_C \times \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{M}_A^{(e)}. \tag{7}$$

Если точка A неподвижна, то во все время движения системы $\boldsymbol{v}_A = 0$ и уравнение (7), выражающее теорему об изменении кинетического момента относительно произвольно движущегося центра, принимает следующую часто встречающуюся форму:

$$\frac{d\boldsymbol{K}_A}{dt} = \boldsymbol{M}_A^{(e)}. \tag{8}$$

Уравнение (8) представляет собой теорему об изменении кинетического момента для неподвижного центра: *производная по времени от кинетического момента системы относительно неподвижного центра равна главному моменту внешних сил системы относительно этого центра.*

Эту теорему можно представить в интегральной форме. Проинтегрировав обе части равенства (8) от t_1 до t_2, получим

$$\Delta\boldsymbol{K}_A = \boldsymbol{K}_{A_2} - \boldsymbol{K}_{A_1} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M}_A^{(e)} dt. \tag{9}$$

Интеграл в правой части этой формулы называется *импульсом моментов внешних сил* за время $t_2 - t_1$. Таким образом, ***приращение вектора кинетического момента системы относительно неподвижного центра за конечное время равно импульсу моментов внешних сил относительно этого центра за это время.***

Если система замкнута, то $\boldsymbol{M}_A^{(e)} = 0$ и из равенства (8) следует закон сохранения кинетического момента: ***при движении замкнутой системы ее кинетический момент относительно любого неподвижного центра постоянен***:

$$\boldsymbol{K}_A = \text{const}. \tag{10}$$

Если K_{Ax}, K_{Ay}, K_{Az} — проекции вектора $\boldsymbol{K}_A$ на соответствующие оси координат, то из (10) следуют три первых интеграла:

$$K_{Ax} = c_1, \qquad K_{Ay} = c_2, \qquad K_{Az} = c_3,$$

где $c_i \quad (i = 1,\ 2,\ 3)$ — произвольные постоянные. Эти интегралы существуют не только в случае замкнутой системы, но и тогда, когда система не замкнута, но для некоторого неподвижного центра A $\boldsymbol{M}_A^{(e)} = 0$ во все время движения.

Отметим еще, что если $\boldsymbol{M}_A^{(e)} = 0$ во все время движения, то интеграл (10) существует не только когда центр A неподвижен, но и в более общем случае, когда во все время движения радиусы-векторы $\boldsymbol{r}_A$ и $\boldsymbol{r}_C$ точки A и центра масс системы C относительно начала координат связаны соотношением $\boldsymbol{r}_A = \alpha \boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{a}$, где скалярная величина α и вектор $\boldsymbol{a}$ постоянны. Действительно, в этом случае $\boldsymbol{v}_A = \alpha \boldsymbol{v}_C$ и первое слагаемое в правой части равенства (7) тождественно равно нулю. Поэтому при $\boldsymbol{M}_A^{(e)} = 0$ существует интеграл (10).

Рассмотренный выше случай неподвижного центра A получается отсюда при $\alpha = 0$. Если же $\alpha = 1$ и $a = 0$, то $\boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{r}_C$ и уравнение (7) примет вид

$$\frac{d\boldsymbol{K}_C}{dt} = \boldsymbol{M}_C^{(e)}, \tag{11}$$

откуда следует, что теорема об изменении кинетического момента системы для неподвижного центра A и для центра масс C имеют одинаковый вид: в левой части уравнения стоит производная от кинетического момента относительно точки (A или C), а в правой — главный момент внешних сил относительно этой точки. Отметим, что абсолютный кинетический момент $\boldsymbol{K}_C$ системы относительно центра масс в левой части уравнения (11) можно заменить на равный ему (см. п. 82) кинетический момент $\boldsymbol{K}_{Cr}$ системы в ее движении относительно центра масс.

Пусть u — некоторая неизменная ось или ось неизменного направления, проходящая через центр масс системы. Для кинетического момента K_u системы относительно этой оси из (8) и (11) следует дифференциальное уравнение

$$\frac{dK_u}{dt} = M_u^{(e)}, \tag{12}$$

где $M_u^{(e)}$ — главный момент внешних сил относительно оси u. Если он во все время движения равен нулю, то имеем первый интеграл

$$K_u = \text{const}. \tag{13}$$

Последний вывод допускает обобщение. Именно, справедливо следующее утверждение. *Пусть $M_u^{(e)}$ равен нулю во все время движения. Тогда для существования первого интеграла* (13) *необходимо и достаточно, чтобы проекции скорости центра масс системы и скорости какой-нибудь точки A оси u на плоскость, перпендикулярную этой оси, были во все время движения параллельны.* Действительно, пусть $\boldsymbol{e}$ — единичный вектор, направленный вдоль оси u. Умножая обе части равенства (7) скалярно на вектор $\boldsymbol{e}$ и учитывая его постоянство по величине и направлению, получаем

$$\frac{d(\boldsymbol{K}_A \cdot \boldsymbol{e})}{dt} = M(\boldsymbol{v}_C \times \boldsymbol{v}_A) \cdot \boldsymbol{e} + \boldsymbol{M}_A^{(e)} \cdot \boldsymbol{e}.$$

