

ГЛАВА VII

Динамика твердого тела

§ 1. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

91. Уравнение движения. Определение реакций. Рассмотрим твердое тело, имеющее две неподвижные точки O и O_1 (рис. 91).

Пусть \mathbf{F} и \mathbf{F}_1 — реакции связи в точках O и O_1 , \mathbf{R} — главный вектор активных сил, а \mathbf{M}_O — главный их момент относительно точки O .

Примем точку O за начало неподвижной системы координат $OXYZ$, ось OZ которой направим по оси OO_1 . С телом жестко свяжем систему координат $Oxyz$; ее ось Oz направлена вдоль оси OO_1 . Тело имеет одну степень свободы. За обобщенную координату примем угол φ , образуемый осями OX и Ox .

Чтобы получить уравнения, описывающие движение твердого тела, воспользуемся теоремами об изменении количества движения и момента количества движения. Обе части соответствующих этим теоремам уравнения (5) п. 86 и уравнения (8) п. 87 спроектируем на оси вращающейся системы координат $Oxyz$. Для этого воспользуемся формулой (5)

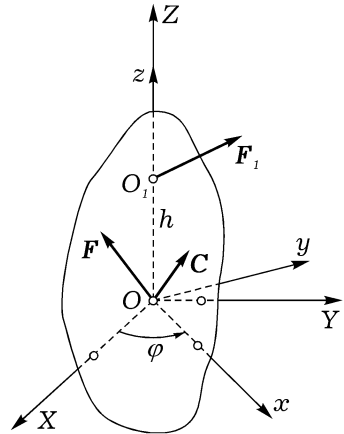


Рис. 91

п. 30, связывающей абсолютную и относительную производные вектора. Получим:

$$M \frac{\tilde{d}\mathbf{v}_C}{dt} + M\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_C = \mathbf{R} + \mathbf{F} + \mathbf{F}_1, \quad (1)$$

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{K}_O}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}_O = \mathbf{M}_O + \overline{OO_1} \times \mathbf{F}_1. \quad (2)$$

Здесь M — масса тела, $\boldsymbol{\omega}$ — его угловая скорость, \mathbf{v}_C — скорость центра масс тела; реакция \mathbf{F} не вошла в уравнение (2), так как ее момент

относительно точки O равен нулю. Пусть в связанной с телом системе координат

$$\mathbf{R} = \begin{vmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{vmatrix}, \quad \mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{vmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{vmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{vmatrix}, \quad \mathbf{F}_1 = \begin{vmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{1z} \end{vmatrix},$$

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{vmatrix} p \\ q \\ r \end{vmatrix}, \quad \overline{OC} = \begin{vmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{vmatrix}, \quad \mathbf{K}_O = \begin{vmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{vmatrix}.$$

Очевидно, что $p = 0$, $q = 0$, $r = \dot{\varphi}$, и из формул (8) п. 82 следует, что $K_x = -J_{xz}\dot{\varphi}$, $K_y = -J_{yz}\dot{\varphi}$, $K_z = J_z\dot{\varphi}$, где J_{xz} , J_{yz} — центробежные, а J_z — осевой моменты инерции тела для точки O .

Принимая во внимание, что $\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega} \times \overline{OC}$ и обозначая буквой h расстояние между неподвижными точками тела O и O_1 , получим скалярную форму векторных уравнений (1) и (2) в виде

$$\begin{aligned} -My_C\ddot{\varphi} - Mx_C\dot{\varphi}^2 &= R_x + F_x + F_{1x}, \\ Mx_C\ddot{\varphi} - My_C\dot{\varphi}^2 &= R_y + F_y + F_{1y}, \\ 0 &= R_z + F_z + F_{1z}, \\ -J_{xz}\ddot{\varphi} + J_{yz}\dot{\varphi}^2 &= M_x - hF_{1y}, \\ -J_{yz}\ddot{\varphi} - J_{xz}\dot{\varphi}^2 &= M_y + hF_{1x}, \\ J_z\ddot{\varphi} &= M_z. \end{aligned} \tag{3}$$

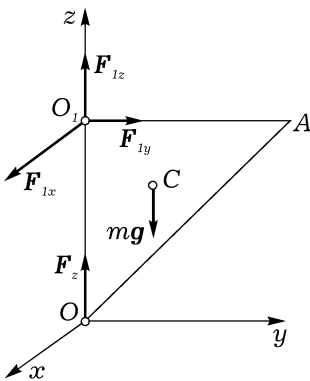


Рис. 92

системы (3); они зависят от вращения тела.

