Глава VIII
Элементы небесной механики

§ 1. Задача двух тел

115. Уравнения движения. *Небесная механика* изучает движение небесных объектов, естественных и искусственных, под действием сил гравитационного взаимодействия тел, сил сопротивлений, вызываемых наличием пылевых, газовых и других сред, сил светового давления и т. п. Важнейшей для приложений задачей небесной механики является задача двух тел, а точнее — задача двух материальных точек.

Задача двух тел состоит в следующем. В пустом пространстве движутся две материальные точки, притягивающиеся одна к другой по закону всемирного тяготения Ньютона. Заданы начальные положения точек и их скорости. Требуется найти положения точек для любого последующего момента времени.

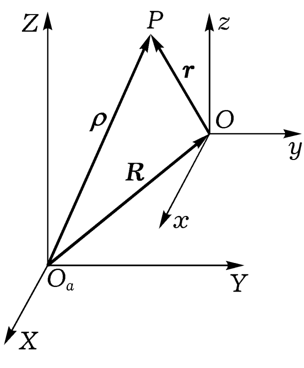

Рис. 120

Эта задача является основной в проблеме движения планет Солнечной системы и искусственных спутников Земли, Луны и планет, так как в большинстве случаев силы взаимного притяжения планет, силы притяжения спутника Земли планетами, силы сопротивления космической среды, силы светового давления и т. п. малы по сравнению с силами гравитационного притяжения планеты и Солнца или спутника и Земли.

Замечательно то, что интегрирование дифференциальных уравнений движения в задаче двух тел сводится к квадратурам. Для получения уравнений движения введем инерциальную систему координат O_aXYZ; ее начало совпадает, например, с центром масс Солнечной системы, а оси направлены на неподвижные звезды. Положения материальных точек P и O задаются их радиусами-векторами $\boldsymbol{\rho}$ и $\boldsymbol{R}$ соответственно (рис. 120). С точкой O свяжем поступательно движущуюся систему координат $Oxyz$, оси которой параллельны соответствующим осям системы O_aXYZ. Положение точки P относительно точки O задается радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$.

Пусть M и m — массы точек O и P соответственно, а γ — универсальная гравитационная постоянная. Со стороны точки O на точку P действует сила $\boldsymbol{F}$, определяемая законом всемирного тяготения:

$$\boldsymbol{F} = -\gamma \frac{mM}{r^3} \boldsymbol{r}.$$

Со стороны же точки P на точку O действует сила $-\boldsymbol{F}$. Радиусы-векторы $\boldsymbol{\rho}$ и $\boldsymbol{R}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{d^2\boldsymbol{\rho}}{dt^2} = -\gamma \frac{M}{r^3} \boldsymbol{r}, \qquad \frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2} = \gamma \frac{m}{r^3} \boldsymbol{r}.$$

Так как $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{R}$, то отсюда следует, что

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -\gamma \frac{M}{r^3} \boldsymbol{r} - \gamma \frac{m}{r^3} \boldsymbol{r} = -\gamma(m+M) \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}.$$

Если ввести обозначение $k = \gamma(m+M)$, то получим

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -k \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}. \tag{1}$$

Это уравнение определяет движение точки P относительно точки O. Если вектор-функция $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ найдена, то определение движения относительно системы координат O_aXYZ не представляет труда. Действительно, пусть C — центр масс точек P и O. Так как точки P и O образуют замкнутую систему, то, согласно теореме о движении центра масс, точка C движется равномерно и прямолинейно; ее скорость полностью определяется начальными скоростями точек O и P. Если $\boldsymbol{R}_C$ — радиус-вектор центра масс, то

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{R}_C + \frac{M}{m+M} \boldsymbol{r}, \qquad \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_C - \frac{m}{m+M} \boldsymbol{r}.$$

116. Интеграл площадей. Второй закон Кеплера. Дифференциальное уравнение (1) описывает движение точки P в подвижной системе координат $Oxyz$. Это уравнение можно (а для дальнейшего очень удобно) интерпретировать как дифференциальное уравнение движения точки P относительно неподвижного притягивающего центра O под действием центральной силы, равной $-mk\boldsymbol{r}/r^3$.

