

Следовательно,

$$\varphi = 2 \operatorname{am}(\dot{\varphi}_0 t / 2). \quad (38)$$

Если начальная угловая скорость велика, т. е. $\dot{\varphi}_0^2 \gg \omega_0^2$, то приближенно $\varphi = \dot{\varphi}_0 t$ и вращение маятника мало отличается от равномерного.

3. $h = \omega_0^2$. Этот случай соответствует асимптотическим движениям маятника. Интеграл энергии (12) в этом случае дает соотношение

$$\dot{\varphi}^2 = 4\omega_0^2 \cos^2(\varphi/2). \quad (39)$$

Если при $t = 0$ $\varphi = 0$ и $\dot{\varphi} > 0$, то отсюда после интегрирования получаем

$$\varphi = -\pi + 4 \operatorname{arctg}(e^{\omega_0 t}). \quad (40)$$

§ 2. Движение твердого тела вокруг неподвижной точки

97. Дифференциальные уравнения движения твердого тела вокруг неподвижной точки. Динамические уравнения Эйлера. Пусть при движении тела одна из его точек O все время остается неподвижной. Для получения уравнений движения тела воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента. Если \mathbf{K}_O и $\mathbf{M}_O^{(e)}$ — кинетический момент тела и главный момент внешних сил относительно неподвижной точки O , то, согласно п. 87,

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{M}_O^{(e)}. \quad (1)$$

Пусть $Oxyz$ — подвижная система координат, жестко связанная с телом, а p, q, r — проекции угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ тела на ее оси. Тогда компоненты вектора \mathbf{K}_O выражаются через величины p, q, r и элементы тензора инерции тела для точки O — по формулам (8) п. 82.

Если абсолютную производную вектора \mathbf{K}_O выразить через его локальную производную, то уравнение (1) запишется в виде

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{K}_O}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}_O = \mathbf{M}_O^{(e)}. \quad (2)$$

Пусть M_x, M_y, M_z — проекции вектора $\mathbf{M}_O^{(e)}$ на оси Ox, Oy, Oz .

Тогда векторное уравнение (2) запишется в виде следующих скалярных уравнений:

$$\begin{aligned} J_x \dot{p} - J_{xy} \dot{q} - J_{xz} \dot{r} + (J_z - J_y)qr + J_{yz}(r^2 - q^2) + p(J_{xy}r - J_{xz}q) &= M_x, \\ -J_{xy} \dot{p} + J_y \dot{q} - J_{yz} \dot{r} + (J_x - J_z)rp + J_{xz}(p^2 - r^2) + q(J_{yz}p - J_{xy}r) &= M_y, \quad (3) \\ -J_{xz} \dot{p} - J_{yz} \dot{q} + J_z \dot{r} + (J_y - J_x)pq + J_{xy}(q^2 - p^2) + r(J_{xz}q - J_{yz}p) &= M_z. \end{aligned}$$

Эти уравнения существенно упрощаются, если оси Ox , Oy , Oz — главные оси инерции тела для точки O . В этом случае $J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$, а J_x , J_y , J_z являются главными моментами инерции: $J_x = A$, $J_y = B$, $J_z = C$. Уравнения (3) примут вид

$$\begin{aligned} A \dot{p} + (C - B)qr &= M_x, \\ B \dot{q} + (A - C)rp &= M_y, \quad (4) \\ C \dot{r} + (B - A)pq &= M_z. \end{aligned}$$

Уравнения (4) называются *динамическими уравнениями Эйлера*. Если M_x , M_y , M_z — функции p , q , r , t , то уравнения (4) образуют замкнутую систему уравнений, интегрирование которой даст зависимость величин p , q , r от времени t и начальных условий p_0 , q_0 , r_0 . После этого из кинематических уравнений Эйлера (см. п. 36)

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ q &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \quad (5) \\ r &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{aligned}$$

можно найти углы ψ , θ , φ как функции времени и начальных условий.

Таким образом, в рассматриваемом случае решение задачи о движении твердого тела вокруг неподвижной точки распадается на две последовательные задачи интегрирования систем трех уравнений первого порядка. В общем же случае величины M_x , M_y , M_z являются функциями времени, углов Эйлера и их производных. Тогда уравнения (4) и (5) надо интегрировать совместно.

Наиболее простым и очень важным случаем является тот, когда момент внешних сил относительно неподвижной точки равен нулю. Тогда говорят, что имеет место *случай Эйлера* движения твердого тела вокруг неподвижной точки. Этот случай, очевидно, возможен, когда внешних сил нет совсем или тогда, когда внешние силы, приложенные к телу, приводятся к равнодействующей, проходящей через неподвиж-

ную точку. В случае Эйлера уравнения (4) принимают вид

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)qr &= 0, \\ B\dot{q} + (A - C)rp &= 0, \\ C\dot{r} + (B - A)pq &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Ниже мы рассмотрим движение тела в случае Эйлера подробно.

98. Первые интегралы. Так как в случае Эйлера главный момент внешних сил $M_O^{(e)}$ относительно точки O равен нулю, то из уравнения (1) следует, что

$$\mathbf{K}_O = \text{const}, \quad (7)$$

т. е. кинетический момент \mathbf{K}_O тела относительно точки O имеет неизменное направление в неподвижной системе отсчета и величина его постоянна.

Так как Ap , Bq , Cr — проекции вектора \mathbf{K}_O на главные оси инерции тела Ox , Oy , Oz , а K_O^2 — квадрат длины вектора \mathbf{K}_O , то из (7) следует первый интеграл

$$K_O^2 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = \text{const}. \quad (8)$$

Из теоремы об изменении кинетической энергии можно получить, что кинетическая энергия тела также постоянна. Действительно, так как

$$dT = M_O^{(e)} \cdot \boldsymbol{\omega} dt + \mathbf{R}^{(e)} \cdot \mathbf{v}_O dt,$$

а $\mathbf{v}_O = 0$ и $M_O^{(e)} = 0$, то $dT = 0$. Поэтому существует первый интеграл

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = \text{const}. \quad (9)$$

Существование первых интегралов (8) и (9) можно установить и непосредственно из системы уравнений (6). Действительно, если первое уравнение системы (6) умножить на Ap , второе — на Bq , а третье — на Cr и результаты сложить, то получим $A^2p\dot{p} + B^2q\dot{q} + C^2r\dot{r} = 0$, откуда следует первый интеграл (8). Если же первое, второе и третье уравнения умножить соответственно на p , q , r , то после сложения получим $App\dot{p} + Bqq\dot{q} + Crr\dot{r} = 0$, откуда вытекает первый интеграл (9).

99. Стационарные вращения твердого тела в случае Эйлера. Будем называть *стационарным вращением* такое движение твердого тела, при котором его угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ постоянна относительно тела (а следовательно, и относительно неподвижной системы отсчета;

см. п. 30). Для стационарного вращения величины p , q , r постоянны. Для их определения из системы (6) получим такие уравнения:

$$(C - B)qr = 0, \quad (A - C)rp = 0, \quad (B - A)pq = 0. \quad (10)$$

Отсюда следует, что стационарное вращение тела может происходить только вокруг главной оси инерции тела для точки O , причем величина угловой скорости тела может быть произвольной.

В самом деле, если $A = B = C$, то уравнения (10) удовлетворяются при любых p , q , r , т. е. вращение тела происходит вокруг оси, имеющей произвольное направление. Но при $A = B = C$ эллипсоид инерции для точки O превращается в сферу, и поэтому любая ось, проходящая через точку O , становится главной осью инерции тела.

Если два из моментов инерции равны, например $A = B$, то уравнения (10) удовлетворяются при $p = q = 0$ и любом r (вращение вокруг главной оси инерции Oz), а также при $r = 0$ и любых p и q (вращение вокруг любой оси, проходящей через точку O , лежащей в экваториальной плоскости эллипсоида инерции и, следовательно, являющейся главной осью инерции).

Если величины A , B и C различны, то уравнения (10) могут иметь только такие решения, для которых две из величин p , q , r равны нулю, а третья произвольна, т. е. снова вращение происходит вокруг главной оси инерции.