ПРИМЕР 1. *Равнобедренный прямоугольный треугольник OO_1A вращается вокруг вертикальной оси, к которой он подвешен катетом*

Последнее уравнение не содержит реакций и является дифференциальным уравнением вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Остальные пять уравнений служат для нахождения реакций. Последняя задача является неопределенной. Действительно, из третьего уравнения системы (3) видно, что нельзя отдельно найти продольные реакции F_z и F_{1z} , а можно определить лишь их сумму. Эта сумма не зависит от характера вращательного движения тела. Поперечные реакции F_x , F_{1x} , F_y , F_{1y} находятся из первого, второго, четвертого и пятого уравнений

$OO_1 = a$ (рис. 92). Какова должна быть угловая скорость вращения, чтобы боковое давление на нижнюю опору O равнялось нулю? Треугольник считать тонкой однородной пластинкой.

Для решения задачи воспользуемся уравнениями (3). В рассматриваемом случае

$$x_C = 0, \quad y_C = a/3, \quad h = a,$$

$J_{xz} = 0$, а для J_{yz} получаем

$$\begin{aligned} J_{yz} &= \int yz \, dm = \frac{2m}{a^2} \int_0^a z \left(\int_0^z y \, dy \right) dz = \\ &= \frac{m}{a^2} \int_0^a z^3 \, dz = \frac{1}{4} ma^2. \end{aligned}$$

Далее,

$$R_x = R_y = 0, \quad R_z = -mg, \quad M_x = -\frac{1}{3}mga, \quad M_y = M_z = 0.$$

Учитывая еще, что по условию задачи $F_x = F_y = 0$, получаем уравнения (3) в виде

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}ma\ddot{\varphi} &= F_{1x}, \quad -\frac{1}{3}ma\dot{\varphi}^2 = F_{1y}, \quad 0 = -mg + F_z + F_{1z}, \\ \frac{1}{4}ma^2\dot{\varphi}^2 &= -\frac{1}{3}mga - aF_{1y}, \quad -\frac{1}{4}ma^2\ddot{\varphi} = aF_{1x}, \quad J_z\ddot{\varphi} = 0. \end{aligned}$$

Из последнего уравнения следует, что $\dot{\varphi} = \omega = \text{const}$, т. е. вращение треугольника происходит с постоянной угловой скоростью.

Исключив из второго и четвертого уравнений величину F_{1y} , перейдем к соотношению, определяющему величину угловой скорости. Окончательно найдем, что

$$\omega = 2\sqrt{g/a}.$$

92. Условия, при которых динамические реакции равны статическим. Если в первом, втором, четвертом и пятом уравнениях системы (3) положить $\dot{\varphi} = 0$, $\ddot{\varphi} = 0$, то получим систему уравнений для определения поперечных статических реакций. Если же тело вращается, то либо $\dot{\varphi}$, либо $\ddot{\varphi}$, либо та и другая из этих величин не будут равными нулю. Поэтому левые части упомянутых уравнений в общем случае не будут тождественно равными нулю во все время движения и, следовательно, динамические реакции отличаются от статических.