Но $\boldsymbol{K}_A \cdot \boldsymbol{e} = K_u$, $\quad \boldsymbol{M}_A^{(e)} \cdot \boldsymbol{e} = M_u^{(e)}$, поэтому последнее равенство можно переписать в виде

$$\frac{dK_u}{dt} = M(\boldsymbol{v}_C \times \boldsymbol{v}_A) \cdot \boldsymbol{e} + M_u^{(e)}.$$

Если $M_u^{(e)} \equiv 0$, то величина K_u будет постоянной тогда и только тогда, когда $(\boldsymbol{v}_C \times \boldsymbol{v}_A) \cdot \boldsymbol{e} \equiv 0$. Если за направление оси Oz принять направление оси u, то последнее условие эквивалентно тождеству

$$\frac{\dot{x}_A}{\dot{y}_A} = \frac{\dot{x}_C}{\dot{y}_C},$$

означающему параллельность проекций скоростей точек A и C на плоскость, перпендикулярную оси u, что и требовалось доказать.

Пример 1. *Вдоль образующей однородного круглого конуса массой M, ось которого неподвижна и занимает вертикальное положение, а вершина обращена вверх, просверлен тонкий канал. Конусу сообщают угловую* *скорость* ω_0 *вокруг его оси и одновременно с этим опускают в верхнее отверстие канала шарик массы* m, *не сообщая ему начальной скорости. Какова будет угловая скорость конуса в тот момент, когда шарик выскочит из канала?*

Так как внешние силы системы конус — шарик не создают момента относительно оси конуса, то кинетический момент K_z *относительно оси остается постоянным. В начальный момент времени*

$$K_z = J_z\omega_0,$$

а в момент, когда шарик выскакивает из канала,

$$K_z = J_z\omega + mR^2\omega.$$

Здесь R *— радиус основания конуса, а* $J_z = \dfrac{3}{10}MR^2$ *— его момент инерции относительно оси. Из равенства*

$$J_z\omega_0 = J_z\omega + mR^2\omega$$

находим

$$\omega = \frac{3M}{3M+10m}\omega_0.$$

Пример 2. *На гладкой горизонтальной плоскости находится твердое тело, имеющее вид тонкого кругового кольца массой* M *и радиусом* R. *Вдоль по кольцу движется точка* A *массой* m *с постоянной по модулю относительной скоростью* $\boldsymbol{v}$. *Определить движение этой системы по плоскости, если в начальный момент и кольцо, и точка находились в покое.*

Так как горизонтальная составляющая главного вектора внешних сил равна нулю и в начальный момент времени центр масс C *всей системы покоился, то и в последующем движении системы он будет оставаться в покое. Расстояния точки* C *будут* (рис. 84): *от центра* O *кольца*

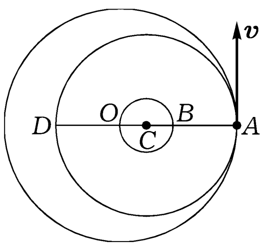

Рис. 84

$$OC = \frac{m}{M+m}R,$$

от точки A

$$AC = \frac{M}{M+m}R.$$

Таким образом, и центр O *кольца, и материальная точка* A *будут двигаться по концентрическим окружностям с центром в точке* C, *причем* *и O, и A будут всегда находиться в диаметрально противоположных по отношению к C точках своих траекторий.*

Чтобы определить угловую скорость ω вращения кольца, воспользуемся тем, что, в силу равенства нулю главного момента внешних сил относительно неподвижной вертикальной оси Cz, кинетический момент системы относительно этой оси постоянен (равен нулю, так как в начальный момент времени система покоилась). Имеем:

$$J_C\omega + m(v + \omega \cdot AC) \cdot AC = 0,$$

где J_C — момент инерции кольца относительно оси C_z. Так как момент инерции J_O кольца относительно параллельной C_z оси Oz, очевидно, равен MR^2, то, согласно п. 76,

$$J_C = MR^2 + M \cdot OC^2.$$

Воспользовавшись еще выписанными выше выражениями для AC и OC, получим окончательно

$$\omega = -\frac{v}{R} \cdot \frac{m(M+m)}{M^2 + 3mM + 2m^2}.$$

Знак минус в полученном выражении для ω указывает на то, что вращение кольца происходит по часовой стрелке, если смотреть со стороны положительного направления оси Cz.

