

Учитывая, что  $C = 1/2mR^2$ , находим отсюда

$$\omega_2 = \frac{mg \cdot OO_1}{C\omega_1} = \frac{mg \cdot OO_1}{1/2mR^2 \cdot 2\pi n} = \frac{2}{\pi}.$$

В рамках приближенной теории гироскопа  $\theta = \text{const}$  и точка  $O_1$  будет описывать горизонтальную окружность в направлении, указанном стрелкой. При этом величина угловой скорости плеча  $OO_1$  равна  $\frac{2}{\pi} \frac{1}{c}$ .

**ПРИМЕР 2.** Модель самолета, летящая со скоростью  $v$ , совершает поворот по горизонтальной окружности радиусом  $\rho$ . Момент инерции пропеллера и мотора относительно их общей оси вращения равен  $C$ . Пропеллер и мотор вращаются с угловой скоростью  $\omega_1$ . Найти момент гироскопических давлений.

Угловая скорость прецессии вертикальна и по величине равна  $v/\rho$ , угол нутации  $\theta$  равен  $\pi/2$ . Согласно (46), находим

$$\mathbf{M}_{\text{зур}} = C\omega_1 \times \omega_2, \quad M_{\text{зур}} = \frac{Cv\omega_1}{\rho}.$$

Гироскопический момент  $\mathbf{M}_{\text{зур}}$  горизонтален. Гироскопические же давления вертикальны, и при направлении вращения пропеллера, указанном на рис. 109, гироскопические давления при повороте авиамоделей влево от курса стремятся поднять ее носовую часть вверх.

### § 3. Движение свободного твердого тела

**108. Дифференциальные уравнения движения свободного твердого тела.** Пусть требуется найти движение свободного твердого тела относительно неподвижной системы координат  $O_aXYZ$ . Согласно теореме Шаля (п. 21), любое движение твердого тела можно рассматривать как совокупность поступательного движения, определяемого движением произвольной точки тела (полюса), и движения тела вокруг этой точки как неподвижной. При описании движения полюс желательно выбрать так, чтобы его движение определялось наиболее просто. Из основных теорем динамики следует, что за полюс удобно взять центр масс. Действительно, согласно теореме о движении центра масс, последний движется как материальная точка, к которой приложены все внешние силы системы, а теоремы об изменении кинетического момента и кинетической энергии для движения вокруг центра масс (см. определение этого понятия в п. 81) формулируются точно так же, как и для движения вокруг неподвижной точки.

Пусть  $M$  — масса тела,  $\mathbf{v}_C$  — скорость центра масс,  $\mathbf{K}_C$  — кинетический момент тела в его движении относительно центра масс, т. е. (см. п. 81) относительно системы координат, которая имеет начало в центре масс тела и движется поступательно. Если  $\mathbf{R}^{(e)}$  и  $\mathbf{M}_C^{(e)}$  — главный вектор и главный момент внешних сил относительно точки  $C$ , то из теоремы о движении центра инерции (п. 86) и теоремы об изменении кинетического момента (п. 87) имеем два векторных дифференциальных уравнения

$$M \frac{d\mathbf{v}_C}{dt} = \mathbf{R}^{(e)}, \quad \frac{d\mathbf{K}_C}{dt} = \mathbf{M}_C^{(e)}. \quad (1)$$

Если  $X_C, Y_C, Z_C$  — координаты центра масс тела в неподвижной системе координат  $O_aXYZ$ , а  $R_x, R_y, R_z$  — проекции вектора  $\mathbf{R}^{(e)}$  на оси  $O_aX, O_aY, O_aZ$ , то первое уравнение из (1) запишется в виде следующих скалярных уравнений:

$$M \frac{d^2 X_C}{dt^2} = R_x, \quad M \frac{d^2 Y_C}{dt^2} = R_y, \quad M \frac{d^2 Z_C}{dt^2} = R_z. \quad (2)$$