100. Движение динамически симметричного тела в случае Эйлера. Регулярная прецессия. Будем называть тело *динамически симметричным*, если два его главных момента инерции для точки O равны, например $A = B$. Ось Oz тогда будем называть *осью динамической симметрии*. Исследуем движение динамически симметричного тела в случае Эйлера.

Неподвижную систему координат $OXYZ$ выберем так, чтобы ее ось OZ была направлена по вектору \mathbf{K}_O (который в случае Эйлера постоянен). Для проекций Ap , Aq , Cr вектора \mathbf{K}_O на оси связанной с телом системы координат $Oxyz$, образованной главными осями инерции, получаем такие выражения (рис. 96):

$$Ap = K_O \sin \theta \sin \varphi, \quad Aq = K_O \sin \theta \cos \varphi, \quad Cr = K_O \cos \theta. \quad (11)$$

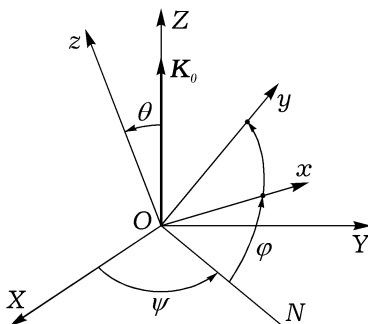


Рис. 96

Из последнего уравнения системы (6) при $A = B$ следует, что

$$r = r_0 = \text{const}, \quad (12)$$

т. е. проекция угловой скорости тела на ось его динамической симметрии постоянна. Из (12) и третьего из равенств (11) получаем

$$\cos \theta = Cr_0/K_O = \text{const}, \quad (13)$$

т. е. угол нутации постоянен.

При $\theta = \theta_0 = \text{const}$, $r = r_0 = \text{const}$ кинематические уравнения Эйлера (5) запишутся в виде

$$p = \dot{\psi} \sin \theta_0 \sin \varphi, \quad q = \dot{\psi} \sin \theta_0 \cos \varphi, \quad r_0 = \dot{\psi} \cos \theta_0 + \dot{\varphi}. \quad (14)$$

Подставив выражение для p из (14) в первое из равенств (11), получим

$$\dot{\psi} = K_O/A = \omega_2 = \text{const}. \quad (15)$$

Величина ω_2 называется *угловой скоростью прецессии*. Последнее из равенств (14) позволяет теперь найти величину $\dot{\varphi}$. Получаем, воспользовавшись формулами (13) и (15),

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= r_0 - \dot{\psi} \cos \theta_0 = r_0 - \frac{K_O}{A} \cos \theta_0 = \\ &= r_0 - \frac{C}{A} r_0 = \frac{A-C}{A} r_0 = \omega_1 = \text{const}. \end{aligned} \quad (16)$$

Величина ω_1 называется *угловой скоростью собственно-го вращения*.

Движение твердого тела вокруг неподвижной точки, состоящее из его вращения вокруг оси, неизменно связанной с телом, и движения, при котором эта ось вращается вокруг пересекающей ее оси, неподвижной в рассматриваемой системе отсчета, называют *прецессией*. Прецессия называется *регулярной*, если вращение

тела вокруг неизменно связанной с ним оси и вращение самой этой оси происходят с постоянными по модулю угловыми скоростями.

Таким образом, динамически симметричное тело в случае Эйлера совершает регулярную прецессию. В этой прецессии ось симметрии тела описывает круговой конус с осью K_O и углом при вершине $2\theta_0$, движение оси симметрии вокруг K_O происходит с постоянной угловой скоростью ω_2 ; одновременно тело вращается с постоянной угловой скоростью ω_1 вокруг оси симметрии.

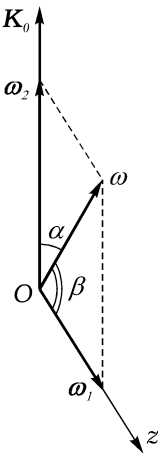


Рис. 97

ПРИМЕР 1. Покажем, что при движении твердого тела вокруг неподвижной точки по инерции при условии $A = B < C$ угол между образующей и осью неподвижного аксоида не может быть больше $19^\circ 28'$.

Из соотношений (13), (15) и (16) следует, что при $A < C$ постоянный угол между угловыми скоростями собственного вращения и прецессии ω_1 и ω_2 тупой (рис. 97).

Пусть α — угол между угловой скоростью тела ω и вектором ω_2 ; он равен углу между образующей и осью неподвижного аксоида. Буквой β обозначим угол между векторами ω и ω_1 . Из того, что при регулярной прецессии угол нутации θ и модули угловых скоростей ω_1 и ω_2 постоянны, следует, что величины ω , α и β также постоянны. Имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \frac{r_0}{\omega} < 0, \quad \sin \beta = \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{\omega^2}} = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\omega}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{r_0} < 0; \\ \cos \theta &= \frac{Cr_0}{K_O} < 0, \quad \sin \theta = \sqrt{1 - \frac{C^2 r_0^2}{K_O^2}} = \frac{A\sqrt{p^2 + q^2}}{K_O}, \\ \operatorname{tg} \theta &= \frac{A\sqrt{p^2 + q^2}}{C} < 0. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\operatorname{tg} \beta = \gamma \operatorname{tg} \theta.$$

Здесь $\gamma = C/A$. По условию задачи $C > A$, и так как моменты инерции всегда удовлетворяют неравенству $A + B \geq C$ (см. п. 79), из которого при $A = B$ следует, что $2A \geq C$, то величина γ удовлетворяет условию $1 < \gamma \leq 2$. Теперь несложно получить следующую цепочку соотношений:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{tg}(\theta - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \beta} = (1 - \gamma) \frac{\operatorname{tg} \theta}{1 + \gamma \operatorname{tg}^2 \theta} = \\ &= \frac{\gamma - 1}{2\sqrt{\gamma}} \frac{2\sqrt{\gamma} |\operatorname{tg} \theta|}{1 + (\sqrt{\gamma} \operatorname{tg} \theta)^2} \leq \frac{1}{2} \left(\sqrt{\gamma} - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \right) \leq \frac{1}{2} \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что угол α между образующей и осью неподвижного аксоида удовлетворяет неравенству $\alpha \leq \arctg(\sqrt{2}/4) = 19^\circ 28'$.

101. Геометрическая интерпретация Пуансо. Пуансо дал замечательную геометрическую интерпретацию движения твердого тела в случае Эйлера. Эта интерпретация очень наглядна и позволяет довольно просто выявить качественный характер движения твердого тела в

случае Эйлера. Поэтому само движение тела в этом случае называют *движением Эйлера–Пуансо*.

Пусть P — точка пересечения мгновенной оси вращения с поверхностью эллипсоида инерции тела для точки O (рис. 98)

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1.$$

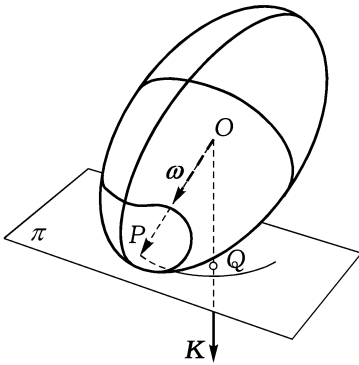


Рис. 98

использовавшись интегралом (9), получим

$$\lambda^2(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = 1,$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2T}} = \text{const.}$$

2. Плоскость π перпендикулярна кинетическому моменту \mathbf{K}_O . Для доказательства достаточно заметить, что вектор \mathbf{N} , равный градиенту функции $Ax^2 + By^2 + Cz^2$, вычисленному в точке P , направлен по нормали к плоскости π . Но

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} 2Ax_P \\ 2By_P \\ 2Cz_P \end{vmatrix} = 2\lambda \begin{vmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{vmatrix} = 2\lambda \mathbf{K}_O.$$

3. Проекция OQ радиуса-вектора \overline{OP} на направление кинетического момента \mathbf{K}_O есть величина постоянная.