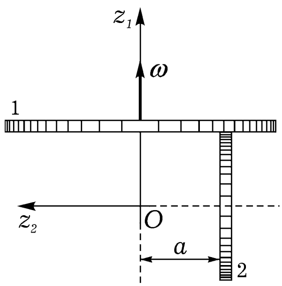

Рис. 85

Пример 3. *Два тонких однородных диска 1 и 2, массы и радиусы которых равны соответственно m_1, r_1 и m_2, r_2, могут вращаться вокруг их ортогональных осей Oz_1 и Oz_2* (рис. 85). *Диск 1 раскрутили до угловой скорости ω и привели затем в контакт с невращающимся диском 2, причем расстояние между точкой соприкосновения и осью диска 1 равно a. Через некоторое время (за счет трения) диски начнут вращаться без проскальзывания. Найти установившиеся угловые скорости дисков.*

Для решения задачи используем интегральную форму теоремы об изменении кинетического момента. При $t = 0$ кинетические моменты K_{z_1} и K_{z_2} дисков 1 и 2 будут соответственно равны:

$$K_{z_1} = J_{z_1}\omega, \qquad K_{z_2} = 0,$$

а в момент времени Δt, равный продолжительности процесса установления движения дисков,

$$K_{z_1} = J_{z_1}\omega_1, \qquad K_{z_2} = J_{z_2}\omega_2.$$

Здесь ω_i — модуль установившейся угловой скорости, а $J_{z_i} = \frac{1}{2}m_i r_i^2$ — момент инерции i-го диска относительно оси Oz_i ($i = 1,\ 2$). Приращения кинетических моментов первого и второго дисков соответственно равны $J_{z_1}(\omega_1 - \omega)$ и $J_{z_2}\omega_2$. Изменение кинетических моментов вызвано действием силы трения в точке контакта дисков в течение времени Δt. Сила трения, модуль которой F одинаков для обоих дисков, тормозит первый диск и ускоряет второй. Согласно равенству (9), *имеем*

$$\frac{1}{2}m_1 r_1^2(\omega_1 - \omega) = -a\int\limits_0^{\Delta t} F dt, \qquad \frac{1}{2}m_2 r_2^2\omega_2 = r_2\int\limits_0^{\Delta t} F dt.$$

Добавив сюда еще уравнение

$$\omega_1 a = \omega_2 r_2,$$

выражающее условие отсутствия скольжения в установившемся режиме движения дисков, получим систему трех уравнений относительно угловых скоростей дисков ω_1, ω_2 и модуля импульса силы трения $\int\limits_0^{\Delta t} F\, dt$. Решив ее, найдем:

$$\omega_1 = \frac{m_1 r_1^2}{m_1 r_1^2 + m_2 a^2}\omega, \quad \omega_2 = \frac{m_1 a r_1^2}{r_2(m_1 r_1^2 + m_2 a^2)}\omega.$$

Пример 4. *Диск массой m и радиусом a катится по горизонтальной плоскости без скольжения. Центр тяжести C диска находится на расстоянии b от его геометрического центра O, момент инерции диска относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через точку C, равен J_C. Пусть φ — угол между отрезком OC и вертикалью* (рис. 86). *Составить дифференциальное уравнение, описывающее изменение угла φ со временем.*

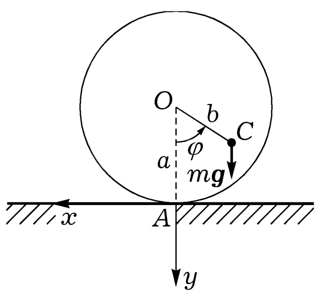

Рис. 86

Для решения задачи воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента в форме (7). *За* *точку A примем геометрическую точку, которая принадлежит следу (прямой линии), вычерчиваемому точкой касания диска с плоскостью. В силу отсутствия скольжения для скорости точки A в системе координат $Axyz$ (оси Ax, Ay показаны на рисунке, ось Az направлена перпендикулярно плоскости рисунка на читателя) имеем: $\boldsymbol{v}'_A = (a\dot{\varphi},\ 0,\ 0)$. Вектор $\overline{AC}$ имеет компоненты: $-b\sin\varphi$, $-a + b\cos\varphi$, 0; $AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi$. Для угловой скорости диска $\boldsymbol{\omega}$, скорости его центра масс $\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{\omega}\times\overline{AC}$ и кинетического момента $\boldsymbol{K}_A$ диска относительно точки A имеем:*

