

§ 2. Движение твердого тела в центральном ньютоновском гравитационном поле

125. Главный вектор сил тяготения. Гравитационный момент. В обычных, «земных» задачах механики, связанных с ее применениями к устройствам, функционирующим вблизи или на поверхности Земли, силы притяжения, приложенные к двум материальным точкам равных масс, считаются равными и по величине, и по направлению. Это приводит к известному положению о совпадении центра масс и центра тяжести и, как следствие, к равенству нулю главного момента сил тяготения (гравитационного момента) относительно центра масс.

В действительности силы притяжения различных точек тела Землей, как правило, не будут параллельными, так как они направлены к ее центру¹. Кроме того, разные точки тела находятся, вообще, на разных расстояниях от центра Земли. По этим причинам силы тяготения не обязательно должны приводиться к равнодействующей, проходящей через центр масс тела: возможен еще и гравитационный момент относительно центра масс. Появление гравитационного момента можно пояснить очень простым примером. Пусть две точки P_1 и P_2 одинаковых масс соединены жестким стержнем пренебрежимо малой массы. Пусть O — середина стержня (центр масс точек P_1 и P_2), а O_* — притягивающий центр (рис. 127). Пусть $O_*P_1 > O_*P_2$, тогда если h_1 — плечо силы F_1 , а h_2 — плечо силы F_2 относительно точки O , то из сравнения площадей треугольников O_*P_1O и O_*P_2O получим

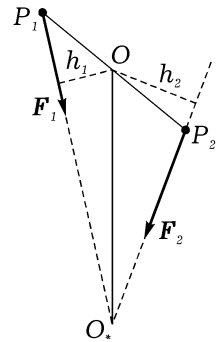


Рис. 127

Пусть $O_*P_1 > O_*P_2$, тогда если h_1 — плечо силы F_1 , а h_2 — плечо силы F_2 относительно точки O , то из сравнения площадей треугольников O_*P_1O и O_*P_2O получим

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{O_*P_1}{O_*P_2} > 1.$$

Отсюда и из неравенства $F_2 > F_1$, справедливого при $O_*P_1 > O_*P_2$, следует, что $F_2h_2 > F_1h_1$. Таким образом, появляется момент, стремящийся расположить стержень P_1P_2 вдоль прямой O_*O .

В обычных «земных» условиях гравитационные моменты малы по сравнению с другими воздействиями. В задачах же небесной механики

¹Мы предполагаем, что Земля представляет собой либо однородный, либо неоднородный шар, в каждой точке которого плотность зависит только от расстояния этой точки до центра шара. Можно показать, что в этом случае гравитационное поле Земли такое же, какое создавалось бы материальной точкой, обладающей массой Земли и помещенной в ее геометрическом центре.

они часто играют решающую роль. Например, движение Луны относительно центра масс почти полностью определяется гравитационными моментами, обусловленными притяжением Земли.

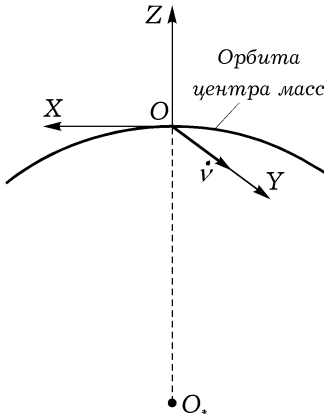


Рис. 128

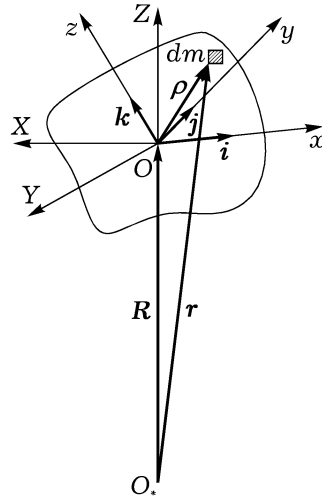


Рис. 129

Рассмотрим задачу о движении свободного твердого тела в центральном ньютоновском гравитационном поле. В соответствии с п. 108 для получения дифференциальных уравнений движения нужно знать главный вектор сил тяготения и их гравитационный момент относительно центра масс тела.