В самом деле, воспользовавшись формулой (19) п. 84 и интегралом (8), получим

$$OQ = \frac{\mathbf{K}_O \cdot \overline{OP}}{K_O} = \lambda \frac{\mathbf{K}_O \cdot \boldsymbol{\omega}}{K_O} = \lambda \frac{2T}{K_O} = \frac{\sqrt{2T}}{K_O} = \text{const.}$$

Но кинетический момент K_O имеет неизменное направление и, согласно второму свойству, перпендикулярен плоскости π . Поэтому плоскость π , ввиду постоянства ее расстояния от неподвижной точки O , сохраняет неизменное положение в пространстве.

Таким образом, приходим к следующей, полученной Пуансо, геометрической интерпретации движения твердого тела в случае Эйлера: *эллипсоид инерции для неподвижной точки катится без скольжения по плоскости, неподвижной в пространстве; эта плоскость перпендикулярна кинетическому моменту; угловая скорость тела пропорциональна длине радиуса-вектора точки касания, а по направлению с ним совпадает.*

Движение эллипсоида по плоскости π происходит без скольжения, так как точка P лежит на мгновенной оси вращения, и поэтому ее скорость равна нулю.

При движении тела точка P на эллипсоиде инерции вычерчивает кривую, которая называется *полодией*. Соответствующая кривая на плоскости π называется *герполодией*. Так как точка P лежит на мгновенной оси вращения, то ясно, что полодия служит направляющей подвижного аксиоида, а герполодия — направляющей неподвижного аксиоида для движения твердого тела вокруг неподвижной точки (см. п. 26).

102. Интегрирование уравнений Эйлера. В п. 99 и 100 уравнения Эйлера (6) рассматривались в частных предположениях о движении тела или его геометрии масс. Получим теперь аналитическое решение уравнений (6) в общем случае. Будем для определенности считать, что $A > B > C$.

Из первых интегралов (8) и (9) выразим величины p^2 и r^2 через q^2 , A , B , C и постоянные T , K_O :

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{1}{A(C-A)} [(2TC - K_O^2) - B(C-B)q^2], \\ r^2 &= \frac{1}{C(C-A)} [(K_O^2 - 2TA) - B(B-A)q^2]. \end{aligned} \quad (17)$$

Определяемые отсюда значения p и r подставим во второе уравнение системы (6). Получим дифференциальное уравнение для q с разделяющимися переменными

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \pm \frac{1}{B\sqrt{AC}} \times \\ &\times \sqrt{[(2TC - K_O^2) - B(C-B)q^2][(K_O^2 - 2TA) - B(B-A)q^2]}. \end{aligned} \quad (18)$$

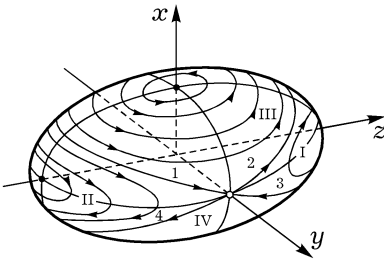


Рис. 99

Если это уравнение проинтегрировано, то функции p и r найдутся из равенств (17). При этом при извлечении квадратных корней перед радикалами возможны два знака: плюс или минус. Конкретный выбор этих знаков делается при помощи уравнений (6).

Рассмотрим три случая, соответствующих различным соотношениям между постоянными T и K_O .

1. $2TB > K_O^2 \geq 2TC$. В этом случае величина r всегда отлична от нуля и полодии заключают в себе наибольшую ось Oz эллипсоида инерции. Все полодии расположены на эллипсоиде инерции в областях, обозначенных на рис. 99 цифрами I и II. Для интегрирования уравнения (18) сделаем замену переменных

$$q = \pm \sqrt{\frac{K_O^2 - 2TC}{B(B-C)}} \sin \lambda,$$

$$\tau = \sqrt{\frac{(B-C)(2TA - K_O^2)}{ABC}} t$$

и введем положительный параметр $k^2 < 1$ согласно формуле

$$k^2 = \frac{(A-B)(K_O^2 - 2TC)}{(B-C)(2TA - K_O^2)}.$$

В новых переменных уравнение (18) запишется в виде

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \lambda}. \quad (19)$$

Пусть при $t = 0$ $q = 0$. Тогда из (19), согласно п. 95, получаем $\lambda = \text{am } \tau$. Решение уравнений Эйлера (6) в рассматриваемом случае записывается через эллиптические функции Якоби в виде

$$p = \mp \sqrt{\frac{K_O^2 - 2TC}{A(A-C)}} \text{cn}(\tau, k), \quad q = \pm \sqrt{\frac{K_O^2 - 2TC}{B(B-C)}} \text{sn}(\tau, k)$$

$$r = \sqrt{\frac{2TA - K_O^2}{C(A-C)}} \text{dn}(\tau, k).$$

(20)

Здесь одновременно берутся либо только верхние, либо только нижние знаки. Решение (20) соответствует полодиям, расположенным на рис. 99 в области I. Для получения решения, соответствующего полодиям, расположенным в области II, надо в формулах (20) величину q оставить без изменения, а у p и r одновременно изменить знаки.

Направление движения по полодиям показано на рис. 99 стрелками. Если $K_O^2 = 2TC$, то полодии вырождаются в две точки, совпадающие с вершинами эллипсоида, лежащими на оси Oz . Они соответствуют стационарным вращениям твердого тела вокруг оси Oz .

2. $2TA \geq K_O^2 > 2TB$. В этом случае величина p во все время движения отлична от нуля. Полодии заключают в себе наименьшую ось эллипсоида инерции Ox и расположены на эллипсоиде инерции в областях, обозначенных на рис. 99 цифрами III и IV. Сделаем замену переменных

$$q = \pm \sqrt{\frac{2TA - K_O^2}{B(A - B)}} \sin \lambda, \quad \tau = \sqrt{\frac{(A - B)(K_O^2 - 2TC)}{ABC}} t.$$

Тогда, если ввести параметр $k^2 < 1$ по формуле

$$k^2 = \frac{(B - C)(2TA - K_O^2)}{(A - B)(K_O^2 - 2TC)},$$

то уравнение (18) примет вид (19), и если принять, что при $t = 0$ $q = 0$, то решение уравнений (6), соответствующее полодиям из области III на рис. 99, будет иметь вид

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{\frac{K_O^2 - 2TC}{A(A - C)}} \operatorname{dn}(\tau, k), & q &= \pm \sqrt{\frac{2TA - K_O^2}{B(A - B)}} \operatorname{sn}(\tau, k), \\ r &= \mp \sqrt{\frac{2TA - K_O^2}{C(A - C)}} \operatorname{cn}(\tau, k). \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь одновременно берутся либо только верхние, либо только нижние знаки. Чтобы получить решения уравнений (6), соответствующие полодиям, расположенным в области IV на рис. 99, нужно величину q оставить такой же, как и в (21), а у p и r одновременно изменить знаки.

Если $K_O^2 = 2TA$, то полодии вырождаются в точки, лежащие на оси Ox и отвечающие стационарным вращениям тела вокруг оси Ox .

Заметим, что в двух рассмотренных случаях величины p , q , r — периодические функции времени, поэтому полодии представляют собой замкнутые кривые. Отметим также, что картина расположения

полодий на эллипсоиде инерции симметрична относительно его главных плоскостей. Каждому движению твердого тела соответствует одна вполне конкретная полодия. Какая именно, зависит от начальных значений величин p , q , r .

Рассмотрим еще третий случай, являющийся промежуточным между двумя рассмотренными.