$$\boldsymbol{\omega}' = (0,\ 0,\ \dot{\varphi}), \quad \boldsymbol{v}'_C = ((a - b\cos\varphi)\dot{\varphi},\ -b\sin\varphi\dot{\varphi},\ 0),$$

$$\boldsymbol{K}'_A = (0,\ 0,\ (J_C + mAC^2)\dot{\varphi}).$$

Момент внешних сил относительно точки A создает только сила тяжести:

$$\boldsymbol{M}_A^{(e)} = (0,\ 0,\ -mgb\sin\varphi).$$

Проектирование обеих частей векторного уравнения (7) на ось Az приводит к искомому уравнению, описывающему изменение угла φ во времени:

$$[J_C + m(a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi)]\ddot{\varphi} + mab\sin\varphi\dot{\varphi}^2 + mgb\sin\varphi = 0.$$

88. Теорема об изменении кинетической энергии. Пусть точки P_ν системы переместились так, что их радиусы-векторы $\boldsymbol{r}_\nu$ в инерциальной системе отсчета получили приращения $d\boldsymbol{r}_\nu$. Найдем, как при этом изменилась кинетическая энергия системы T. Так как

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu^2,$$

то для дифференциала кинетической энергии имеем такое выражение:

$$dT = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu \cdot d\boldsymbol{v}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu \cdot \frac{d\boldsymbol{v}_\nu}{dt}\,dt =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{w}_\nu \cdot \boldsymbol{v}_\nu\,dt = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{w}_\nu \cdot d\boldsymbol{r}_\nu.$$

Принимая во внимание дифференциальные уравнения (1), перепишем последнее равенство в виде

$$dT = \sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{F}_\nu^{(e)} + \boldsymbol{F}_\nu^{(i)}) \cdot d\boldsymbol{r}_\nu =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu{}^{(e)} \cdot d\boldsymbol{r}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu{}^{(i)} \cdot d\boldsymbol{r}_\nu = d'A^{(e)} + d'A^{(i)}.$$

Таким образом,

$$dT = d'A^{(e)} + d'A^{(i)}. \tag{14}$$

Последнее равенство выражает теорему об изменении кинетической энергии системы: *дифференциал кинетической энергии системы равен элементарной работе всех сил системы.*

Подчеркнем, что, в отличие от двух рассмотренных выше основных теорем динамики, в теореме об изменении кинетической энергии речь идет о всех силах системы: как внешних, так и внутренних. Тот факт, что силы, с которыми взаимодействуют две точки системы, равны по величине и противоположно направлены, не приводит к равенству нулю работы $d'A^{(i)}$ внутренних сил системы, так как при подсчете работы важны и перемещения точек, а они у двух взаимодействующих точек не обязательно одинаковы. Как мы видели в п. 52, для твердого тела работа внутренних сил равна нулю, поэтому для него равенство (14) принимает более простой вид

$$dT = d'A^{(e)}. \tag{15}$$

Проинтегрировав обе части равенства (14) от t_1 до t_2, получим интегральную форму теоремы об изменении кинетической энергии

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \int_{t_1}^{t_2} d'A^{(e)} + \int_{t_1}^{t_2} d'A^{(i)}, \tag{16}$$

т. е. *приращение кинетической энергии системы за конечное время равно работе всех сил системы за то же время.*

Пусть все силы системы (внешние и внутренние) потенциальны и их потенциал П не зависит явно от времени. В этом случае (п. 53) элементарная работа сил системы будет полным дифференциалом

$$d'A^{(e)} + d'A^{(i)} = -d\Pi. \tag{17}$$

Из (17) и (14) следует, что тогда $dT + d\Pi = 0$.

Сумма кинетической и потенциальнои энергий называется *полной механической энергией* системы. Из последнего равенства следует, что

$$E = T + \Pi = h = \text{ const}, \tag{18}$$

т. е. *если все силы системы потенциальны и потенциал не зависит от времени, то при движении системы ее полная механическая энергия постоянна.* Это — *закон сохранения механической энергии.* Равенство (18) называется *интегралом энергии.*

Следует иметь в виду, что для справедливости закона сохранения механической энергии требование о том, чтобы все силы системы были потенциальными, не обязательно. Достаточно потребовать, чтобы потенциальными были силы, работа которых на действительном перемещении системы отлична от нуля. Например, работа реакций стационарных идеальных связей равна нулю, и если остальные силы системы потенциальны и потенциал не зависит явно от времени, то для такой системы справедлив закон сохранения механической энергии.