Найдем условия, при которых динамические реакции равны статическим. Приравнявая нулю левые части первого, второго, четвертого и пятого уравнений системы (3), получим следующие две пары равенств:

$$y_C \ddot{\varphi} + x_C \dot{\varphi}^2 = 0, \quad -y_C \dot{\varphi}^2 + x_C \ddot{\varphi} = 0. \quad (4)$$

$$J_{xz} \ddot{\varphi} - J_{yz} \dot{\varphi}^2 = 0, \quad J_{xz} \dot{\varphi}^2 + J_{yz} \ddot{\varphi} = 0. \quad (5)$$

Равенства (4) и (5) можно рассматривать как однородные системы линейных уравнений соответственно относительно x_C , y_C и J_{xz} , J_{yz} . Определители этих систем одинаковы и равны величине $\dot{\varphi}^2 + \ddot{\varphi}^4$. Если тело вращается, то эта величина не может быть тождественно равной нулю. Поэтому равенства (4) и (5) удовлетворяются только при выполнении условий

$$x_C = y_C = 0, \quad J_{xz} = J_{yz} = 0.$$

Таким образом, *динамические реакции при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси равны статическим тогда и только тогда, когда ось вращения является главной центральной осью инерции тела.*

93. Уравнение движения физического маятника. *Физическим маятником* называется твердое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси под действием силы тяжести. Выберем неподвижную систему координат $OXYZ$ так, чтобы ее ось OZ совпадала с осью вращения маятника, а ось OY была направлена вертикально вниз. Связанную с маятником систему координат $Oxyz$ выберем так, чтобы центр масс маятника лежал на оси Oy , а оси Ox и OZ совпадали. Тогда если a — расстояние от центра тяжести до оси вращения, то $M_z = -mga \sin \varphi$, и из последнего уравнения системы (3) получим дифференциальное уравнение движения физического маятника в виде

$$\ddot{\varphi} + \frac{mga}{J_z} \sin \varphi = 0. \quad (6)$$

Сравнивая это уравнение с уравнением движения плоского математического маятника, которое задается равенством (6) п. 57, находим, что физический маятник будет колебаться по такому же закону, что и математический маятник длиной

$$l = \frac{J_z}{ma}. \quad (7)$$

Величину l , определяемую по формуле (7), называют *приведенной длиной* физического маятника.

94. Фазовая плоскость для уравнения движения маятника. Для выяснения общих свойств движения систем с одной степенью

свободы очень удобен метод фазовой плоскости. Рассмотрим его на примере анализа дифференциального уравнения

$$\ddot{x} = f(x). \quad (8)$$

Будем считать, что правая часть этого уравнения удовлетворяет условию существования и единственности его решения.

Можно считать, что уравнение (8) описывает движение в системе с одной степенью свободы, в которой x играет роль обобщенной координаты, а кинетическая и потенциальная энергия определены равенствами

$$T = \frac{1}{2}\dot{x}^2, \quad \Pi = - \int f(x) dx.$$

Полная механическая энергия $E = T + \Pi$ постоянна во все время движения, т. е. уравнение (8) имеет первый интеграл

$$E(x, \dot{x}) \equiv \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \Pi(x) = h = \text{const}. \quad (9)$$

Уравнение (8) эквивалентно системе двух уравнений

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = f(x). \quad (10)$$

Плоскость с координатами x, y называется *фазовой плоскостью* уравнения (8). Точки фазовой плоскости называются *фазовыми точками*. В каждой точке плоскости, где определена функция $f(x)$, система (10) задает вектор с компонентами \dot{x}, \dot{y} ; этот вектор называется *фазовой скоростью*. Решение системы (10) задает движение фазовой точки по фазовой плоскости, причем скорость движения фазовой точки равна фазовой скорости в том месте плоскости, где в данный момент находится точка. Кривая, которую описывает фазовая точка, называется *фазовой кривой*. В частных случаях фазовая кривая может состоять из одной точки. Такие точки называются *положениями равновесия*. Вектор фазовой скорости в положении равновесия равен нулю.

Интеграл (9) позволяет легко находить фазовые кривые. На каждой фазовой кривой значение полной механической энергии E постоянно, поэтому каждая фазовая кривая целиком принадлежит одному уровню энергии $E(x, \dot{x}) = h$.