Пусть  $CXYZ$  — поступательно движущаяся кенигова система координат, а  $Cxyz$  — система координат, жестко связанная с движущимся телом. Если  $p, q, r$  — проекции угловой скорости тела на оси  $Cx, Cy, Cz$ , а  $M_x, M_y, M_z$  — компоненты вектора  $\mathbf{M}_C^{(e)}$  в системе координат  $Cxyz$ , то второе уравнение из (1) запишется в виде уравнений (3) п. 97:

$$\begin{aligned} J_x \frac{dp}{dt} - J_{xy} \frac{dq}{dt} - J_{xz} \frac{dr}{dt} + (J_z - J_y)qr + J_{yz}(r^2 - q^2) + \\ + p(J_{xy}r - J_{xz}q) = M_x, \\ -J_{xy} \frac{dp}{dt} + J_y \frac{dq}{dt} - J_{yz} \frac{dr}{dt} + (J_x - J_z)rp + J_{xz}(p^2 - r^2) + \\ + q(J_{yz}p - J_{xy}r) = M_y, \\ -J_{xz} \frac{dp}{dt} - J_{yz} \frac{dq}{dt} + J_z \frac{dr}{dt} + (J_y - J_x)pq + J_{xy}(q^2 - p^2) + \\ + r(J_{xz}q - J_{yz}p) = M_z. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $J_x, J_y, J_z, J_{xy}, J_{xz}, J_{yz}$  — компоненты тензора инерции тела для центра масс в системе координат  $Cxyz$ . Если оси  $Cx, Cy, Cz$  — главные оси инерции тела для центра масс, то уравнения (3) упрощаются и принимают вид динамических уравнений Эйлера (4) п. 97.

В уравнениях (3) величины  $p$ ,  $q$ ,  $r$  можно заменить на их выражения, задаваемые кинематическими уравнениями Эйлера

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ q &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ r &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (4)$$

Углы Эйлера, задающие взаимную ориентацию систем координат  $Cxyz$  и  $CXYZ$ , вводятся обычным образом.

Уравнения (2)–(4) образуют систему дифференциальных уравнений, описывающую движение свободного твердого тела. В общем случае правые части уравнений (2), (3) зависят от величин  $X_C$ ,  $Y_C$ ,  $Z_C$ ,  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ , их первых производных и времени, и в этом случае систему уравнений (2)–(4) надо решать совместно.

Но в простых случаях возможно раздельное интегрирование систем (2) и (3)–(4). Например, пусть свободное твердое тело движется в однородном поле тяжести. Единственной внешней силой, действующей на тело, является сила тяжести, приложенная в центре масс и направленная по вертикали вниз. Если ось  $O_a Z$  направить по вертикали вверх, то уравнения (2) примут вид

$$\frac{d^2 X_C}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 Y_C}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 Z_C}{dt^2} = -g,$$

где  $g$  — ускорение свободного падения. Отсюда следует, что при произвольных начальных условиях центр масс тела будет двигаться по параболе. А так как момент  $M_C$  силы тяжести относительно центра масс равен нулю, то движение тела вокруг центра масс будет движением Эйлера–Пуансо.

Если твердое тело несвободно, то величины  $X_C$ ,  $Y_C$ ,  $Z_C$ ,  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  и, может быть, их производные связаны некоторыми соотношениями. Уравнения движения по-прежнему имеют вид (2)–(4), но в правые части уравнений (2) и (3) войдут реакции связей.

**ПРИМЕР 1.** В момент метания диска его плоскость занимает горизонтальное положение, а центр диска находится на высоте  $h$  над поверхностью Земли. Центру диска сообщена горизонтальная скорость  $v_0$ , а сам диск закручен с угловой скоростью  $\omega_0$ , составляющей угол  $\delta = \pi/4$  с его плоскостью. Векторы  $v_0$  и  $\omega_0$  лежат в неподвижной вертикальной плоскости  $O_a YZ$  (рис. 110). Считая диск тонкой однородной пластинкой, найти его движение. Влиянием воздуха пренебречь.

В неподвижной системе координат  $O_a XYZ$ , плоскость  $O_a XY$  которой совпадает с горизонтальной поверхностью Земли, а ось  $O_a Z$  вер-