Согласно теореме об изменении кинетического момента, момент количества движения точки P относительно точки O остается постоянным. Отсюда следует, что

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{c}. \tag{2}$$

Это соотношение носит название *интеграла площадей.* В нем $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$ — скорость точки P относительно точки O, $\boldsymbol{c}$ — векторная константа интеграла площадей.

Проекции вектора $\boldsymbol{c}$ на оси системы координат $Oxyz$ определяются по формулам

$$c_x = y\dot{z} - \dot{y}z, \qquad c_y = z\dot{x} - \dot{z}x, \qquad c_z = x\dot{y} - \dot{x}y, \tag{3}$$

в которых правые части вычисляются для любого (например, начального) момента времени.

Если $c_x = c_y = c_z = 0$, то, очевидно, движение точки P происходит по прямой, проходящей через точку O. Если же хотя бы одна из величин (3) отлична от нуля, то вектор $\boldsymbol{r}$ во все время движения лежит в одной и той же фиксированной плоскости, которая перпендикулярна вектору $\boldsymbol{c}$. Уравнение этой плоскости имеет вид

$$c_x x + c_y y + c_z z = 0. \tag{4}$$

Таким образом, орбита точки P является плоской кривой. Плоскость орбиты однозначно определяется вектором $\boldsymbol{c}$, или начальным положением $\boldsymbol{r}_0$ и скоростью $\boldsymbol{v}_0$ точки P относительно точки O.

Выясним геометрический смысл интеграла площадей. Введем систему координат $O\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$, совместив плоскость $O\tilde{x}\tilde{y}$ с плоскостью орбиты. Тогда $c_{\tilde{x}} = c_{\tilde{y}} = 0$, $c_{\tilde{z}} = \tilde{x}\dot{\tilde{y}} - \dot{\tilde{x}}\tilde{y}$ $\left(c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2} = |c_{\tilde{z}}|\right)$. Пусть θ — угол, который радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ составляет с осью $O\tilde{x}$. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= r\cos\theta, & \tilde{y} &= r\sin\theta, \\ \dot{\tilde{x}} &= \dot{r}\cos\theta - \dot{\theta}r\sin\theta, & \dot{\tilde{y}} &= \dot{r}\sin\theta + \dot{\theta}r\cos\theta. \end{aligned}$$

Отсюда и из выражения для $c_{\tilde{z}}$ получаем полярную форму интеграла площадей:

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = c_{\tilde{z}}. \tag{5}$$

Пусть теперь P и P' (рис. 121) — положения, которые занимает точка P в моменты t и $t + \Delta t$, где Δt — малая величина. Для площади криволинейного треугольника OPP' с точностью до величин первого порядка малости включительно относительно $\Delta\theta$ имеем выражение

$$\Delta S = \frac{1}{2}r^2\Delta\theta.$$

Разделив обе части этого равенства на Δt и устремив Δt к нулю, получим

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}. \tag{6}$$

Производная dS/dt в механике называется *секторной скоростью.* Из (5) и (6) для нее получаем выражение

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}c_{\tilde{z}}.$$

Таким образом, секторная скорость точки P постоянна. В этом состоит геометрический смысл интеграла площадей.

Отсюда следует второй закон Кеплера: *площади, заметенные радиусом-вектором, идущим от Солнца к планете, пропорциональны промежуткам времени, в которые они были заметены.*