3. $K_O^2 = 2TB$. Равенства (17) принимают вид

$$p^2 = \frac{(B-C)}{A(A-C)}(2T - Bq^2), \quad r^2 = \frac{(A-B)}{C(A-C)}(2T - Bq^2). \quad (22)$$

Из (22) следует, что $A(A-B)p^2 = C(B-C)r^2$. Учитывая свойство 1 движения Эйлера–Пуансо (п. 101), получаем, что в рассматриваемом случае полодии лежат в плоскостях

$$x = \pm \sqrt{\frac{C(B-C)}{A(A-B)}}z, \quad (23)$$

проходящих через среднюю ось эллипсоида инерции. Сечения эллипсоида инерции плоскостями (23) будут эллипсами, на которых лежат полодии двух типов. Во-первых, это полодии-точки, расположенные на оси Oy и соответствующие стационарным вращениям тела вокруг средней оси эллипсоида инерции с произвольной угловой скоростью. А во-вторых, есть четыре полодии, представляющие собой дуги эллипсов, соединяющих упомянутые полодии-точки. Эти четыре полодии обозначены на рис. 99 цифрами 1, 2, 3 и 4. Они являются на эллипсоиде инерции сепаратрисами, разделяющими области I, II, III, IV с отличающимся характером поведения полодий. Если положить

$$\tau = \sqrt{\frac{2T(A-B)(B-C)}{ABC}}t,$$

то уравнение (18) в рассматриваемом случае примет следующий вид:

$$\frac{dq}{d\tau} = \pm \frac{1}{\sqrt{2TB}}(2T - Bq^2). \quad (24)$$

Пусть при $t = 0$ $q = 0$. Тогда из уравнения (24) и равенств (22) с использованием известных соотношений между гиперболическими функциями

$$\operatorname{ch}^2 \tau - \operatorname{sh}^2 \tau = 1, \quad \operatorname{th} \tau = \frac{\operatorname{sh} \tau}{\operatorname{ch} \tau}$$

получим, что решение уравнений Эйлера (6), соответствующее полодии 1 на рис. 99, имеет вид

$$p = \sqrt{\frac{2T(B - C)}{A(A - C)}} \frac{1}{\operatorname{ch} \tau}, \quad q = \sqrt{\frac{2T}{B}} \operatorname{th} \tau, \quad r = -\sqrt{\frac{2T(A - B)}{C(A - C)}} \frac{1}{\operatorname{ch} \tau}. \quad (25)$$

Решение уравнений (6), соответствующее полодии 3, получается из формул (25), если в них изменить знаки у величин p , r . Решения, соответствующие полодиям 2 и 4, получаются из (25), если изменить знаки соответственно у q , r и q , p .

Поведение гиперболических функций, входящих в формулы (25), показано на рис. 100.

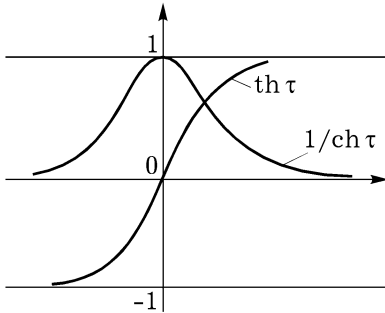


Рис. 100

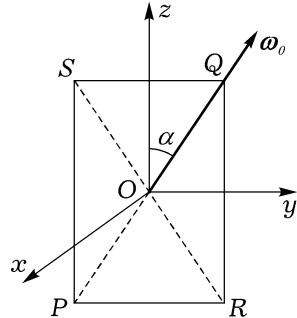


Рис. 101

ПРИМЕР 1. Однородная прямоугольная пластинка движется по инерции вокруг неподвижной точки, совпадающей с ее центром масс. В начальный момент времени $t = 0$ пластинка приведена во вращение с угловой скоростью ω_0 вокруг диагонали PQ (рис. 101). Обозначая α угол между диагоналями, показать, что через промежуток времени t' , равный

$$\frac{2K(\sin \alpha)}{\omega \sqrt{\cos 2\alpha}},$$

где K — полный эллиптический интеграл первого рода, $\sin \alpha$ — модуль эллиптического интеграла, пластинка будет вращаться вокруг другой диагонали RS .

Пусть $QS = b$, $QR = c$ и $b < c$. Оси Oy и Oz системы координат $Oxyz$ перпендикулярны соответствующим сторонам пластинки, а Ox перпендикулярна ее плоскости. Эти оси являются главными цен-

тральными осями инерции пластинки. Согласно п. 75 (пример 1), имеем

$$A = J_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2), \quad B = J_y = \frac{1}{12}mc^2,$$

$$C = J_z = \frac{1}{12}mb^2.$$

Если диагональ пластинки равна d , то $b = d \sin \alpha$, $c = d \cos \alpha$ и

$$A = \frac{1}{12}md^2, \quad B = \frac{1}{12}md^2 \cos^2 \alpha, \quad C = \frac{1}{12}md^2 \sin^2 \alpha.$$

При $t = 0$ $p = 0$, $q = \omega_0 \sin \alpha$, $r = \omega_0 \cos \alpha$, поэтому

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = \frac{1}{12}md^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \cdot \omega_0^2,$$

$$K_O^2 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = \frac{1}{144}m^2d^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \cdot \omega_0^2.$$

Так как при $b < c$ угол α не превосходит $\pi/4$, то, как нетрудно проверить непосредственным вычислением, справедливы неравенства $A > B > C$ и $2TB > K_O^2 > 2TC$. Следовательно, мы имеем дело с первым из рассмотренных выше случаев движения Эйлера–Пуансо.

Опираясь на проведенное выше исследование этого случая, после несложных вычислений найдем:

$$p(t) = -\sin \alpha \sqrt{\cos 2\alpha} \cdot \omega_0 \cdot \operatorname{cn}[\tau + K(k), k],$$

$$q(t) = \sin \alpha \cdot \omega_0 \cdot \operatorname{sn}[\tau + K(k), k],$$

$$r(t) = \omega_0 \cdot \operatorname{dn}[\tau + K(k), k].$$

Здесь $\tau = \sqrt{\cos 2\alpha} \cdot \omega_0 \cdot t$, $k = \sin \alpha$.

При получении выписанного решения $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$ динамических уравнений Эйлера (6) в формулах (20) взяты верхние знаки, а величина τ заменена на $\tau + K(k)$, что отвечает конкретным начальным условиям в рассматриваемой задаче о движении пластинки. Полодия, соответствующая выписанному решению, лежит на эллипсоиде инерции в области I (рис. 99).

При $t = t'$ имеем

$$\tau = \sqrt{\cos 2\alpha} \cdot \omega_0 \cdot t' = 2K(k);$$

поскольку (рис. 95) $\operatorname{cn}[3K(k), k] = 0$, $\operatorname{sn}[3K(k), k] = -1$, $\operatorname{dn}[3K(k), k] = \sqrt{1 - k^2}$, то

$$p(t') = 0, \quad q(t') = -\omega_0 \sin \alpha, \quad r(t') = \omega_0 \cos \alpha.$$

Отсюда следует, что при $t = t'$ пластинка вращается вокруг диагонали RS .

103. О герполодиях. Из рис. 98 видно, что $QP = \sqrt{OP^2 - OQ^2}$. Так как, согласно п. 101, $OP = \omega/\sqrt{2T}$, $OQ = \sqrt{2T}/K_O$, то

$$QP = \sqrt{\frac{\omega^2}{2T} - \frac{2T}{K_O^2}}. \quad (26)$$

Эта формула позволяет выявить некоторые общие свойства герполодий.

Для каждого из стационарных вращений $\omega = \text{const}$, и герполодия представляет собой точку, совпадающую с точкой Q .

Рассмотрим общий случай движения. Пусть $A > B > C$. Тогда для движений тела, которым отвечают полодии, расположенные в областях I–IV на рис. 99, величина $\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ имеет минимум ω_1 и максимум ω_2 . Согласно (26), величина QP также будет иметь минимум ρ_1 и максимум ρ_2 . Поэтому герполодия заключена между двумя концентрическими окружностями с центром в точке Q (рис. 102 и 103).

Отметим без доказательства, что герполодия не имеет ни точек перегиба, ни точек возврата и всегда обращена вогнутостью в сторону точки Q , в которой вектор кинетического момента \mathbf{K}_O пересекает плоскость Пуансо π .