Запишем интеграл (9) в виде

$$\dot{x}^2 = 2(h - \Pi(x)). \quad (11)$$

Совокупность фазовых кривых обладает следующими свойствами, которые полезно иметь в виду при анализе уравнения (8).

1. При данном h фазовые кривые могут располагаться только в той части фазовой плоскости, где выполняется неравенство $\Pi(x) \leq h$. Эту часть плоскости называют *областью возможности движения*. Неравенство $\Pi(x) \leq h$ следует из того, что для реальных движений правая часть формулы (11) не может быть отрицательной, так как ее левая часть есть квадрат вещественной величины.

2. Как видно из системы (10), положения равновесия лежат на оси x фазовой плоскости, причем в положении равновесия $x = x_*$, где x_* — критическая точка потенциальной энергии, т. е. такая точка, в которой $d\Pi/dx = 0$.

3. Если $x = x_*$ является точкой локального минимума функции $\Pi(x)$, причем $d^2\Pi/dx^2 > 0$ при $x = x_*$, то точка $(x_*, 0)$ на фазовой плоскости будет особой точкой типа центр для системы (10). Если же $x = x_*$ — точка локального максимума и в ней $d^2\Pi/dx^2 < 0$, то $(x_*, 0)$ — особая точка типа седло.

4. Совокупность фазовых кривых симметрична относительно оси x . Это свойство вытекает из формулы (11) ввиду четности входящих в нее величин относительно \dot{x} .

5. В точках оси x , отличных от положений равновесия, фазовые кривые ортогональны оси x . Это свойство сразу видно из системы (10), так как в этих точках $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = f(x) \neq 0$.

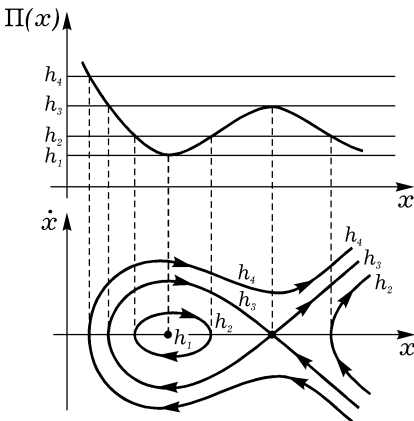


Рис. 93

Перечисленные свойства позволяют по виду графика функции $\Pi(x)$ сразу делать выводы о характере движения, описываемого уравнением (8). На рис. 93 для примера показаны график потенциальной энергии и соответствующие фазовые кривые. Направления движения фазовой точки показаны стрелками. При $h = h_1$ есть положение равновесия типа центр. Это положение равновесия окружено замкнутыми фазовыми кривыми. При $h > h_3$ фазовые кривые разомкнуты. На уровне энергии $h = h_3$ есть положение равновесия типа седло. На уровне $h = h_3$ расположена также фазовая кривая, начинающаяся вблизи седловой точки и при $t \rightarrow \infty$ входящая в эту точку. Эта кривая отделяет область, где расположены замкнутые кривые, окружающие точку типа центр, от разомкнутых фазовых кривых, соответствующих значениям h , большим h_3 . Такие кривые, которые раз-

весия типа седло. На уровне $h = h_3$ расположена также фазовая кривая, начинающаяся вблизи седловой точки и при $t \rightarrow \infty$ входящая в эту точку. Эта кривая отделяет область, где расположены замкнутые кривые, окружающие точку типа центр, от разомкнутых фазовых кривых, соответствующих значениям h , большим h_3 . Такие кривые, которые раз-

деляют области с различным характером поведения фазовых кривых, называют *сепаратрисами*.