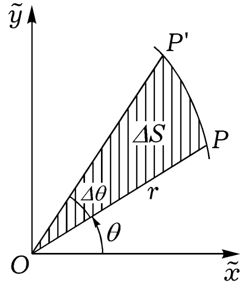

Рис. 121

117. Интеграл энергии в задаче двух тел. Кинетическая и потенциальная энергия точки P в ее движении относительно притягивающего центра O определяются равенствами

$$T = \frac{1}{2}mv^2, \quad \Pi = -\frac{mk}{r}.$$

Так как других сил, помимо потенциальных, нет и потенциал Π не зависит от времени, то полная механическая энергия $E = T + \Pi$ постоянна. Таким образом, в задаче двух тел существует интеграл энергии, который запишем в виде

$$v^2 - \frac{2k}{r} = h \quad (h = \text{const}). \tag{7}$$

Константа энергии h определяется начальным положением и скоростью точки P:

$$h = v_0^2 - \frac{2k}{r_0}.$$

Из интеграла (7) следует, что при удалении точки P от точки O ее скорость убывает, а при приближении к точке O — возрастает. Если $h \geqslant 0$, то точка P может уйти от точки O на сколь угодно большое расстояние. Если же $h < 0$, то, как следует из (7), расстояние r между точками P и O не может превзойти величину $2k/|h|$, т. е. движение точки P происходит в ограниченной части пространства.

118. Интеграл Лапласа. Из (1) и (2) следует равенство

$$\boldsymbol{c} \times \ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{k}{r^3}(\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}) \times \boldsymbol{r}. \tag{8}$$

Но так как

$$\boldsymbol{c} \times \ddot{\boldsymbol{r}} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{v})$$

и

$$(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})\times\boldsymbol{r}=\dot{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})-\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})=\dot{\boldsymbol{r}}r^2-\boldsymbol{r}r\dot{r}=r^3\frac{r\dot{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{r}\dot{r}}{r^2}=r^3\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right),$$

равенство (8) можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{v})=-k\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right).$$

Отсюда следует, что

$$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{v}+k\frac{\boldsymbol{r}}{r}=-\boldsymbol{f}. \tag{9}$$

Соотношение (9) называется *интегралом Лапласа*, а вектор $\boldsymbol{f}$ — *вектором Лапласа.* Знак минус в правой части (9) введен для удобства дальнейшего использования интеграла (9).

Из соотношения (9) сразу следует, что

$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{f}=0, \tag{10}$$

т.е. вектор Лапласа ортогонален векторной константе площадей и, следовательно, лежит в плоскости орбиты.

Модуль вектора Лапласа можно выразить через величину k и постоянные h, c интегралов энергии и площадей. В самом деле, учитывая ортогональность векторов $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{v}$, из (9) имеем

$$f^2=k^2\frac{\boldsymbol{r}^2}{r^2}+c^2v^2+\frac{2k}{r}(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{r}. \tag{11}$$

Используя свойства смешанного произведения векторов и равенство (2), получаем

$$(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{r}=-(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=-c^2.$$

Отсюда и из (7) следует, что соотношение (11) может быть записано в виде

$$f^2=k^2+hc^2. \tag{12}$$

119. Уравнение орбиты. Первый закон Кеплера. При помощи интеграла Лапласа и интеграла площадей можно получить уравнение орбиты точки P.

Из (9) сразу следует, что при $\boldsymbol{c}=0$ орбита точки будет прямолинейной: $\boldsymbol{r}=-\frac{r}{k}\boldsymbol{f}$. Пусть $\boldsymbol{c}\neq 0$. Умножим обе части интеграла Лапласа (9) скалярно на $\boldsymbol{r}$. Получим равенство

$$\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{v})+\frac{k}{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})=-(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{r}).$$

Но, так как $\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{v}) = -c^2$, это равенство можно записать в виде

$$-c^2 + kr = -fr\cos\nu, \tag{13}$$

где ν — угол между радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$ точки P и вектором Лапласа $\boldsymbol{f}$ (рис. 122). Угол ν называется *истинной аномалией.*

Если ввести обозначения

$$e = \frac{f}{k}, \quad p = \frac{c^2}{k}, \tag{14}$$

то из (13) получим уравнение орбиты точки P в виде

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\nu}. \tag{15}$$

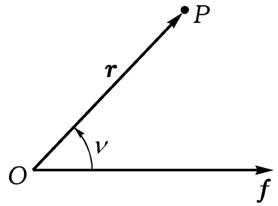

Рис. 122

Соотношение (15) представляет собой уравнение конического сечения, фокус которого находится в точке O. Величина p — параметр, e — эксцентриситет орбиты. Орбита точки P относительно точки O будет либо эллипсом (e $<$ 1), либо параболой (e $=$ 1), либо гиперболой (e $>$ 1). При e $=$ 0 орбита будет окружностью.