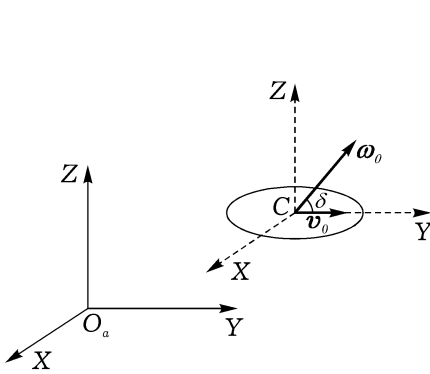


Рис. 110

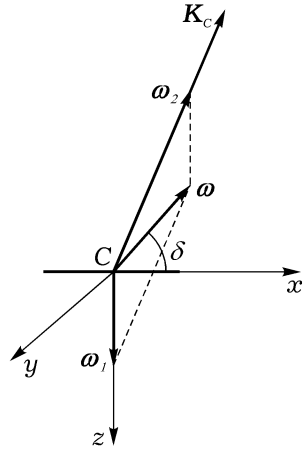


Рис. 111

тикальна, центр масс диска  $C$  движется по параболе

$$X_C(t) = 0, \quad Y_C(t) = v_0 t + Y_C(0), \quad Z_C(t) = h - \frac{gt^2}{2}.$$

Движение диска относительно кениговой системы координат  $CXYZ$ , оси которой параллельны соответствующим осям системы координат  $O_aXYZ$ , является регулярной прецессией. Оси жестко связанной с диском системы координат  $Cxyz$ , образованной главными центральными осями инерции диска, направим так, чтобы в момент метания диска  $t = 0$  ось  $Cx$  совпала с осью  $CY$ , ось  $Cy$  совпала с осью  $CX$ , а направление оси  $Cz$  было бы противоположно направлению оси  $CZ$  кениговой системы координат (см. рис. 110 и 111).

Для главных центральных моментов инерции диска имеем:  $J_z = 2J_x = 2J_y = 1/2mR^2$  ( $m$  — масса диска,  $R$  — его радиус). Так как  $J_z > J_x$ , то угол  $\theta$  между векторами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , согласно п. 100, тупой (рис. 111).

На рис. 111 показана ориентация вектора  $\omega$  относительно диска при  $t = 0$ ; имеем:  $p = \omega_0 \cos \delta$ ,  $q = 0$ ,  $r = r_0 = -\omega_0 \sin \delta$ . Поэтому для неизменного модуля кинетического момента диска  $K_C$  получаем:

$$K_C = \sqrt{J_x^2 p^2 + J_y^2 q^2 + J_z^2 r^2} = J_x \omega_0 \sqrt{1 + 3 \sin^2 \delta}.$$

Формулы (13), (15) и (16) п. 100 дают:

$$\cos \theta = \frac{J_z r_0}{K_C} = -\frac{2 \sin \delta}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 \delta}}, \quad \omega_2 = \frac{K_C}{J_x} = \omega_0 \sqrt{1 + 3 \sin^2 \delta},$$

$$\omega_1 = \frac{J_x - J_z}{J_x} r_0 = \omega_0 \sin \delta.$$

Вектор  $\mathbf{K}_C$  задает ось прецессии. Он имеет неизменное направление в пространстве: лежит в плоскости  $CYZ$  и составляет с горизонтальной осью  $CY$  постоянный угол, равный  $\theta - \pi/2$ . Для единичного вектора  $e$ , направленного вдоль  $\mathbf{K}_C$ , получаем в системе координат  $CXYZ$ :

$$e' = \left( 0, \frac{\cos \delta}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 \delta}}, \frac{2 \sin \delta}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 \delta}} \right).$$

Подставив в полученные выражения заданное значение угла  $\delta$ , равное  $\pi/4$ , получим, что в кениговой системе координат диск совершает регулярную прецессию:

$$\theta = \pi - \arccos \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \dot{\psi} = \omega_2 = \frac{\sqrt{10}}{2} \omega_0, \quad \dot{\varphi} = \omega_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_0;$$

ось прецессии определяется вектором  $e' = (0, 1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ .

**109. Плоское движение тела.** Пусть все точки тела движутся параллельно плоскости  $O_aXY$ . Получим дифференциальные уравнения, описывающие это плоское движение тела. Без ограничения общности можно считать, что центр масс тела движется в плоскости  $O_aXY$ , поэтому  $Z_C \equiv 0$ . Также можно считать, что оси  $Cx$ ,  $Cy$  связанной с телом системы координат  $Cxyz$  движутся в плоскости  $O_aXY$ , т. е. ось  $Cz$  перпендикулярна этой плоскости. Тогда, полагая  $\theta \equiv 0$ ,  $\psi \equiv 0$ , из кинематических уравнений Эйлера (4) имеем