Пусть $OXYZ$ — система координат с началом в центре масс тела и осью OZ , направленной по прямой, соединяющей притягивающий центр O_* и центр масс O тела (рис. 128). Ось OY направлена по бинормали к траектории центра масс в ту сторону, откуда его движение видно совершающимся против часовой стрелки, ось OX дополняет оси OY и OZ до правой прямоугольной системы координат. Систему координат $OXYZ$ обычно называют *орбитальной*.

Пусть \mathbf{R} — радиус-вектор центра масс тела относительно притягивающего центра, а \mathbf{r} — радиус-вектор выделенного в теле малого элемента массой dm (рис. 129). Сила притяжения элемента dm определяется по формуле

$$d\mathbf{F} = -\gamma \frac{M dm}{r^3} \mathbf{r}, \quad (1)$$

где γ — универсальная гравитационная постоянная, а M — масса при-

тягивающего центра O_* . Главный вектор \mathbf{F} сил притяжения тела получается из (1) путем интегрирования по всему объему тела. Произведем вычисления, считая линейные размеры тела много меньшими расстояния от центра масс тела до притягивающего центра. Это предположение вполне приемлемо для естественных и искусственных спутников планет.

Пусть ρ — радиус-вектор элемента dm , а X, Y, Z — его компоненты в орбитальной системе координат. Тогда

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \rho, \quad r = R \sqrt{1 + 2 \frac{Z}{R} + \frac{\rho^2}{R^2}}. \quad (2)$$

Если пренебречь величинами порядка $(\rho/R)^2$ и выше, то из (2) получим разложение величины $1/r^3$ в ряд Тейлора в виде

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{R^3} \left(1 - \frac{3Z}{R} \right). \quad (3)$$

Теперь надо величину \mathbf{r} из (2) и величину $1/r^3$ из (3) подставить в формулу (1) и произвести интегрирование по всему объему тела. При этом следует учесть, что так как центр масс тела находится в начале координат, то

$$\int X dm = \int Y dm = \int Z dm = 0.$$

Произведя интегрирование, получим, что с упомянутой точностью главный вектор сил тяготения задается формулой

$$\mathbf{F} = -\gamma \frac{Mm}{R^3} \mathbf{R},$$

где m — масса тела. Отсюда следует, что если пренебречь величинами порядка $(\rho/R)^2$ и выше, то размеры тела не влияют на величину и направление главного вектора сил тяготения. Следовательно, в рассматриваемом приближении можно считать, что центр масс движется по коническому сечению. Это движение подробно изучено в предыдущем параграфе.

Найдем теперь гравитационный момент. Пусть $Oxyz$ — система координат, жестко связанная с твердым телом; ее оси направлены по главным центральным осям инерции тела (рис. 129). Ориентацию твердого тела относительно орбитальной системы координат будем определять при помощи углов Эйлера ψ, θ, φ . Элементы a_{ij} матрицы перехода от системы координат $Oxyz$ к системе $OXYZ$ выражаются через углы Эйлера по формулам (3) п. 19.

На основании формулы (1) для главного момента M_O сил тяготения относительно центра масс получаем выражение

$$\mathbf{M}_O = \int \boldsymbol{\rho} \times d\mathbf{F} = -\gamma M \int \frac{\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{r}}{r^3} dm, \quad (4)$$

где интегрирование производится по всему объему тела. Вычисление интеграла (4) проведем, используя систему координат $Oxyz$. В этой системе

$$\boldsymbol{\rho} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad \mathbf{R} = R(a_{31}\mathbf{i} + a_{32}\mathbf{j} + a_{33}\mathbf{k}), \quad (5)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \boldsymbol{\rho} = (x + Ra_{31})\mathbf{i} + (y + Ra_{32})\mathbf{j} + (z + Ra_{33})\mathbf{k}, \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{r} = R[(ya_{33} - za_{32})\mathbf{i} + (za_{31} - xa_{33})\mathbf{j} + (xa_{32} - ya_{31})\mathbf{k}]. \quad (7)$$

Если в разложении величины $1/r^3$ в ряд Тейлора пренебречь величинами порядка $(\rho/R)^2$ и выше, то получим

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{R^3} \left[1 - \frac{3}{R}(xa_{31} + ya_{32} + za_{33}) \right]. \quad (8)$$

С той же точностью из (7) и (8) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{R^2} \left[1 - \frac{3}{R}(xa_{31} + ya_{32} + za_{33}) \right] & [(ya_{33} - za_{32})\mathbf{i} + \\ & + (za_{31} - xa_{33})\mathbf{j} + (xa_{32} - ya_{31})\mathbf{k}]. \end{aligned} \quad (9)$$