Для орбит планет справедлив первый закон Кеплера: *планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце.*

120. Зависимость характера орбиты от величины начальной скорости. Первая и вторая космические скорости. Пусть орбита точки P не является прямолинейной, т. е. $c \neq 0$. Если задано начальное расстояние r_0 точки P от точки O, то характер орбиты точки P вполне определяется величиной ее скорости v_0. Рассмотрим зависимость эксцентриситета орбиты от величины v_0.

Из (12) и (14) получаем выражение для эксцентриситета

$$e = \sqrt{1 + h\frac{c^2}{k^2}}.$$

Но константа энергии h равна $v_0^2 - 2k/r_0$. Отсюда следует, что орбита будет эллиптической (e $<$ 1), если $h < 0$. Это означает, что $v_0 < \sqrt{2k/r_0}$. Скорости, удовлетворяющие этому неравенству, называются *эллиптическими скоростями.*

Если $h = 0$, т. е. $v_0 = \sqrt{2k/r_0}$, то $e = 1$, и орбита будет параболой. Скорость $v_0 = \sqrt{2k/r_0}$ называется *параболической.* Она является наименьшей скоростью, которую надо сообщить точке P, находящейся на расстоянии r_0 от точки O, чтобы она удалилась на сколь угодно большое расстояние от точки O.

Орбита будет гиперболической ($e > 1$), если $h > 0$, т. е. $v_0 > \sqrt{2k/r_0}$. Такие скорости называются *гиперболическими.*

Первая космическая скорость v_I — это круговая скорость у поверхности Земли. Найдем ее величину. Пусть m — масса спутника, M — масса Земли, γ — универсальная гравитационная постоянная, g_0 — ускорение свободного падения у поверхности Земли. Тогда

$$\frac{mv_I^2}{r_0} = mg_0 = \gamma\frac{mM}{r_0^2}. \tag{16}$$

Так как $m \ll M$, то можно считать, что $k = \gamma(m+M) \simeq \gamma M$. Поэтому из (16) следует, что приближенно

$$v_I = \sqrt{g_0 r_0} = \sqrt{\frac{k}{r_0}}.$$

Принимая радиус Земли r_0 равным 6371 км, а величину g_0 равной 9,82 м/с^2, получим, что $v_I \simeq 7{,}91$ км/с.

Вторая космическая скорость v_{II} — это параболическая скорость у поверхности Земли, т. е.

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2k}{r_0}} = \sqrt{2}v_I \simeq 11{,}2 \text{ км/с}.$$

121. Третий закон Кеплера. Пусть орбита точки P представляет собой эллипс с полуосями a и b. Из аналитической геометрии известно, что величины a и b выражаются через параметр эллипса и его эксцентриситет посредством формул

$$a = \frac{p}{1-e^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}. \tag{17}$$

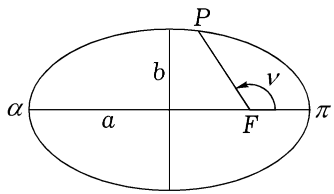

Рис. 123

Ближайшая к фокусу точка эллиптической орбиты называется *перицентром*, а наиболее удаленная от фокуса — *апоцентром.* Перицентр и апоцентр обозначены на рис. 123 буквами π и α.