$$p \equiv 0, \quad q \equiv 0, \quad r = \dot{\varphi}. \quad (5)$$

Подставив  $Z_C \equiv 0$  в уравнения (2), а выражения (5) для  $p$ ,  $q$ ,  $r$  в уравнения (3), получим

$$M \frac{d^2 X_C}{dt^2} = R_X, \quad M \frac{d^2 Y_C}{dt^2} = R_Y, \quad R_Z = 0. \quad (6)$$

$$-J_{xz} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + J_{yz} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = M_x, \quad -J_{yz} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} - J_{xz} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = M_y, \quad (7)$$

$$J_z \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = M_z.$$

Последнее уравнение из (6) и первые два уравнения из (7) налагают ограничения на геометрию масс тела, внешние силы и частично на начальные условия, при выполнении которых плоское движение тела возможно. Остальные три уравнения

$$M \frac{d^2 X_C}{dt^2} = R_X, \quad M \frac{d^2 Y_C}{dt^2} = R_Y, \quad J_z \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = M_Z \quad (8)$$

являются дифференциальными уравнениями плоского движения твердого тела.

**ПРИМЕР 1.** Тело совершает плоское движение под действием постоянной во величине и направлению силы  $\mathbf{F}$ . Линия действия силы лежит в плоскости, проходящей через центр масс тела и параллельной плоскости его движения (рис. 112). Определить движение тела.

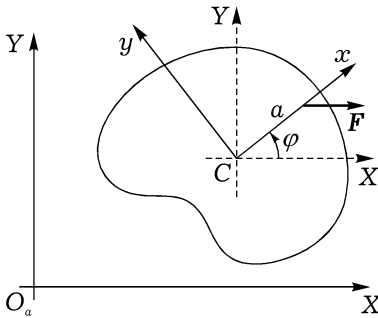


Рис. 112

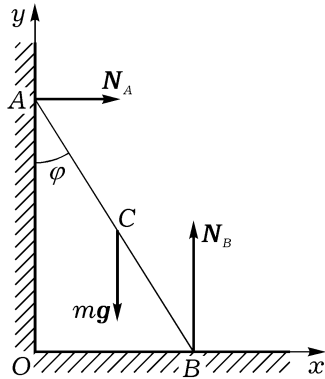


Рис. 113

Пусть  $m$  — масса тела,  $a$  — расстояние от центра масс до точки приложения силы,  $J$  — момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс тела и перпендикулярной плоскости движения.

Напишем уравнения движения тела (8). Направление оси  $O_a X$  выберем так, чтобы оно совпадало с направлением силы  $\mathbf{F}$  (рис. 112). Тогда

$$m \ddot{X}_C = F, \quad m \ddot{Y}_C = 0, \quad J \ddot{\varphi} = -F a \sin \varphi.$$

Из первых двух уравнений следует, что центр масс тела будет (при  $\dot{Y}_C(0) \neq 0$ ) двигаться по параболе

$$X_C(t) = \frac{F t^2}{2m} + \dot{X}_C(0)t + X_C(0), \quad Y_C(t) = \dot{Y}_C(0)t + Y_C(0);$$

если  $\dot{Y}_C(0) = 0$ , то центр масс движется с постоянным ускорением  $F/m$  вдоль прямой, параллельной оси  $O_aX$ , и за время  $t$  пройдет путь  $s = \frac{Ft^2}{2m} + \dot{X}_C(0)t$ .

Одновременно тело вращается относительно центра масс; это вращение описывается третьим из написанных уравнений движения тела. Сравнивая это уравнение с уравнением движения математического маятника (уравнение (6) п. 57), видим, что относительно центра масс тело движется как математический маятник длиной  $l = Jg/(Fa)$ .

**ПРИМЕР 2.** Тонкий однородный стержень приставлен одним концом к гладкой вертикальной стене, а другим концом опирается на гладкий горизонтальный пол (рис. 113). Стержень пришел в движение из состояния покоя, когда он составлял угол  $\alpha$  с вертикалью. Вычислить начальные давления на стену и пол.