Подставим это выражение в формулу (4) и произведем интегрирование. Так как оси Ox , Oy , Oz являются главными центральными осями инерции тела, то выполняются равенства

$$\begin{aligned} \int x dm = \int y dm = \int z dm = 0, \\ \int xy dm = \int xz dm = \int yz dm = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Произведя интегрирование и учтя равенства (10), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O = \frac{3\gamma M}{R^3} \int [(y^2 - z^2)a_{32}a_{33}\mathbf{i} + (z^2 - x^2)a_{33}a_{31}\mathbf{j} + \\ + (x^2 - y^2)a_{31}a_{32}\mathbf{k}] dm. \end{aligned} \quad (11)$$

Замечая, что

$$\int (y^2 - z^2) dm = C - B, \quad \int (z^2 - x^2) dm = A - C,$$

$$\int (x^2 - y^2) dm = B - A,$$

где A , B и C — моменты инерции тела относительно осей Ox , Oy и Oz соответственно, получаем из (11) такие выражения для проекций M_x , M_y , M_z гравитационного момента на оси Ox , Oy , Oz связанной с телом системы координат:

$$M_x = \frac{3\gamma M}{R^3}(C - B)a_{32}a_{33}, \quad M_y = \frac{3\gamma M}{R^3}(A - C)a_{33}a_{31},$$

$$M_z = \frac{3\gamma M}{R^3}(B - A)a_{31}a_{32}.$$
(12)

Отметим, что выражения (12) являются приближенными. В них отброшены величины, порядок которых не ниже $(\rho/R)^2$.

126. Уравнения движения тела относительно центра масс.

Для получения уравнений движения тела относительно центра масс используем динамические уравнения Эйлера

$$A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr = M_x, \quad B \frac{dq}{dt} + (A - C)rp = M_y,$$

$$C \frac{dr}{dt} + (B - A)pq = M_z.$$
(13)

Величины M_x , M_y , M_z вычисляются по формулам (12), в которых величина R имеет вид

$$R = \frac{p'}{1 + e \cos \nu},$$
(14)

где p' и e — параметр и эксцентриситет орбиты, ν — истинная аномалия, представляющая собой угол между радиусом-вектором \mathbf{R} центра масс тела и линией, проходящей через притягивающий центр O_* и перицентр орбиты. Согласно п. 122, величина ν удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{\sqrt{k}}{p'^{3/2}}(1 + e \cos \nu)^2.$$
(15)

Так как масса тела m много меньше массы притягивающего центра, то можно считать, что $k = \gamma M$.

Выразим проекции p , q , r абсолютной угловой скорости тела на оси Ox , Oy , Oz через углы Эйлера, их производные и угловую скорость (15) движения центра масс по орбите. Для этого заметим, что твердое тело участвует в сложном движении: оно вращается относительно орбитальной системы координат $OXYZ$, а орбитальная система координат за счет движения центра масс по орбите вращается вокруг оси OY . Проекции угловой скорости первого из указанных вращений получаются из кинематических уравнений Эйлера, а угловая скорость второго вращения направлена по оси OY и равна $\dot{\nu}$. Поэтому

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\nu} a_{21}, \\ q &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\nu} a_{22}, \\ r &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} + \dot{\nu} a_{23}, \end{aligned} \quad (16)$$

где величины a_{ij} определены равенствами (3) п. 19.

Система семи уравнений (13), (15) и (16) с учетом равенств (12), (14) и формул (3) п. 19 является замкнутой системой дифференциальных уравнений, описывающей движение твердого тела относительно центра масс. Эти уравнения или их модификации широко используются при изучении движения искусственных спутников Земли.

Если в (13) и (16), используя (15), ввести вместо времени t новую независимую переменную — истинную аномалию ν , то получим систему, состоящую из шести уравнений первого порядка. Если затем величины p , q , r из (16) подставить в (13), то придем к трем уравнениям второго порядка относительно углов Эйлера ψ , θ , φ .