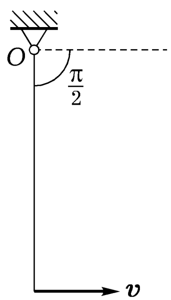

Рис. 87

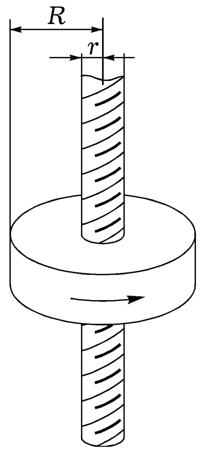

Рис. 88

Пример 1. *Тонкий однородный стержень длиной l вращается на шарнире O в вертикальной плоскости* (рис. 87). *Какую скорость v нужно сообщить нижнему концу стержня, чтобы угол наибольшего отклонения стержня от вертикали равнялся $\pi/2$? Помимо силы тяжести и реакции шарнира на стержень действует постоянный момент $m_{\text{сопр}}$, препятствующий вращению стержня.*

Если нижний конец имеет начальную скорость v, то угловая скорость стержня в начале движения равна v/l. Пусть m — масса стерж-

ня. Тогда момент инерции стержня относительно оси вращения равен $\frac{1}{3}ml^2$*, а кинетическая энергия стержня в начальный момент равна* $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}ml^2 \cdot (v/l)^2$*.*

При переходе стержня в горизонтальное положение сила тяжссти совершит работу, равную $-mgl/2$*, а силы сопротивления вращению — работу* $-(\pi/2)m_{\text{сопр}}$*. Принимая во внимание интегральную форму теоремы об изменении кинетической энергии, получим*

$$\frac{1}{6}mv^2 = \frac{1}{2}mgl + \frac{\pi}{2}m_{\text{сопр}},$$

откуда

$$v = \sqrt{3(gl + \pi m_{\text{сопр}}/m)}.$$

Пример 2. *На вертикально поставленный винт надета массивная гайка. Ей сообщена угловая скорость* ω *такого направления, что гайка начинает подниматься. На какую высоту поднимется гайка? Трение отсутствует. Шаг винта* h*, его радиус* r*, радиус гайки* R (рис. 88).

Пусть v *— скорость движения гайки вдоль оси винта в начале движения. Она найдется из пропорции*

$$\frac{v}{h} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Примем, что гайка имеет форму цилиндра с осевым отверстием радиуса r*. Если* m *— масса гайки, то ее момент инерции* J *относительно оси винта будет определяться равенством*

$$J = \frac{1}{2}m(R^2 + r^2).$$

Пусть высота подъема гайки H*, тогда из интеграла энергии имеем*

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\omega h}{2\pi}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}m(R^2 + r^2)\omega^2 = mgH,$$

откуда

$$H = \frac{\omega^2}{4g}\left(R^2 + r^2 + \frac{h^2}{2\pi^2}\right).$$

Пример 3. *Цилиндр, который может вращаться вокруг вертикальной оси* AB*, имеет на своей поверхности винтовой желоб; в него вложен шарик массой* m*, который можно считать материальной точкой. Найти относительную скорость* u *шарика в его движении по желобу и угловую скорость* ω *цилиндра при движении системы под действием силы тяжести, полагая, что масса цилиндра равна массе шарика, радиус цилиндра* a *и угол* α *наклона касательной к винтовой нарезке равен* $\pi/4$*. Найти также давление шарика на желоб* (рис. 89).

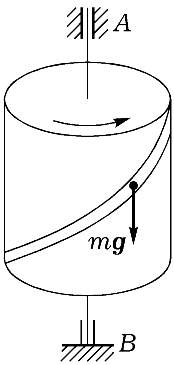

Рис. 89

Если шарик пройдет по вертикали расстояние z, то его потенциальная энергия уменьшится на величину mgz. Приравняв ее кинетической энергии системы, будем иметь

$$mgz = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}ma^2\omega^2 + \\ + \frac{1}{2}m\left[\left(a\omega - u\cos\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(u\sin\frac{\pi}{4}\right)^2\right],$$

или

$$2gz = \frac{3}{2}a^2\omega^2 - \sqrt{2}a\omega u + u^2.$$

Второе уравнение для определения неизвестных ω и u получим из теоремы об изменении кинетического момента. Так как внешние силы не дают момента относительно вертикальной оси и в начальный момент вся система была неподвижна, то кинетический момент системы относительно оси AB постоянен и равен нулю:

$$\frac{1}{2}ma^2\omega + m\left(a\omega - u\cos\frac{\pi}{4}\right)a = 0,$$

откуда

$$3a\omega - \sqrt{2}u = 0.$$

Решая совместно полученные уравнения для u и ω, находим

$$u = \sqrt{3gz}, \qquad \omega = \frac{\sqrt{6gz}}{3a}.$$

Пусть N — давление шарика на желоб. Составим уравнение (14) *только для одного цилиндра:*

$$d\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}ma^2\omega^2\right) = N\cos\frac{\pi}{4}\cdot a\,d\varphi,$$