Движение стержня происходит под действием силы тяжести  $mg$  и реакций  $N_A$  и  $N_B$  стены и пола;  $N_A$  имеет горизонтальное, а  $N_B$  — вертикальное направления. Пусть  $a$  — длина стержня, а  $x$ ,  $y$  — координаты его центра тяжести  $C$  в показанной на рис. 113 системе координат  $Oxy$ . Дифференциальные уравнения движения стержня имеют вид

$$m\ddot{x} = N_A, \quad m\ddot{y} = N_B - mg, \quad \frac{1}{12}ma^2\ddot{\varphi} = -\frac{1}{2}N_Aa \cos \varphi + \frac{1}{2}N_Ba \sin \varphi.$$

Но

$$x = \frac{1}{2}a \sin \varphi, \quad y = \frac{1}{2}a \cos \varphi;$$

$$\ddot{x} = \frac{a}{2}(\cos \varphi \cdot \ddot{\varphi} - \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2), \quad \ddot{y} = -\frac{a}{2}(\sin \varphi \cdot \ddot{\varphi} + \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2).$$

Поэтому из первых двух уравнений движения стержня имеем

$$N_A = \frac{1}{2}ma(\cos \varphi \cdot \ddot{\varphi} - \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2), \quad N_B = mg - \frac{1}{2}ma(\sin \varphi \cdot \ddot{\varphi} + \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2).$$

Подставив эти выражения для  $N_A$  и  $N_B$  в третье из уравнений движения стержня и учтя, что при  $t = 0$   $\varphi = \alpha$ ,  $\dot{\varphi} = 0$ , получим, что при  $t = 0$

$$\ddot{\varphi} = \frac{3g}{2a} \sin \alpha.$$

Следовательно, искомые начальные значения величин  $N_A$  и  $N_B$  будут такими:

$$N_A = \frac{3}{4}mg \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$N_B = mg \left(1 - \frac{3}{4} \sin^2 \alpha\right).$$

**ПРИМЕР 3.** Неоднородный диск катится по неподвижной горизонтальной плоскости так, что скольжение отсутствует, а плоскость диска все время остается в фиксированной вертикальной плоскости (см. пример 4 п. 87). Масса диска равна  $m$ , радиус  $a$ , центр масс  $C$  находится на расстоянии  $b$  от геометрического центра, момент инерции относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр масс, равен  $J_C$ . Используя теорию плоского движения, получим дифференциальные уравнения движения диска.

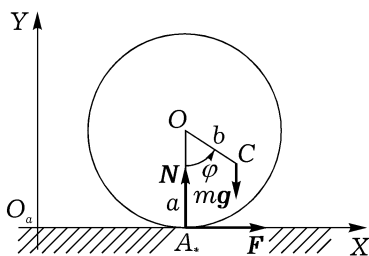


Рис. 114

Движение диска происходит под действием силы тяжести и реакции плоскости, которая приложена в точке  $A_*$  диска, в которой происходит его касание с плоскостью; разложим реакцию на две составляющие: вертикальную  $N$  и горизонтальную  $F$  (рис. 114).

Уравнения (8) в рассматриваемой задаче будут иметь вид

$$\begin{aligned} m\ddot{X}_C &= F, \\ m\ddot{Y}_C &= N - mg, \\ J_C\ddot{\varphi} &= F(a - b \cos \varphi) - Nb \sin \varphi. \end{aligned}$$

Из условия отсутствия скольжения (скорость точки  $A_*$  равна нулю) следует, что во все время движения должны выполняться равенства

$$\dot{X}_C = -(a - b \cos \varphi)\dot{\varphi}, \quad \dot{Y}_C = b \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}.$$

Следовательно,

$$\ddot{X}_C = -(a - b \cos \varphi) \cdot \ddot{\varphi} - b \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2, \quad \ddot{Y}_C = b \sin \varphi \cdot \ddot{\varphi} + b \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2.$$

Поэтому первые два из трех дифференциальных уравнений движения диска дают зависимость составляющих реакции плоскости от  $\varphi$ ,  $\dot{\varphi}$  и  $\ddot{\varphi}$ :

$$N = mg + mb(\sin \varphi \cdot \ddot{\varphi} + \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2), \quad F = -m[(a - b \cos \varphi)\ddot{\varphi} + b \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2].$$

Подставив эти выражения для  $N$  и  $F$  в третье из дифференциальных уравнений движения диска, придем к уравнению, описывающему изменение угла  $\varphi$  во времени:

$$[J_C + m(a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi)]\ddot{\varphi} + tab \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + mgb \sin \varphi = 0.$$

В примере 4 п. 87 это уравнение было получено при помощи теоремы об изменении кинетического момента.