За время, равное периоду T обращения точки P по орбите, радиус-вектор $\overline{FP}$ заметет всю площадь эллипса. Учитывая, что площадь эллипса равна πab и что, согласно интегралу площадей, секторная скорость точки P постоянна и равна c/2, получаем равенство

$$\pi ab = \frac{1}{2}cT. \tag{18}$$

Но из (14) и (17) следует, что $c = \sqrt{pk}$ и $p = b^2/a$. Поэтому из равенства (18) вытекает следующее выражение для периода обращения точки P:

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{k}}. \tag{19}$$

Величина $n = 2\pi/T$ является средней угловой скоростью вращения радиуса-вектора $\overline{FP}$, в астрономии ее называют *средним движением.* Согласно (19),

$$n = \frac{\sqrt{k}}{a^{3/2}}. \tag{20}$$

Рассмотрим две точки P_1 и P_2 массой m_1 и m_2. Если пренебречь взаимным притяжением этих точек, то каждая из них будет двигаться вокруг точки O по коническому сечению. Пусть орбиты точек будут эллиптическими. Тогда для периодов их обращения имеем выражения

$$T_1 = \frac{2\pi a_1^{3/2}}{\sqrt{\gamma(m_1 + M)}}, \quad T_2 = \frac{2\pi a_2^{3/2}}{\sqrt{\gamma(m_2 + M)}}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{m_2 + M}{m_1 + M} \frac{a_1^3}{a_2^3}. \tag{21}$$

При $m_1 \ll M$ и $m_2 \ll M$ это соотношение переходит в следующее приближенное равенство:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}. \tag{22}$$

Равенство (22) выражает третий закон Кеплера: *квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы их больших полуосей.*

122. Время в кеплеровском движении. Уравнение Кеплера. В предыдущих пунктах определен геометрический характер орбиты точки P. Орбита является коническим сечением и находится в плоскости, перпендикулярной векторной константе площадей $\boldsymbol{c}$. Положение самой орбиты в этой плоскости однозначно определяется вектором Лапласа $\boldsymbol{f}$, который проходит через точку O, являющуюся фокусом конического сечения, и направлен на перицентр π.

Чтобы закончить решение задачи двух тел, осталось найти закон движения точки P по ее орбите. Будем считать, что орбита является эллиптической. Из интеграла площадей имеем $r^2\dot{\nu} = c$. Отсюда, из уравнения орбиты (15) и равенств (14), (17) и (20) получаем

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{c}{r^2} = \frac{c}{p^2}(1 + e\cos\nu)^2 = \frac{\sqrt{k}}{p^{3/2}}(1 + e\cos\nu)^2 = \\ = \frac{n}{(1 - e^2)^{3/2}}(1 + e\cos\nu)^2.$$

Пусть τ — время прохождения точки P через перицентр. Тогда из последнего уравнения получаем неявную зависимость $\nu = \nu(t)$:

$$\int_0^\nu \frac{d\nu}{(1 + e\cos\nu)^2} = \frac{n}{(1 - e^2)^{3/2}}(t - \tau). \qquad (23)$$

Если отсюда найдена функция $\nu = \nu(t)$, то закон движения точки по орбите известен.

Найденное решение задачи двух тел зависит от шести произвольных постоянных. За них могут быть приняты константа τ и пять из семи констант $c_x, c_y, c_z, h, f_x, f_y, f_z$, связанных двумя соотношениями (10) и (12).

Нахождение зависимости $\nu = \nu(t)$ из трансцендентного уравнения (23) представляет собой довольно трудную задачу. Введем вместо ν новую переменную E, через которую ν выражается очень просто, а зависимость $E = E(t)$ определяется уравнением, хотя тоже трансцендентным, но значительно более простым, нежели уравнение (23).

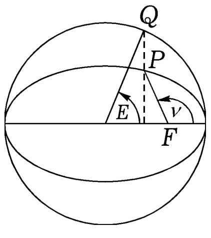

Рис. 124

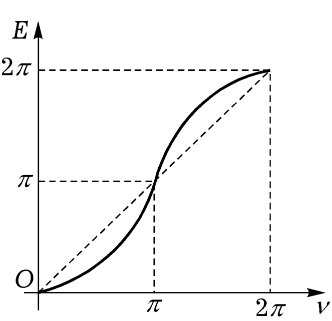

Рис. 125

Связь между E и ν зададим равенством

$$\operatorname{tg}\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{\nu}{2}. \tag{24}$$