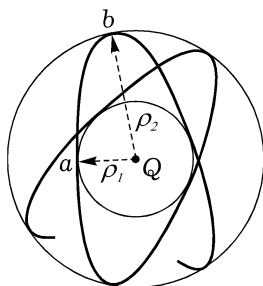


Рис. 102

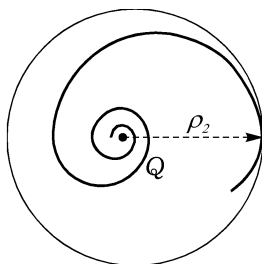


Рис. 103

В противоположность полодиям (из областей I–IV), которые являются замкнутыми кривыми, герполодии, хотя и состоят из симметричных участков, представляют собой, вообще говоря, незамкнутые кривые. Герполодия поочередно касается окружностей $\rho_1 = \text{const}$ и $\rho_2 = \text{const}$. Моменты касания соответствуют переходу вектора ω через главные плоскости эллипсоида инерции. Дуга герполодии ab (рис. 102) соответствует четверти дуги полодии. После того как точка P придет снова в то же положение на эллипсоиде и, следовательно, опишет полную полодию, радиус-вектор QP повернется на угол 4α , где α — угол,

образованный отрезками Qa и Qb на рис. 102. Если отношение α/π — рациональное число, то герполодия будет замкнутой, в противном случае она будет незамкнутой. Каждой из полодий 1–4 (рис. 99), существующих в случае $K_O^2 = 2TB$, соответствует герполодия, являющаяся спиралью, навивающейся на точку Q (рис. 103). Эта спираль бесконечно много раз обходит точку Q . Однако ее общая длина конечна, так как она равна длине соответствующей дуги полодии.

Если эллипсоид инерции есть эллипсоид вращения, то как полодия, так и герполодия представляют собой окружности.

104. Определение ориентации твердого тела в абсолютном пространстве для движения Эйлера—Пуансо. После того как в п. 102 величины p , q , r были определены как функции времени, можно из кинематических уравнений Эйлера (5) найти углы ψ , θ , φ , определяющие ориентацию твердого тела относительно неподвижной системы координат $OXYZ$. Задача сильно упрощается, если, как и в п. 100, ось OZ направить вдоль неизменного кинетического момента K_O (рис. 96). При таком выборе неподвижной системы координат проекции Ap , Bq , Cr вектора K_O на оси связанной с телом системы главных осей инерции Ox , Oy , Oz вычисляются, согласно рис. 96, по формулам

$$Ap = K_O \sin \theta \sin \varphi, \quad Bq = K_O \sin \theta \cos \varphi, \quad Cr = K_O \cos \theta. \quad (27)$$

Эти соотношения позволяют сразу определить углы θ и φ как функции времени при известных функциях p , q , r :

$$\cos \theta = \frac{Cr}{K_O}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{Ap}{Bq}. \quad (28)$$

Для нахождения угла ψ сначала получим величину $\dot{\psi}$ из первых двух уравнений (5):

$$\dot{\psi} = \frac{p \sin \varphi + q \cos \varphi}{\sin \theta}.$$

Если затем в это выражение подставить величины $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$, полученные из первых двух равенств (27), то оно запишется в виде

$$\dot{\psi} = \frac{Ap^2 + Bq^2}{K_O \sin^2 \theta}.$$

Воспользовавшись теперь третьим из равенств (27) и формулой (8), окончательно получим

$$\dot{\psi} = K_O \frac{Ap^2 + Bq^2}{A^2 p^2 + B^2 q^2}. \quad (29)$$

Отсюда угол ψ найдется квадратурой. Так как правая часть формулы (29) положительна, то угол ψ монотонно возрастает во всех трех возможных случаях движения, рассмотренных в п. 102, т. е. при любой возможной зависимости функций p, q, r от времени.

Если движение тела не является стационарным вращением или асимптотическим движением, то, согласно п. 102, величины p, q, r представляют собой периодические функции времени. Когда значение t увеличивается на период, то синусы и косинусы углов θ и φ принимают свои первоначальные значения. Значения же $\sin \psi$ и $\cos \psi$ через период, вообще говоря, изменяются, так как за период угол ψ увеличивается на некоторую постоянную величину. Это следует из (21). Действительно, пусть τ_* — период по времени функций p и q . Тогда из (29) имеем $\dot{\psi}(t + \tau_*) = \dot{\psi}(t)$ и, интегрируя, получим

$$\psi(t + \tau_*) = \psi(t) + c,$$

где c — постоянная интегрирования.

Если число $c/(2\pi)$ не рационально, то твердое тело никогда не возвратится к своей первоначальной ориентации в абсолютном пространстве. Если же $\frac{c}{2\pi} = \frac{m}{n}$, где m, n — целые числа ($n \neq 0$), то движение твердого тела периодическое, с периодом, равным $n\tau_*$.

105. Уравнения движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки и их первые интегралы. Рассмотрим движение

твердого тела вокруг неподвижной точки O в однородном поле тяжести. Ось OZ неподвижной системы координат направим вертикально вверх. С движущимся телом жестко свяжем систему координат $Oxyz$, оси которой направим вдоль главных осей инерции тела для неподвижной точки O . Координаты центра тяжести G в системе координат $Oxyz$ обозначим a, b, c . Ориентацию тела относительно неподвижной системы координат будем определять при помощи углов Эйлера ψ, θ, φ , которые вводятся обычным образом (рис. 104).

Моменты инерции тела относительно осей Ox, Oy, Oz обозначим A, B, C , а силу тяжести P .

Пусть единичный вектор \mathbf{n} вертикальной оси OZ имеет в связанной с телом системе координат $Oxyz$ компоненты $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Величи-

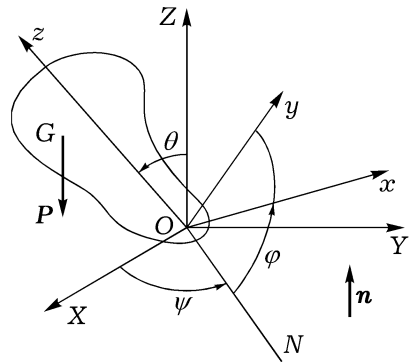


Рис. 104

ны γ_1 , γ_2 и γ_3 равны множителям при $\dot{\psi}$ в выражениях для p , q , и r в кинематических уравнениях Эйлера (5):

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \sin \theta \sin \varphi, & \gamma_2 &= \sin \theta \cos \varphi, \\ \gamma_3 &= \cos \theta.\end{aligned}\tag{30}$$

Вектор \mathbf{n} постоянен в неподвижной системе координат, поэтому его абсолютная производная равна нулю: $d\mathbf{n}/dt = 0$. Учитывая связь абсолютной и локальной производных вектора (п. 30), последнее уравнение можно записать в виде

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{n}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n} = 0,\tag{31}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела. Уравнение (31) называется *уравнением Пуассона*. Обозначая, как обычно, p , q , r проекции $\boldsymbol{\omega}$ на оси Ox , Oy , Oz , векторное уравнение Пуассона можно записать в виде следующих трех скалярных уравнений:

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = q\gamma_1 - p\gamma_2.\tag{32}$$

Внешними силами, действующими на тело, являются сила тяжести и реакция точки O . Последняя не создает момента относительно точки O , а момент \mathbf{M}_O силы тяжести \mathbf{P} относительно точки O равен $\overline{OG} \times \mathbf{P}$. Учитывая, что $\mathbf{P} = -P\mathbf{n}$, можно написать

$$\mathbf{M}_O = P\mathbf{n} \times \overline{OG}.\tag{33}$$

Если M_x , M_y , M_z — проекции \mathbf{M}_O на оси Ox , Oy , Oz , то из (33) получим

$$M_x = P(\gamma_2c - \gamma_3b), \quad M_y = P(\gamma_3a - \gamma_1c), \quad M_z = P(\gamma_1b - \gamma_2a).\tag{34}$$

Таким образом, динамические уравнения (4) имеют вид

$$\begin{aligned}A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr &= P(\gamma_2c - \gamma_3b), \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C)rp &= P(\gamma_3a - \gamma_1c), \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A)pq &= P(\gamma_1b - \gamma_2a).\end{aligned}\tag{35}$$

Уравнения (32), (35) образуют замкнутую систему шести дифференциальных уравнений, описывающую движение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки.

Если из системы уравнений (32), (35) величины $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ найдены как функции времени, то функции $\theta(t), \varphi(t)$ находятся из (30), а для нахождения функции $\psi(t)$ нужно воспользоваться любым из кинематических уравнений Эйлера (5).

Таким образом, основная задача состоит в интегрировании системы уравнений (32), (35). Анализ этой системы и составляет главную сложность задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки.