или, так как $d\varphi = \omega\,dt$,

$$ma\,d\omega = \sqrt{2}N\,dt.$$

Но

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dz}\frac{dz}{dt} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{g}{6z}}u\sin\frac{\pi}{4},$$

и, следовательно,

$$N = \frac{ma}{\sqrt{2}}\frac{1}{a}\sqrt{\frac{g}{6z}}\sqrt{3gz}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}mg.$$

89. Основные теоремы динамики в неинерциальной системе отсчета. Будем теперь изучать движение механической системы в произвольно движущейся неинерциальной системе отсчета. Абсолютное ускорение $\boldsymbol{w}_\nu$ точки P_ν системы найдем при помощи теоремы о сложении ускорений (п. 32):

$$\boldsymbol{w}_\nu = \boldsymbol{w}_{\nu r} + \boldsymbol{w}_{\nu e} + \boldsymbol{w}_{\nu c} \qquad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ N). \tag{19}$$

Здесь $\boldsymbol{w}_{\nu r}$ и $\boldsymbol{w}_{\nu e}$ — относительное и переносное ускорения точки P_ν, а $\boldsymbol{w}_{\nu c}$ — ее кориолисово ускорение; $\boldsymbol{w}_{\nu c} = 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{\nu r}$, где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость неинерциальной системы координат относительно инерциальной, а $\boldsymbol{v}_{\nu r}$ — относительная скорость точки P_ν. Подставив выражение (19) для абсолютного ускорения в уравнения (1), получим

$$m_\nu \boldsymbol{w}_{\nu r} = \boldsymbol{F}_\nu^{(e)} + \boldsymbol{F}_\nu^{(i)} + \boldsymbol{j}_{\nu e} + \boldsymbol{j}_{\nu c} \quad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ N), \tag{20}$$

где $\boldsymbol{j}_{\nu e} = -m_\nu \boldsymbol{w}_{\nu e}$, $\boldsymbol{j}_{\nu c} = -m_\nu \boldsymbol{w}_{\nu c} = -2m_\nu \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{\nu r}$; величину $\boldsymbol{j}_{\nu e}$ называют *переносной*, а $\boldsymbol{j}_{\nu c}$ — *кориолисовой силами инерции.*

Таким образом, второй закон Ньютона может быть применен в неинерциальной системе отсчета, если к силам, приложенным к точкам системы, добавить еще переносные и кориолисовы силы инерции.

Но полученные в п. 86–88 теоремы динамики вытекали из уравнений (1). Следовательно, все сформулированные выше теоремы динамики будут верны и в неинерциальной системе отсчета, если к силам, приложенным к системе, добавить переносные и кориолисовы силы инерции для ее точек. При этом силы инерции следует формально относить к внешним силам.

Например, теорема об изменении количества движения в неинерциальной системе отсчета выглядит так:

$$\frac{d\boldsymbol{Q}_r}{dt} = \boldsymbol{R}^{(e)} + \boldsymbol{J}_e + \boldsymbol{J}_c, \tag{21}$$

где $\boldsymbol{Q}_r = \sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_{\nu r}$, $\boldsymbol{R}^{(e)}$ — главный вектор внешних сил, приложенных к системе, $\boldsymbol{J}_e = \sum\limits_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{j}_{\nu e}$ — главный вектор переносных сил инерции, $\boldsymbol{J}_c = \sum\limits_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{j}_{\nu c}$ — главный вектор кориолисовых сил инерции.

Теорема об изменении кинетического момента в неинерциальной системе отсчета записывается в виде (для неподвижного относительно неинерциальной системы центра A)

$$\frac{d\boldsymbol{K}_{Ar}}{dt} = \boldsymbol{M}_A^{(e)} + \boldsymbol{M}_{AJ_e} + \boldsymbol{M}_{AJ_c}. \tag{22}$$

Здесь $\boldsymbol{K}_{Ar} = \sum\limits_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_\nu \times m_\nu \boldsymbol{v}_{\nu r}$, $\boldsymbol{\rho}_\nu$ — радиус-вектор точки P_ν относительно центра A, $\boldsymbol{M}_A^{(e)}$ — главный момент внешних сил, приложенных к системе, относительно точки A, $\boldsymbol{M}_{AJ_e}$ и $\boldsymbol{M}_{AJ_c}$ — главные моменты переносных и кориолисовых сил инерции относительно точки A.