Отметим еще, что если орбита центра масс эллиптическая и a — большая полуось орбиты, то согласно п. 120–122

$$\begin{aligned} \frac{d\nu}{dt} &= \frac{n}{(1-e^2)^{3/2}} (1 + e \cos \nu)^2, \\ \frac{\gamma M}{R^3} &= \frac{n^2}{(1-e^2)^3} (1 + e \cos \nu)^3, \end{aligned} \quad (17)$$

где постоянная n есть среднее движение центра масс, $n = \sqrt{\gamma M}/a^{3/2}$; на круговой орбите ($e = 0$) n будет угловой скоростью вращения радиуса-вектора R .

127. Относительное равновесие твердого тела на круговой орбите. Если центр масс тела движется по круговой орбите, то существуют движения, отвечающие положениям относительного равновесия. Относительным равновесием тела мы называем такое его движение, когда оно покоится в орбитальной системе координат, т. е. для таких

движений $\psi = \text{const}$, $\theta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$. Одно из таких движений определяется равенствами

$$\psi = 0, \quad \theta = 0, \quad \varphi = 0. \quad (18)$$

Для этого движения оси Ox , Oy и Oz связанной с телом системы координат направлены вдоль осей OX , OY и OZ орбитальной системы координат соответственно.

Чтобы убедиться в существовании решения (18), заметим, что из уравнений (16) и формул (3) п. 19 следует, что на круговой орбите при $\psi = \theta = \varphi = 0$ имеем $a_{ij} = \delta_{ij}$ (δ_{ij} — символ Кронекера), $p = 0$, $r = 0$, $q = n = \text{const}$. Отсюда следует, что для решения (18) гравитационные моменты (12) обращаются в нуль и уравнения (13) тождественно удовлетворяются.

Можно показать, что существуют двадцать четыре геометрически различных положения равновесия. Они соответствуют всевозможным случаям совпадения главных центральных осей инерции спутника с осями орбитальной системы координат. С механической точки зрения (в рамках исследования задач динамики тела в гравитационном поле) существенно лишь то, какая из главных центральных осей инерции тела лежит вдоль данного направления. Очевидно, что из двадцати четырех геометрически различных положений равновесия механически различных существует только шесть: для каждого из трех положений одной из осей инерции (по радиусу-вектору центра масс, по касательной и по нормали к орбите) существует два различных положения другой оси инерции (что автоматически влечет два различных положения третьей оси инерции).

Можно также показать, что если гравитационный момент определяется согласно приближенным выражениям (12), то не существует положений относительного равновесия, для которых главные центральные оси инерции тела не совпадали бы с осями орбитальной системы координат.

Для движений, соответствующих положениям относительного равновесия, вектор абсолютной угловой скорости тела направлен по нормали к плоскости орбиты, а величина абсолютной угловой скорости тела равна величине угловой скорости n кругового движения центра масс тела, т. е. период вращения тела равен периоду движения центра масс. Отсюда следует, что тело все время обращено к притягивающему центру одной и той же своей стороной. В природе примером такого движения является движение Луны (она «смотрит» на Землю одной стороной) и многих спутников планет, в технике — большое количество искусственных спутников Земли.

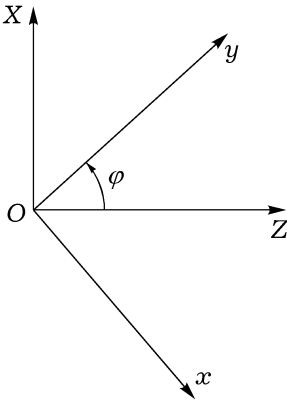


Рис. 130

128. Плоские движения. Дифференциальные уравнения движения твердого тела в центральном ньютоновском гравитационном поле допускают решения, которые отвечают плоским движениям тела. Для таких движений одна из главных центральных осей инерции тела все время перпендикулярна плоскости орбиты центра масс.

Получим дифференциальное уравнение плоских движений. Пусть для рассматриваемых движений главная ось инерции Oz тела перпендикулярна плоскости орбиты, т. е. во все время движения

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \psi = \pi. \quad (19)$$

Тогда формулы (3) п. 19 переходят в следующие:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\cos \varphi, & a_{12} &= \sin \varphi, & a_{13} &= 0, \\ a_{21} &= 0, & a_{22} &= 0, & a_{23} &= 1, \\ a_{31} &= \sin \varphi, & a_{32} &= \cos \varphi, & a_{33} &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Для движения (19) оси инерции тела Ox и Oy лежат в плоскости орбиты. Их расположение относительно осей OX и OZ орбитальной системы координат показано на рис. 130.