Укажем три первых интеграла системы (32), (35). Один из них следует из того, что модуль вектора \mathbf{n} постоянен и равен единице:

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1. \quad (36)$$

Еще один интеграл следует из теоремы об изменении кинетического момента. В самом деле, так как внешние силы — сила тяжести и реакция точки O — не создают момента относительно вертикальной оси, то (см. п. 87) проекция кинетического момента \mathbf{K}_O тела на вертикаль постоянна, т. е. $\mathbf{K}_O \cdot \mathbf{n} = \text{const}$. В подвижной системе координат вектор \mathbf{K}_O имеет компоненты Ap, Bq, Cr , поэтому последнее равенство может быть записано в виде

$$Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = \text{const}. \quad (37)$$

Замечая далее, что работа реакции точки O равна нулю, сила тяжести является потенциальной и потенциал Π не зависит от времени, получим, что во время движения тела его полная механическая энергия $E = T + \Pi$ постоянна (см. п. 88).

Принимая, что потенциальная энергия равна нулю, когда центр тяжести тела находится в горизонтальной плоскости OXY , получим, что $\Pi = Ph$, где h — взятое со знаком расстояние от центра тяжести тела до плоскости OXY ; $h = \overline{OG} \cdot \mathbf{n} = a\gamma_1 + b\gamma_2 + c\gamma_3$. И так как $T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)$, то интеграл энергии запишется в виде

$$\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + P(a\gamma_1 + b\gamma_2 + c\gamma_3) = \text{const}. \quad (38)$$

Если воспользоваться теорией множителя Якоби, то можно показать¹, что для того, чтобы интегрирование системы (32), (35) можно было свести к квадратурам при любых начальных условиях, достаточно помимо выписанных трех первых интегралов (36)–(38) найти еще один независимый от них интеграл.

¹См. п. 162.

К настоящему времени показано, что четвертый алгебраический первый интеграл относительно $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ существует только в следующих трех случаях, а именно: в случаях Эйлера, Лагранжа и Ковалевской.

В случае Эйлера тело произвольно, но его центр тяжести находится в неподвижной точке O , т. е. $a = b = c = 0$. Этот случай подробно изучен в п. 98–104.

В случае Лагранжа эллипсоид инерции тела для неподвижной точки является эллипсоидом вращения, а центр тяжести находится на оси вращения, т. е., например, выполняются равенства $A = B, a = b = 0$. Как следует из последнего уравнения системы (35), в этом случае четвертым алгебраическим первым интегралом будет проекция угловой скорости тела на ось динамической симметрии: $r = \text{const}$.

В случае Ковалевской эллипсоид инерции для точки O является эллипсоидом вращения, например вокруг оси Oz , моменты инерции удовлетворяют соотношению $A = B = 2C$, а центр тяжести тела лежит в экваториальной плоскости эллипсоида инерции, т. е. в наших обозначениях $c = 0$.

Для эллипсоида инерции, являющегося эллипсоидом вращения, любая ось, проходящая через точку O и лежащая в экваториальной плоскости, служит главной осью инерции. Поэтому будем для простоты вычислений считать, что ось Ox проходит через центр тяжести, т. е. $b = 0$. Тогда динамические уравнения Эйлера (35) в случае Ковалевской принимают вид

$$2 \frac{dp}{dt} - qr = 0, \quad 2 \frac{dq}{dt} + rp = \alpha \gamma_3, \quad \frac{dr}{dt} = -\alpha \gamma_2 \quad \left(\alpha = \frac{Pa}{C} \right), \quad (39)$$

и четвертый алгебраический первый интеграл, как нетрудно убедиться непосредственным дифференцированием, опираясь на уравнения (32), (39), имеет вид

$$(p^2 - q^2 - \alpha \gamma_1)^2 + (2pq - \alpha \gamma_2)^2 = \text{const}. \quad (40)$$

Найдено и подробно исследовано также много случаев, когда существуют частные алгебраические интегралы, позволяющие свести интегрирование системы (32), (35) к квадратурам. Но эти интегралы существуют не для всех, а только для некоторых специфически выбранных начальных условий¹.

106. Основная формула гироскопии. Твердое тело, движущееся вокруг фиксированной в нем точки, для которой эллипсоид инерции

¹См.: Горр Г. В., Кудряшова Л. В., Степанова Л. А. Классические задачи динамики твердого тела, Киев: Наукова думка, 1978.

тела является эллипсоидом вращения, называют *гироскопом*. В п. 100 мы видели, что если момент внешних сил относительно неподвижной точки O равен нулю, то гироскоп совершает регулярную прецессию вокруг неизменного кинетического момента \mathbf{K}_O .

Но для того, чтобы гироскоп совершал регулярную прецессию, вовсе не обязательно, чтобы момент внешних сил относительно неподвижной точки был равен нулю. Рассмотрим этот вопрос подробно. Пусть $OXYZ$ — неподвижная система координат с началом в неподвижной точке O тела, а $Oxyz$ — система координат, оси которой направлены по главным осям инерции тела для точки O . Пусть A, B, C — моменты инерции тела относительно осей Ox, Oy, Oz и $A = B$. Динамические уравнения Эйлера (4) в этом случае будут такими:

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + (C - A)qr &= M_x, \\ A \frac{dq}{dt} - (C - A)rp &= M_y, \\ C \frac{dr}{dt} &= M_z. \end{aligned} \quad (41)$$

Углы Эйлера ψ, θ, φ вводим обычным образом; кинематические уравнения Эйлера имеют вид (5).

Найдем условия, при выполнении которых гироскоп может совершать регулярную прецессию вокруг оси OZ с заданными постоянными значениями угла нутации ($\theta = \theta_0$), угловой скорости собственного вращения ($\dot{\varphi} = \omega_1$) и угловой скорости прецессии ($\dot{\psi} = \omega_2$). Иными словами, надо найти, каким должен быть момент внешних сил \mathbf{M}_O относительно точки O , чтобы была возможна регулярная прецессия гироскопа с заданными величинами $\theta_0, \omega_1, \omega_2$.

Для заданных величин $\theta, \dot{\varphi}, \dot{\psi}$ кинематические уравнения Эйлера (5) принимают вид

$$p = \omega_2 \sin \theta_0 \sin \varphi, \quad q = \omega_2 \sin \theta_0 \cos \varphi, \quad r = \omega_2 \cos \theta_0 + \omega_1. \quad (42)$$

Последнее из равенств (42) показывает, что r — постоянная величина. Поэтому третье из уравнений (41) дает

$$M_z = 0. \quad (43)$$

Подставив величины p, q, r из формул (42) в первое из уравнений (41), можно найти M_x . Имеем

$$M_x = A\omega_2 \sin \theta_0 \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} + (C - A)\omega_2 \sin \theta_0 \cos \varphi (\omega_2 \cos \theta_0 + \omega_1).$$

Подставив сюда вместо производной $d\varphi/dt$ ее значение ω_1 , получим

$$M_x = \omega_2 \omega_1 \sin \theta_0 \cos \varphi \left[C + (C - A) \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \theta_0 \right]. \quad (44)$$

Аналогично, из формул (42) и второго из уравнений (41) получим

$$M_y = -\omega_2 \omega_1 \sin \theta_0 \sin \varphi \left[C + (C - A) \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \theta_0 \right]. \quad (45)$$

Замечая, что в системе координат $Oxyz$ вектор ω_1 имеет компоненты $0, 0, \omega_1$, а вектор ω_2 — компоненты $\omega_2 \sin \theta_0 \sin \varphi, \omega_2 \sin \theta_0 \cos \varphi, \omega_2 \cos \theta_0$, можно три формулы (43)–(45) записать в виде одного векторного равенства

$$\mathbf{M}_O = \omega_2 \times \omega_1 \left[C + (C - A) \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \theta_0 \right]. \quad (46)$$

Отсюда видно, что вектор \mathbf{M}_O постоянен по модулю и параллелен линии узлов ON .

Формула (46) называется *основной формулой гироскопии*. Она позволяет по заданным моментам инерции A, C , углу нутации θ_0 и векторам угловых скоростей ω_1, ω_2 найти момент \mathbf{M}_O , необходимый для осуществления регулярной прецессии.