Теорема об изменении кинетической энергии T_r системы, соответствующей ее движению в неинерциальной системе координат, будет такой:

$$dT_r = d'A^{(e)} + d'A^{(i)} + d'A_{J_e}. \tag{23}$$

Здесь

$$T_r = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_{\nu r}^2, \tag{24}$$

$d'A^{(e)}$, $d'A^{(i)}$ — элементарная работа внешних и внутренних сил, приложенных к системе, на относительных перемещениях $d\boldsymbol{\rho}_\nu$ ее точек, а $d'A_{J_e}$ — элементарная работа переносных сил инерции на тех же перемещениях. В (23) отсутствует работа кориолисовых сил инерции: эта работа равна нулю, так как кориолисова сила инерции для каждой точки P_ν перпендикулярна ее относительному перемещению $d\boldsymbol{\rho}_\nu$.

Пример 1. *При вращении сосуда, наполненного жидкостью, вокруг вертикальной оси жидкость отбрасывается к стенкам и внутри сосуда образуется воронкообразная полость, ограниченная поверхностью вращения* (рис. 90). *Определить форму этой поверхности.*

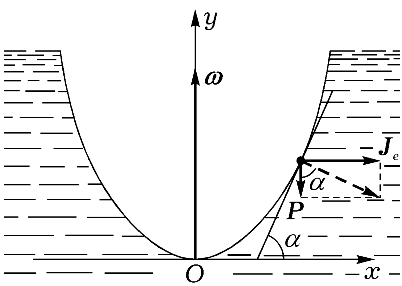

Рис. 90

Рассмотрим какую-нибудь частицу жидкости массой m, расположенную на ее поверхности; координаты частицы обозначим x и y (рис. 90). *Задача состоит в нахождении зависимости y от x.*

Во вращающейся вместе с жидкостью системе координат Oxy частица покоится. Следовательно, равнодействующая силы тяжес-

ти $P = mg$ и переносной силы инерции $J_e = m\omega^2 x$ (ω — угловая скорость вращения жидкости) ортогональна поверхности жидкости. Из рис. 90 находим, что

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{J_e}{P} = \frac{\omega^2 x}{g}.$$

Но $\operatorname{tg}\alpha = dy/dx$, поэтому

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2}{g}x.$$

Решив это дифференциальное уравнение (с начальным условием $y(0) = 0$), получим

$$y = \frac{\omega^2}{2g}x^2.$$

Следовательно, воронка, образующаяся при вращении сосуда, представляет собой параболоид вращения.

Пример 2. *Материальная точка положена на гладкую горизонтальную плоскость Oxy, вращающуюся вокруг неподвижной вертикальной оси Oz с постоянной угловой скоростью ω. Точке сообщена некоторая начальная скорость, лежащая в этой плоскости. Показать, что в относительном движении точки имеют место следующие равенства:*

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \omega^2(x^2 + y^2) = \text{const}, \qquad (a)$$

$$x\dot{y} - \dot{x}y + \omega(x^2 + y^2) = \text{const}. \qquad (б)$$

Во вращающейся системе координат имеем

$$\boldsymbol{\omega}' = (0,\ 0,\ \omega), \quad \boldsymbol{v}_r' = (\dot{x},\ \dot{y},\ 0), \quad \boldsymbol{w}_e' = (-\omega^2 x,\ -\omega^2 y,\ 0).$$

Кинетическая энергия точки в ее относительном движении определяется равенством

$$T_r = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2).$$

Для переносной и кориолисовой сил инерции имеем соответственно (m — масса материальной точки):

$$\boldsymbol{j}_e' = m\omega^2(x,\ y,\ 0), \qquad \boldsymbol{j}_c' = 2m\omega(\dot{y},\ -\dot{x},\ 0).$$

Из выражения для переносной силы инерции видно, что она является потенциальной с потенциалом, определяемым по формуле

$$\Pi_r = -\frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2).$$

Внешние силы (сила тяжести и реакция плоскости) перпендикулярны плоскости Oxy, в которой происходит движение точки и, следовательно, работы не совершают. Поэтому из (23) следует, что в относительном движении справедлив интеграл энергии: $T_r + \Pi_r = \text{const}$, т. е.

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) = \text{const}.$$

Этот интеграл с точностью до множителя $m/2$ совпадает с доказываемым равенством (а).

Чтобы показать справедливость равенства (б), воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента (22), приняв за центр A точку O. Обе части векторного равенства (22) будем проектировать на ось Oz.