Величина E называется *эксцентрической аномалией.* Можно показать, что она имеет следующий геометрический смысл. Через точку P проведем (рис. 124) перпендикуляр к большой полуоси орбиты до его пересечения в точке Q с окружностью, построенной на большой оси как на диаметре. Угол, который составляет отрезок, соединяющий центр эллипса и точку Q, с большой полуосью орбиты и будет эксцентрической аномалией E. Зависимость E от ν представлена на рис. 125. Из (24) следует, что

$$d\nu = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos E}dE, \qquad 1 + e\cos\nu = \frac{1-e^2}{1-e\cos E}.$$

Используя эти соотношения, получаем такое выражение для интеграла из левой части равенства (23):

$$\begin{aligned} \int\limits_0^\nu \frac{d\nu}{(1+e\cos\nu)^2} &= \frac{1}{(1-e^2)^{3/2}}\int\limits_0^E (1-e\cos E)\,dE = \\ &= \frac{1}{(1-e^2)^{3/2}}(E - e\sin E). \end{aligned} \tag{25}$$

Введем обозначение $n(t-\tau) = M$; величину M в астрономии называют *средней аномалией.* Тогда из (23) и (25) имеем следующее уравнение:

$$E - e\sin E = M. \tag{26}$$

Оно называется *уравнением Кеплера.*

123. Кеплеровские элементы орбиты. Решение задачи двух тел зависит от шести произвольных постоянных, определяемых начальными условиями движения. Их можно вводить по-разному и не обязательно именно так, как это было сделано в предыдущих пунктах в процессе решения задачи двух тел. Рассмотрим произвольные постоянные, которые носят название кеплеровских элементов орбиты и очень широко используются в небесной механике. За кеплеровские элементы принимаются следующие шесть величин, однозначно определяемых по начальным условиям: Ω, i, p, e, ω, τ.

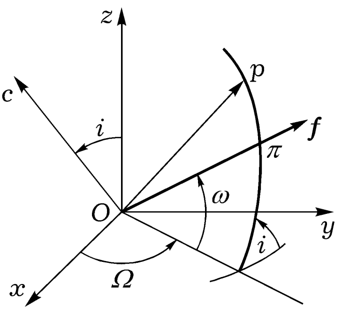

Рис. 126

Смысл величин p, e, τ ясен из предыдущих пунктов: p — параметр орбиты, e — ее эксцентриситет, τ — время прохождения через перицентр. Величина Ω — это угол, который составляет с осью Ox линия пересечения плоскости орбиты с плоскостью Oxy (рис. 126); величина Ω называется *долготой восходящего узла.* Элемент i представляет собой угол между плоскостью орбиты и плоскостью Oxy; величину i называют *наклонением орбиты.* Параметр ω определяет положение орбиты в ее плоскости, он называется *угловым расстоянием перицентра от узла* и равен углу между направлением из точки O на перицентр и линией пересечения плоскости орбиты с плоскостью Oxy.

124. О задаче трех и более тел. Задача n тел ($n \geqslant 2$) состоит в следующем. В пустоте находятся n материальных точек, взаимодействующих по закону всемирного тяготения Ньютона. Заданы начальные положения и скорости точек. Требуется найти положения всех точек как функции времени. Эта задача не решена до сих пор. Более того, показано, что даже в случае трех тел помимо классических интегралов, существование которых следует из общих теорем об изменении количества движения, кинетического момента и кинетической энергии, дифференциальные уравнения движения не имеют других интегралов, которые выражались бы через алгебраические или через однозначные трансцендентные функции координат и скоростей точек.

Для небесной механики и космодинамики наиболее важна так называемая *ограниченная задача трех* тел. Она состоит в изучении движения точки малой массы под действием притяжения двух конечных масс в предположении, что точка малой массы не влияет на движение точек конечных масс. Тем самым в ограниченной задаче трех тел точки конечных масс движутся по орбитам, определяемым задачей двух тел, так что движение этих двух точек известно. Таким образом, анализ ограниченной задачи трех тол сводится к исследованию движения только одной точки малой массы. Конечно, эта задача значительно проще *общей* (неограниченной) *задачи трех тел.* Но и она не интегрируется (точнее, не проинтегрирована) в квадратурах.