Отметим, что, в отличие от случая Эйлера, рассмотренного в п. 100, здесь кинетический момент \mathbf{K}_O не остается постоянным; он движется в соответствии с теоремой об изменении кинетического момента

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{M}_O. \quad (47)$$

Последней формуле можно дать весьма удобную и широко распространенную интерпретацию: *скорость конца вектора \mathbf{K}_O равна \mathbf{M}_O* (теорема Резаля).

ПРИМЕР 1. *Центру основания однородного кругового конуса массой m , высотой h и с углом при вершине 2α , вершина O которого закреплена и который может катиться без проскальзывания по неподвижной горизонтальной плоскости, сообщается горизонтальная скорость v . Найти равнодействующую (величину, направление и точку приложения) реакции плоскости и реакции в неподвижной точке, возникающих во время дальнейшего движения конуса.*

Пусть (рис. 105) G — центр масс конуса, R — радиус его основания, а C и A — его моменты инерции относительно оси симметрии и оси, проходящей через вершину и перпендикулярной оси симметрии. Тогда $OG = \frac{3}{4}h$, $C = \frac{3}{10}mR^2$, $A = \frac{3}{20}m(R^2 + 4h^2)$.

Но $R = O_1L = h \operatorname{tg} \alpha$, поэтому $C = \frac{3}{10}mh^2 \operatorname{tg}^2 \alpha$, $A = \frac{3}{20}mh^2(4 + \operatorname{tg}^2 \alpha)$.

Кроме того, $O_1K = h \sin \alpha$, $QG = \frac{3}{4}h \cos \alpha$.

Пусть вектор скорости центра основания конуса перпендикулярен плоскости рис. 105 и направлен на читателя. Так как движение происходит без скольжения, то мгновенная ось вращения конуса направлена вдоль его образующей OL . Величина угловой скорости найдется из равенств $v_{O_1} = v = \omega \cdot O_1K$. Получим

$$\omega = \frac{v}{h \sin \alpha}.$$

Конус совершает регулярную прецессию; угловые скорости ω_1 и ω_2 собственного вращения и прецессии направлены как показано на рисунке. Для их величин находим

$$\omega_1 = \frac{\omega}{\cos \alpha} = \frac{v}{h \sin \alpha \cos \alpha},$$

$$\omega_2 = \omega \operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{h \cos \alpha}.$$

Угол нутации θ (угол между ω_1 и ω_2) равен $\pi/2 + \alpha$.

Прецессия совершается под действием силы тяжести, реакции плоскости и реакции в неподвижной точке O . Момент M_O этих сил может быть вычислен по основной формуле гироскопии (46). Используя найденные выше значения величин A , C , ω_1 , ω_2 и θ , найдем модуль этого момента:

$$M_O = \omega_2 \omega_1 \cos \alpha \left[C - (C - A) \frac{\omega_2}{\omega_1} \sin \alpha \right] = \frac{3}{20} \frac{mv^2 \sin \alpha}{\cos^3 \alpha} (1 + 5 \cos^2 \alpha).$$

Вектор M_O перпендикулярен плоскости рис. 105 и направлен на читателя. Отсюда, с учетом того, что сила тяжести направлена вертикально, следует, что искомая равнодействующая реакций плоскости и неподвижной точки O лежит в плоскости рисунка. Пусть равнодействующая приложена в точке S образующей конуса OL . Разложим ее на вертикальную составляющую N и составляющую F , направленную по образующей.

Величины N и F найдем, применяя теорему о движении центра инерции (п. 86). Вертикальное ускорение центра тяжести равно нулю, поэтому $N = mg$; сила же F вызывает нормальное ускорение центра

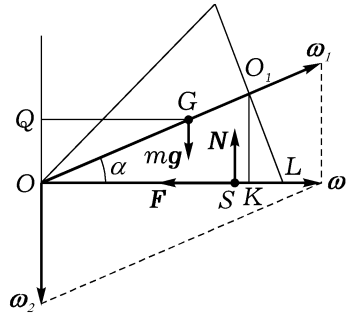


Рис. 105

тяжести при его движении по окружности радиусом QG :

$$F = m \cdot \omega_2^2 \cdot QG = \frac{3}{4} \frac{mv^2}{h \cos \alpha}.$$

Далее, сумма моментов сил F , N и mg относительно оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через точку O , должна равняться

$$N \cdot OS - mg \cdot QG = M_O.$$

Отсюда получаем расстояние точки S от вершины конуса:

$$OS = \frac{3}{4} h \cos \alpha + \frac{3}{20} \frac{v^2 \sin \alpha}{g \cos^3 \alpha} (1 + 5 \cos^2 \alpha).$$

107. Об элементарной теории гироскопа. У гироскопов, применяемых в современной технике, угловая скорость собственного вращения обычно значительно превосходит угловую скорость прецессии, т. е. $\omega_1 \gg \omega_2$. Если в этом случае пренебречь вторым членом в квадратных скобках в формуле (46), то получим

$$M_O = C\omega_2 \times \omega_1. \quad (48)$$

Эта формула лежит в основе элементарной, или приближенной, теории гироскопа и называется *приближенной формулой гироскопии*¹.

Формула (48) сразу следует из теоремы Резаля, если сделать основное допущение элементарной теории гироскопа, состоящее в том, что у быстро вращающегося гироскопа в любой момент времени мгновенная угловая скорость и кинетический момент направлены по оси динамической симметрии, причем

$$K_O = C\omega_1. \quad (49)$$

Отметим некоторые свойства быстро вращающегося гироскопа. Пусть гироскоп закреплен так, что его центр тяжести совпадает с неподвижной точкой O . Такой гироскоп называют *уравновешенным*. Пусть он вращается вокруг оси симметрии с угловой скоростью ω_1 . Так как в данном случае ось симметрии является главной центральной осью инерции, то кинетический момент K_O гироскопа направлен по оси симметрии, причем $K_O = C\omega_1$. Последнее равенство является не приближенным, а точным. Если момент внешних сил относительно центра тяжести равен нулю, то вектор K_O постоянен, и ось гироскопа сохраняет свое начальное направление в неподвижной системе координат.

¹Если угол нутации θ_0 равен $\pi/2$, то формула (48) дает не приближенное, а точное значение для M_O независимо от того, выполняется неравенство $\omega_1 \gg \omega_2$ или нет.

Предположим, что к оси гироскопа приложена сила \mathbf{F} , момент которой относительно точки O равен \mathbf{M} (рис. 106). Согласно формуле (47), вектор \mathbf{K}_O (а следовательно, и ось симметрии гироскопа, так как их направления по предположению совпадают) будет отклоняться, но не в сторону действия силы, а в ту сторону, куда направлен вектор \mathbf{M} (т. е. перпендикулярно силе). В этом состоит одно из интереснейших свойств быстро вращающегося гироскопа.

Если действие силы \mathbf{F} прекращается, то и ось гироскопа перестает отклоняться. Это тоже очень интересное свойство, так как в обычных условиях тело с прекращением действия силы продолжает свое движение по инерции.

Пусть на быстро вращающийся гироскоп в течение малого промежутка времени τ действует сила \mathbf{F} , причем величина $F\tau$ является конечной. Если плечо этой силы относительно точки O равно h , то $M = Fh$. Конец a вектора \mathbf{K}_O приобретает скорость v_a , модуль которой, согласно теореме Резаля, равен Fh . Точка a за время τ переместится на расстояние $aa' = v_a\tau = Fh\tau$. Учитывая, что Oa равняется $C\omega_1$, получаем, что ось гироскопа за время τ повернется на малый угол β , определяемый равенством

$$\beta = \frac{aa'}{Oa} = \frac{Fh\tau}{C\omega_1}. \quad (50)$$

Так как $Fh\tau$ — конечная величина, а $C\omega_1$ — большая, то угол β будет малым.

Отсюда следует, что при кратковременном действии сил ось гироскопа практически сохраняет свое первоначальное положение в пространстве.