Моменты внешних сил относительно оси Oz равны нулю. Переносная сила инерции проходит через точку O и, следовательно, тоже не создает момента относительно Oz. Для момента M_z кориолисовой силы инерции получаем

$$M_z = -2m\omega(x\dot{x} + y\dot{y}).$$

Замечая, что проекция на ось Oz кинетического момента точки в ее относительном движении равна $m(x\dot{y} - \dot{x}y)$, получаем из (22)

$$m\frac{d}{dt}(x\dot{y} - \dot{x}y) = -2m\omega(x\dot{x} + y\dot{y}),$$

или

$$\frac{d}{dt}(x\dot{y} - \dot{x}y) + \omega\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = 0.$$

Отсюда следует справедливость равенства (б) на стр. 173.

90. О теоремах динамики для движения относительно центра масс. В предыдущем пункте мы видели, что основные теоремы динамики в неинерциальной системе отсчета можно записать в той же форме, что и в инерциальной. Отличие заключается только в том, что в формулах, выражающих основные теоремы, появляются добавочные члены, обусловленные неинерциальностью системы отсчета.

Но существует подвижная система отсчета, являющаяся в общем случае неинерциальной, такая, что для движения в этой системе отсчета теоремы об изменении кинетического момента и кинетической энергии выглядят точно так же, как и в инерциальной системе. Этой подвижной системой отсчета является кенигова система координат, т. е. (см. п. 81) поступательно движущаяся система координат с началом в центре масс механической системы. Для теоремы об изменении кинетического момента мы это видели в п. 87. Рассмотрим теперь теорему об изменении кинетической энергии.

Из равенств (20), (24) и из того, что переносное ускорение $\boldsymbol{w}_{\nu e}$ для всех точек одинаково и равно ускорению центра масс $\boldsymbol{w}_C$, получаем

$$dT_r = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_{\nu r} \cdot d\boldsymbol{v}_{\nu r} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{w}_{\nu r} \cdot d\boldsymbol{\rho}_\nu =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{F}_\nu^{(e)} + \boldsymbol{F}_\nu^{(i)} + \boldsymbol{j}_{\nu e} + \boldsymbol{j}_{\nu c}) \cdot d\boldsymbol{\rho}_\nu =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu^{(e)} \cdot d\boldsymbol{\rho}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu^{(i)} \cdot d\boldsymbol{\rho}_\nu - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{w}_{\nu e} \cdot d\boldsymbol{\rho}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{j}_{\nu c} \cdot d\boldsymbol{\rho}_\nu =$$

$$= d'A^{(e)} + d'A^{(i)} - \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu d\boldsymbol{\rho}_\nu \right) \cdot \boldsymbol{w}_C + \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{j}_{\nu c} \cdot d\boldsymbol{\rho}_\nu .$$

Последняя сумма в этом равенстве обращается в нуль, так как кориолисова сила инерции $\boldsymbol{j}_{\nu c}$ перпендикулярна $d\boldsymbol{\rho}_\nu$. Сумма $\sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{\rho}_\nu$ равна нулю из-за выбора начала системы координат в центре масс системы; следовательно, сумма $\sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu d\boldsymbol{\rho}_\nu$ также равна нулю. Поэтому окончательно имеем следующее выражение для дифференциала кинетической энергии движения системы относительно центра масс:

$$dT_r = d'A^{(e)} + d'A^{(i)}. \tag{25}$$

Таким образом, теорема об изменении кинетической энергии выглядит точно так же, как и в случае инерциальной системы отсчета. Отличие заключается только в том, что элементарная работа внешних и внутренних сил системы вычисляется на перемещениях точек их приложения по отношению к центру масс.

Пример 1. *Рассмотрим произвольную механическую систему, движущуюся в пустоте в однородном поле тяжести. Перенеся все силы системы в ее центр масс C, получим равнодействующую $\boldsymbol{P}$, равную общему весу системы. На основании теоремы о движении центра масс* (п. 86) *мы можем сказать, что точка C будет описывать некоторую параболу.*

Момент внешних сил относительно осей кениговой системы координат равен нулю. Поэтому кинетический момент $\boldsymbol{K}_C$ системы относительно центра масс остается постоянным во все время движения.

Далее, так как точка приложения равнодействующей внешних сил — веса $\boldsymbol{P}$ *системы неподвижна в кёниговой системе координат (совпадает с ее началом), то работа внешних сил на относительных перемещениях системы равна нулю. Поэтому, согласно (25), кинетическая энергия* T_r *в относительном движении изменяется только вследствие действия внутренних сил. В частности, если рассматриваемая механическая система является твердым телом, то кинетическая энергия остается постоянной.*