Построим фазовую плоскость для дифференциального уравнения (6), описывающего движение маятника. Для кинетической и потенциальной энергии маятника имеем выражения

$$T = \frac{1}{2} J_z \dot{\varphi}^2, \quad \Pi = -mga \cos \varphi.$$

Если положить $\omega_0^2 = g/l$, $\Pi^* = -\omega_0^2 \cos \varphi$, то интеграл энергии $T + \Pi = \text{const}$ запишется в виде

$$\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + \Pi^* = h = \text{const}. \quad (12)$$

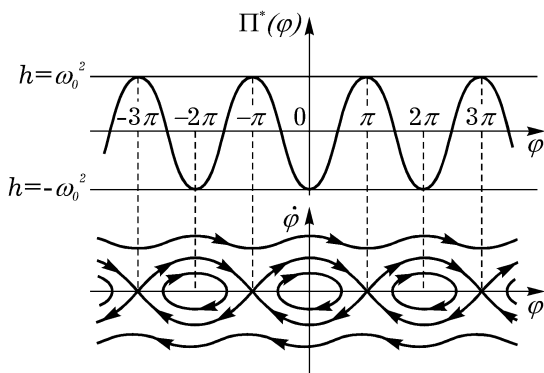


Рис. 94

График функции $\Pi^*(\varphi)$ и фазовые кривые представлены на рис. 94. Картина фазовых кривых периодична по φ с периодом 2π . При $h < -\omega_0^2$ движение невозможно. При $h = -\omega_0^2$ маятник находится в положении равновесия, когда его центр масс занимает самое низкое из возможных положений. На фазовой плоскости $\varphi, \dot{\varphi}$ этому положению равновесия соответствуют точки, в которых $\varphi = 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), а $\dot{\varphi} = 0$. Это точки типа центр. Они окружены замкнутыми фазовыми кривыми, соответствующими колебаниям маятника. Колебательным движениям маятника соответствуют значения h , удовлетворяющие неравенству $-\omega_0^2 < h < \omega_0^2$.

При $h = \omega_0^2$ возможны два типа движений. Один соответствует положению равновесия маятника, когда его центр масс занимает наивысшее возможное положение. Этому равновесию на фазовой плоскости соответствуют точки $\varphi = \pi + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), $\dot{\varphi} = 0$. Это точки типа седло. Для другого типа движений при $h = \omega_0^2$ центр масс

маятника асимптотически при $t \rightarrow \infty$ стремится занять наивысшее положение. Асимптотическим движениям на фазовой плоскости соответствуют кривые, соединяющие точки типа седло. Эти кривые являются сепаратрисами.

При $h > \omega_0^2$ движение маятника будет вращательным. Для этого движения абсолютная величина угла φ монотонно возрастает. Этим движениям на фазовой плоскости соответствуют незамкнутые кривые. Сепаратрисы разделяют области колебательных и вращательных движений.

95. Некоторые сведения из теории эллиптических интегралов и эллиптических функций Якоби. В этой главе и в некоторых других разделах книги будут использоваться так называемые эллиптические интегралы и эллиптические функции. Дадим здесь необходимые определения и понятия.

Интеграл

$$u = F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} \quad (13)$$

называется *эллиптическим интегралом первого рода*. Величина k называется *модулем эллиптического интеграла*. Обычно считается, что k удовлетворяет неравенствам $0 \leq k < 1$.

Интеграл

$$E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} \, dx \quad (14)$$

называется *эллиптическим интегралом второго рода*.

Величина

$$K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} \quad (15)$$

называется *полным эллиптическим интегралом первого рода*, а величина

$$E(k) = E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} \, dx \quad (16)$$

— *полным эллиптическим интегралом второго рода*.

При малых k интегралы (15), (16) представляются в виде сходящихся рядов по степеням k :

$$K = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{9}{64}k^4 + \dots \right), \quad (17)$$

$$E = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{64}k^4 - \dots \right). \quad (18)$$

Из (13) и (14) можно получить следующее выражение для производных эллиптических интегралов по модулю k :

$$\frac{\partial F(\varphi, k)}{\partial k} = \frac{1}{k'^2} \left(\frac{E(\varphi, k) - k'^2 F(\varphi, k)}{k} - \frac{k \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \right), \quad (19)$$

$$\frac{\partial E(\varphi, k)}{\partial k} = \frac{E(\varphi, k) - F(\varphi, k)}{k}, \quad (20)$$

где $k'^2 = 1 - k^2$, k' — дополнительный модуль.