При длительном воздействии силы \mathbf{F} указанное свойство гироскопа не будет сохраняться продолжительно. Увеличением кинетического момента гироскопа $C\omega_1$ можно только увеличить промежуток времени, по истечении которого отклонение оси гироскопа от ее первоначального направления не будет превосходить определенного значения.

В технике характерным режимом работы гироскопа является работа в условиях длительно действующих постоянных или медленно меняющихся моментов, которые при наличии достаточного кинетического момента гироскопа сообщают ему весьма медленную прецессию. Это медленное изменение положения оси гироскопа является важнейшим

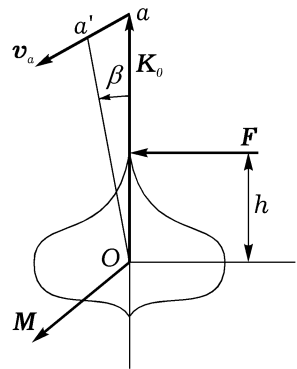


Рис. 106

(но не единственным) свойством гироскопа, широко используемым на практике.

Рассмотрим гироскоп, вращающийся вокруг своей оси симметрии с угловой скоростью ω_1 . Пусть гироскоп совершает прецессию за счет того, что тело, на котором он установлен, вращается с угловой скоростью ω_2 . Необходимый для прецессии момент M_O создается силами давления, действующими со стороны тела на гироскоп. Этот момент может быть вычислен по основной формуле гироскопии (46). По третьему закону Ньютона гироскоп давит на тело, на котором он установлен, с такими же по величине, но противоположно направленными силами. Эти силы создают момент $M_{\text{зуп}}$, действующий на тело, вынуждающее гироскоп совершать прецессию. Этот момент называют *гироскопическим моментом*. Очевидно, что $M_{\text{зуп}} = -M_O$. В рамках приближенной теории гироскопа имеем

$$M_{\text{зуп}} = C\omega_1 \times \omega_2. \quad (51)$$

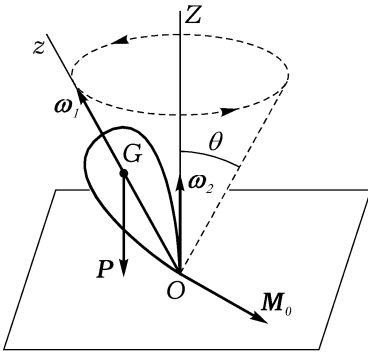


Рис. 107

В заключение, опираясь на элементарную теорию гироскопа, рассмотрим задачу о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае Лагранжа (см. п. 105). Пусть динамически симметричное твердое тело весом P имеет неподвижную точку O (рис. 107). В начальный момент оно расположено так, что ось симметрии Oz составляет угол θ с вертикалью. Пусть тело закручено вокруг оси симметрии с угловой скоростью ω_1 , направленной как показано на рис. 107. Момент M_O

силы тяжести P при любом направлении оси Oz горизонтален. Следовательно, вертикальная ось OZ является осью прецессии. Ось гироскопа движется по поверхности конуса с углом при вершине, равным 2θ . Направление движения указано на рис. 107 стрелками.

Угловую скорость прецессии найдем из формулы (48). Момент M_O имеет величину $P \cdot OG \cdot \sin \theta$. Согласно (48), эта величина должна равняться $C\omega_1\omega_2 \sin \theta$. Приравняв эти два значения для M_O , получим

$$\omega_2 = \frac{P \cdot OG}{C\omega_1}. \quad (52)$$

Угловая скорость прецессии не зависит от угла θ .

Таким образом, быстро вращающееся тяжелое твердое тело в случае Лагранжа совершает регулярную прецессию. Полученный вывод является приближенным. Он получен в предположениях элементарной теории гироскопов. В действительности движение гироскопа отличается от регулярной прецессии. В частности, угол θ не обязательно постоянен, он может изменяться в некотором интервале; колебательное движение оси симметрии гироскопа называется *нутацией*.

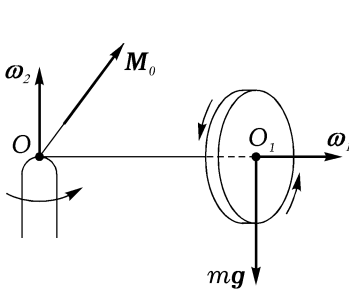


Рис. 108

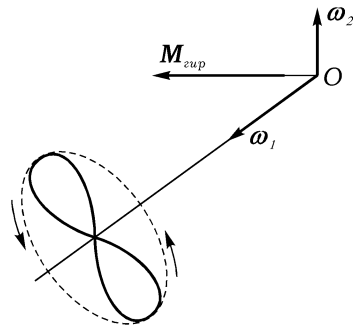


Рис. 109

ПРИМЕР 1. Гироскоп состоит из колеса радиусом $R = 0,1$ м, делающего $n = 100$ оборотов в секунду. Рама гироскопа, не изображенная на рис. 108, свободно вращается вокруг неподвижной точки O , расстояние которой OO_1 от колеса гироскопа равно $0,2$ м. Считая колесо однородным диском и пренебрегая массой рамы, определить направление и угловую скорость прецессионного движения, которое начнет совершать гироскоп, если будет предоставлен самому себе при горизонтальном положении плеча OO_1 . Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2 .

Момент силы тяжести M_O горизонтален, перпендикулярен OO_1 и направлен как показано на рис. 108, его величина $M_O = mg \cdot OO_1$, где m — масса колеса. Согласно формуле (46), для указанного на рисунке направления вращения колеса момент M_O вызовет регулярную прецессию гироскопа с угловой скоростью прецессии ω_2 , направленной вертикально вверх.

Для подсчета величины угловой скорости прецессии можно воспользоваться либо основной формулой гироскопии (46), либо формулой (48) приближенной теории гироскопа (у нас $\theta = \pi/2$, и поэтому эти формулы совпадают). Получим

$$C\omega_1\omega_2 = mg \cdot OO_1.$$

Учитывая, что $C = 1/2mR^2$, находим отсюда

$$\omega_2 = \frac{mg \cdot OO_1}{C\omega_1} = \frac{mg \cdot OO_1}{1/2mR^2 \cdot 2\pi n} = \frac{2}{\pi}.$$

В рамках приближенной теории гироскопа $\theta = \text{const}$ и точка O_1 будет описывать горизонтальную окружность в направлении, указанном стрелкой. При этом величина угловой скорости плеча OO_1 равна $\frac{2}{\pi} \frac{1}{c}$.

ПРИМЕР 2. Модель самолета, летящая со скоростью v , совершает поворот по горизонтальной окружности радиусом ρ . Момент инерции пропеллера и мотора относительно их общей оси вращения равен C . Пропеллер и мотор вращаются с угловой скоростью ω_1 . Найти момент гироскопических давлений.

Угловая скорость прецессии вертикальна и по величине равна v/ρ , угол нутации θ равен $\pi/2$. Согласно (46), находим

$$\mathbf{M}_{\text{зур}} = C\omega_1 \times \omega_2, \quad M_{\text{зур}} = \frac{Cv\omega_1}{\rho}.$$

Гироскопический момент $\mathbf{M}_{\text{зур}}$ горизонтален. Гироскопические же давления вертикальны, и при направлении вращения пропеллера, указанном на рис. 109, гироскопические давления при повороте авиамоделей влево от курса стремятся поднять ее носовую часть вверх.

§ 3. Движение свободного твердого тела

108. Дифференциальные уравнения движения свободного твердого тела. Пусть требуется найти движение свободного твердого тела относительно неподвижной системы координат O_aXYZ . Согласно теореме Шаля (п. 21), любое движение твердого тела можно рассматривать как совокупность поступательного движения, определяемого движением произвольной точки тела (полюса), и движения тела вокруг этой точки как неподвижной. При описании движения полюс желательно выбрать так, чтобы его движение определялось наиболее просто. Из основных теорем динамики следует, что за полюс удобно взять центр масс. Действительно, согласно теореме о движении центра масс, последний движется как материальная точка, к которой приложены все внешние силы системы, а теоремы об изменении кинетического момента и кинетической энергии для движения вокруг центра масс (см. определение этого понятия в п. 81) формулируются точно так же, как и для движения вокруг неподвижной точки.