Из (12), (16) и (17) получаем, что при выполнении равенств (19) имеют место соотношения

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = \dot{\varphi} + \dot{\nu}, \quad (21)$$

$$M_x = 0, \quad M_y = 0,$$

$$M_z = \frac{3n^2}{(1-e^2)^3} (1 + e \cos \nu)^3 (B - A) \sin \varphi \cos \varphi. \quad (22)$$

Подставив (21) и (22) в систему (13), получим, что первые два ее уравнения удовлетворяются тождественно, а третье запишется в виде

$$C(\ddot{\varphi} + \ddot{\nu}) = 3 \frac{n^2}{(1-e^2)^3} (1 + e \cos \nu)^3 (B - A) \sin \varphi \cos \varphi. \quad (23)$$

Это уравнение вместе с первым из соотношений (17)

$$\dot{\nu} = \frac{n}{(1-e^2)^{3/2}} (1 + e \cos \nu)^2 \quad (24)$$

образует систему двух дифференциальных уравнений, описывающих плоские движения твердого тела. Удобнее, однако, вместо двух уравнений (23), (24) рассматривать одно дифференциальное уравнение, которое получается из уравнения (23), если в нем при помощи (24) ввести вместо времени t новую независимую переменную — истинную аномалию ν . Имеем соотношения

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \frac{d\varphi}{d\nu} \dot{\nu} = \frac{n}{(1-e^2)^{3/2}} \frac{d\varphi}{d\nu} (1+e\cos\nu)^2, \\ \ddot{\varphi} &= \frac{n}{(1-e^2)^{3/2}} \left[-\frac{d\varphi}{d\nu} \cdot 2e\sin\nu(1+e\cos\nu)\dot{\nu} + (1+e\cos\nu)^2 \frac{d^2\varphi}{d\nu^2} \dot{\nu} \right] = \\ &= \frac{n^2}{(1-e^2)^3} (1+e\cos\nu)^3 \left[(1+e\cos\nu) \frac{d^2\varphi}{d\nu^2} - 2e\sin\nu \frac{d\varphi}{d\nu} \right], \\ \ddot{\nu} &= \frac{d\dot{\nu}}{d\nu} \cdot \dot{\nu} = -\frac{2n^2 e \sin\nu}{(1-e^2)^3} (1+e\cos\nu)^3.\end{aligned}$$

Подставив $\ddot{\varphi}$ и $\ddot{\nu}$ в уравнение (23), получим

$$\begin{aligned}C \frac{n^2}{(1-e^2)^3} (1+e\cos\nu)^3 \left[(1+e\cos\nu) \frac{d^2\varphi}{d\nu^2} - 2e\sin\nu \frac{d\varphi}{d\nu} - 2e\sin\nu \right] = \\ = 3 \frac{n^2}{(1-e^2)^3} (1+\cos\nu)^3 (B-A) \sin\varphi \cos\varphi.\end{aligned}$$

Отсюда следует дифференциальное уравнение плоских движений твердого тела в центральном ньютоновском силовом поле¹

$$(1+e\cos\nu) \frac{d^2\varphi}{d\nu^2} - 2e\sin\nu \frac{d\varphi}{d\nu} + 3 \frac{A-B}{C} \sin\varphi \cos\varphi = 2e\sin\nu. \quad (25)$$

Пусть орбита центра масс тела является круговой. Если ввести обозначение $2\varphi = \alpha$, то при $e = 0$ из (25) получим уравнение, описывающее плоские движения тела на круговой орбите в виде

$$\frac{d^2\alpha}{d\nu^2} + 3 \frac{A-B}{C} \sin\alpha = 0 \quad (\nu = nt). \quad (26)$$

Если $A > B$, то уравнение (26) будет уравнением движения физического маятника. Его движение подробно исследовано в п. 93–96. Если же $A < B$, то мы снова можем получить уравнение маятника, если вместо замены переменной $2\varphi = \alpha$ сделаем замену $2\varphi = \alpha + \pi$. Если $A = B$, то $\ddot{\varphi} = 0$, т. е. тело равномерно вращается вокруг нормали к плоскости орбиты с произвольной угловой скоростью.

¹Это уравнение впервые получено в статье: Белецкий В. В. О либрации спутника. В сб.: Искусственные спутники Земли, 1959, вып. 3, М.: Изд-во АН СССР, с. 13–31.