Если в равенствах (19) и (20) положить $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то получим производные по k от полных эллиптических интегралов (15) и (16):

$$\frac{dK}{dk} = \frac{E(k) - k'^2 K(k)}{kk'^2}, \quad \frac{dE}{dk} = \frac{E(k) - K(k)}{k}. \quad (21)$$

Функция, являющаяся результатом обращения эллиптического интеграла первого рода, называется *амплитудой* и обозначается так:

$$\varphi = \operatorname{am} u. \quad (22)$$

Функции $z = \operatorname{sn}(u, k)$ (*эллиптический синус*) и $z = \operatorname{cn}(u, k)$ (*эллиптический косинус*) определяются так:

$$z = \operatorname{sn}(u, k) = \sin \varphi = \sin \operatorname{am} u \quad \text{и} \quad z = \operatorname{cn}(u, k) = \cos \varphi = \cos \operatorname{am} u. \quad (23)$$

Так как $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ имеют период 2π по φ , то согласно (13) и (15), эллиптические синус и косинус имеют по u период, равный $4K(k)$.

Функция *дельта амплитуды* $z = \operatorname{dn}(u, k)$ определяется так:

$$z = \operatorname{dn}(u, k) = \frac{d\varphi}{du} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2(u, k)}. \quad (24)$$

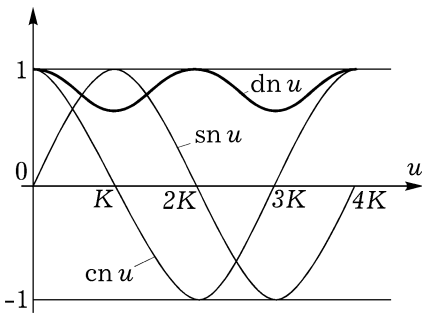


Рис. 95

Функция дельта амплитуды имеет период $2K(k)$ по u . Функции $\varphi = \operatorname{am} u$, $z = \operatorname{sn}(u, k)$, $z = \operatorname{cn}(u, k)$, $z = \operatorname{dn}(u, k)$ аналитичны относительно k и при $k \rightarrow 0$ стремятся соответственно к функциям $\varphi = u$, $z = \sin u$, $z = \cos u$, $z = 1$.

Эллиптические функции Якоби удовлетворяют следующим легко проверяемым тождествам:

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u &= 1, \\ \operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^2 u &= 1. \end{aligned} \quad (25)$$

Справедливы следующие формулы дифференцирования эллиптических функций:

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \operatorname{sn} u &= \operatorname{cn} u \cdot \operatorname{dn} u, \\ \frac{d}{du} \operatorname{cn} u &= -\operatorname{sn} u \cdot \operatorname{dn} u, \\ \frac{d}{du} \operatorname{dn} u &= -k^2 \operatorname{sn} u \cdot \operatorname{cn} u. \end{aligned} \quad (26)$$

Графики эллиптических функций Якоби представлены на рис. 95.

96. Интегрирование уравнения движения маятника. Рассмотрим три случая в соответствии с возможными значениями константы h в интеграле (12).

1. $-\omega_0^2 < h < \omega_0^2$. В этом случае, как показано в п. 94, маятник совершает колебания. Пусть β — максимальный угол, на который отклоняется маятник от своего вертикального положения, соответствующего значению φ , равному нулю. Тогда $h = -\omega_0^2 \cos \beta$ и интеграл (12) запишется в виде

$$\dot{\varphi}^2 = 2\omega_0^2 (\cos \varphi - \cos \beta). \quad (27)$$

Положим $k_1 = \sin(\beta/2)$ и сделаем замену переменных

$$\sin(\varphi/2) = k_1 \sin \psi. \quad (28)$$

Тогда интеграл энергии (27) примет следующий вид:

$$\dot{\psi}^2 = \omega_0^2 (1 - k_1^2 \sin^2 \psi). \quad (29)$$

Если принять, что при $t = 0$ $\varphi = 0$, то отсюда получаем

$$\omega_0 t = \int_0^{\psi} \frac{dx}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 x}} = F(\psi, k_1), \quad (30)$$

т. е. $\psi = \text{am}(\omega_0 t)$. Поэтому из (23) и (28) имеем окончательно

$$\varphi = 2 \arcsin(k_1 \text{sn } \omega_0 t). \quad (31)$$

Функция φ периодична по t с периодом τ , вычисляемым, согласно п. 95, по формуле

$$\tau = 4K(k_1)/\omega_0. \quad (32)$$

Воспользовавшись разложением (17), получим, что при небольшом значении максимального угла отклонения β маятника от вертикали имеем приближенное значение периода

$$\tau = 2\pi\sqrt{l/g}, \quad (33)$$

что совпадает с известным значением периода малых колебаний маятника. При учете двух первых членов разложения τ в ряд по β получаем более точное значение периода

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\beta^2}{16}\right). \quad (34)$$

Если $\beta \rightarrow \pi$, то $k_1 \rightarrow 1$ и период колебаний τ неограниченно возрастает.

2. $h > \omega_0^2$. В этом случае маятник находится в режиме вращения. Пусть при $t = 0$ $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$. Тогда $h = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_0^2 - \omega_0^2$ и интеграл (12) запишется в виде

$$\dot{\varphi}^2 = \dot{\varphi}_0^2 \left(1 - k_2^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right), \quad (35)$$

где введено обозначение

$$k_2^2 = 4 \frac{\omega_0^2}{\dot{\varphi}_0^2}. \quad (36)$$

Так как $h > \omega_0^2$, то $\dot{\varphi}_0^2 > 4\omega_0^2$ и, следовательно, $k_2^2 < 1$. Из (35) имеем

$$\frac{\dot{\varphi}_0}{2} t = F\left(\frac{\varphi}{2}, k_2\right) = \int_0^{\varphi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k_2^2 \sin^2 x}}. \quad (37)$$

Следовательно,

$$\varphi = 2 \operatorname{am}(\dot{\varphi}_0 t / 2). \quad (38)$$

Если начальная угловая скорость велика, т. е. $\dot{\varphi}_0^2 \gg \omega_0^2$, то приближенно $\varphi = \dot{\varphi}_0 t$ и вращение маятника мало отличается от равномерного.

3. $h = \omega_0^2$. Этот случай соответствует асимптотическим движениям маятника. Интеграл энергии (12) в этом случае дает соотношение

$$\dot{\varphi}^2 = 4\omega_0^2 \cos^2(\varphi/2). \quad (39)$$

Если при $t = 0$ $\varphi = 0$ и $\dot{\varphi} > 0$, то отсюда после интегрирования получаем

$$\varphi = -\pi + 4 \operatorname{arctg}(e^{\omega_0 t}). \quad (40)$$

§ 2. Движение твердого тела вокруг неподвижной точки

97. Дифференциальные уравнения движения твердого тела вокруг неподвижной точки. Динамические уравнения Эйлера. Пусть при движении тела одна из его точек O все время остается неподвижной. Для получения уравнений движения тела воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента. Если \mathbf{K}_O и $\mathbf{M}_O^{(e)}$ — кинетический момент тела и главный момент внешних сил относительно неподвижной точки O , то, согласно п. 87,

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{M}_O^{(e)}. \quad (1)$$

Пусть $Oxyz$ — подвижная система координат, жестко связанная с телом, а p, q, r — проекции угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ тела на ее оси. Тогда компоненты вектора \mathbf{K}_O выражаются через величины p, q, r и элементы тензора инерции тела для точки O — по формулам (8) п. 82.

Если абсолютную производную вектора \mathbf{K}_O выразить через его локальную производную, то уравнение (1) запишется в виде

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{K}_O}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}_O = \mathbf{M}_O^{(e)}. \quad (2)$$

Пусть M_x, M_y, M_z — проекции вектора $\mathbf{M}_O^{(e)}$ на оси Ox, Oy, Oz .