Глава IX
Динамика системы переменного состава

§ 1. Основные понятия и теоремы

129. Понятие о системе переменного состава. До сих пор мы считали неизменными как массы m_ν точек P_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, N$), составляющих систему, так и число N точек системы. Но в природе и технике часто бывает так, что в некоторые моменты времени какие-либо точки выходят из рассматриваемой материальной системы или входят в нее. В результате этого состав системы, т. е. совокупность точек, образующих данную систему, а значит, вообще говоря, и ее масса будут со временем изменяться.

Будем говорить, что данная механическая система является *системой переменного состава*, если либо масса системы, либо материальные точки, из которых она состоит, либо то и другое меняются со временем.

Случаи движения системы переменного состава можно встретить во многих явлениях природы. Так, например, масса Земли возрастает вследствие падения на нее метеоритов. Масса падающего метеорита уменьшается, так как частицы метеорита отрываются от него, благодаря воздействию атмосферы, или сгорают. У плавающей льдины, вследствие ее таяния, масса убывает и возрастает при замерзании льда или из-за падения снежинок на ее поверхность. Примерами систем переменного состава в технике могут служить: движущийся транспортер, на который в некоторые моменты кладут (или с которого снимают) грузы; ракеты различных систем, масса которых изменяется в процессе сгорания топлива; реактивный самолет, масса которого увеличивается за счет воздуха, засасываемого в его двигатель, и уменьшается при отбрасывании продуктов сгорающего топлива.

Почти все выводы, полученные в предыдущих главах, о движении механических систем опирались на второй закон Ньютона, устанавливающий зависимость между ускорением точки и действующей на нее силой. Однако второй закон Ньютона справедлив только для точки постоянного состава. Динамика систем переменного состава требует особого рассмотрения.

Примем следующее предположение о математической модели системы переменного состава: малы и массы отделяющихся или присоединяющихся к системе точек, и промежутки времени между двумя их последовательными присоединениями или отделениями. Это предположение дает возможность принять идеализацию, при которой масса $M_1(t)$ вышедших из системы точек и масса $M_2(t)$ вошедших в систему точек — непрерывные и дифференцируемые функции времени.

Если масса $M(t)$ системы при $t = 0$ равнялась M_0, то с течением времени она меняется по закону

$$M(t) = M_0 - M_1(t) + M_2(t),$$

где M_1, M_2 — неубывающие неотрицательные функции времени и $M(t)$ непрерывна и дифференцируема.

Материальной точкой переменного состава мы будем называть частицу переменного состава, настолько малую, что ее положение и движение можно определить как для объекта, не имеющего размеров.

130. Теорема об изменении количества движения. Пусть некоторая совокупность материальных точек движется относительно инерциальной системы координат $Oxyz$. Рассмотрим замкнутую поверхность S, которая перемещается относительно $Oxyz$ и деформируется. Материальные точки при своем движении могут входить в область пространства, ограниченную поверхностью S, и могут выходить из нее.

Обозначим G систему переменного состава, образованную материальными точками, находящимися внутри поверхности S. Количество движения рассматриваемой системы обозначим $\boldsymbol{Q}$.

Зафиксируем момент времени $t = t'$ и обозначим G^* систему постоянного состава, образованную теми и только теми материальными точками, которые в момент t' заполняли объем, ограниченный поверхностью S. Количество движения системы G^* обозначим $\boldsymbol{Q}^*$. Так как при $t = t'$ системы G и G^* совпадают, то в этот момент

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^*. \tag{1}$$

В момент времени $t'' = t' + \Delta t$ количества движения систем G и G^* будут иметь соответственно значения $\boldsymbol{Q} + \Delta \boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{Q}^* + \Delta \boldsymbol{Q}^*$. На рис. 131 сплошной линией показано положение поверхности S в момент t'', а штриховой — положение поверхности, ограничивающей объем, заполненный в тот же момент t'' теми материальными точками, которые образуют систему G^*. Очевидно, что

$$\boldsymbol{Q} + \Delta \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^* + \Delta \boldsymbol{Q}^* - \Delta \boldsymbol{Q}_1 + \Delta \boldsymbol{Q}_2, \tag{2}$$

где $\Delta \boldsymbol{Q}_1$ — сумма количеств движения в момент t'' тех материальных точек, которые за время Δt вышли из объема, ограниченного поверхностью S, а $\Delta \boldsymbol{Q}_2$ — сумма количеств движения в момент t'' точек, вошедших за время Δt в объем, ограниченный этой поверхностью. На рис. 131 эти точки заполняют соответственно объемы G_1 и G_2.

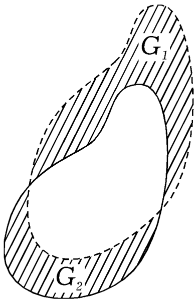

Рис. 131

Из (1) и (2) получаем

$$\Delta \boldsymbol{Q} = \Delta \boldsymbol{Q}^* - \Delta \boldsymbol{Q}_1 + \Delta \boldsymbol{Q}_2. \tag{3}$$

Пусть $\boldsymbol{R}^{(e)}$ — главный вектор внешних сил, приложенных к системе G (а следовательно, и к системе G^*) в момент времени t'. Поскольку система G^* является системой постоянного состава, то к ней применима теорема об изменении количества движения, т. е.

$$\frac{d\boldsymbol{Q}^*}{dt} = \boldsymbol{R}^{(e)}. \tag{4}$$

Разделив обе части равенства (3) на Δt и перейдя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим с учетом равенства (4)

$$\frac{dQ}{dt} = \boldsymbol{R}^{(e)} + \boldsymbol{F}, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$, а

$$\boldsymbol{F}_1 = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{Q}_1}{\Delta t}, \qquad \boldsymbol{F}_2 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{Q}_2}{\Delta t}. \tag{6}$$

Векторные величины $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ имеют размерность силы. Условимся называть эти величины *реактивными силами*. Реактивная сила $\boldsymbol{F}_1$ возникает за счет отделения материальных точек от рассматриваемой системы, а $\boldsymbol{F}_2$ — за счет присоединения точек.

Таким образом, теорема об изменении количества движения системы переменного состава выглядит так же, как и в случае систем постоянного состава; надо только в число внешних сил системы включить еще добавочную (реактивную) силу $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$.

131. Теорема об изменении кинетического момента. Пусть A — неподвижная точка в инерциальной системе координат $Oxyz$, $\boldsymbol{M}_A^{(e)}$ — главный момент внешних сил и $\boldsymbol{K}_A$ — кинетический момент системы G относительно точки A. Совершенно аналогично п. 130 можно показать, что

$$\frac{d\boldsymbol{K}_A}{dt} = \boldsymbol{M}_A^{(e)} + \boldsymbol{M}_A^{(F)}, \tag{7}$$

где $\boldsymbol{M}_A^{(F)} = \boldsymbol{M}_{A1}^{(F)} + \boldsymbol{M}_{A2}^{(F)}$ — дополнительный момент, возникающий за счет того, что система G является системой переменного состава:

$$\boldsymbol{M}_{A1}^{(F)} = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{K}_{A1}}{\Delta t}, \qquad \boldsymbol{M}_{A2}^{(F)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{K}_{A2}}{\Delta t}. \tag{8}$$

Здесь $\Delta \boldsymbol{K}_{A1}$ — сумма моментов количеств движения при $t = t''$ тех материальных точек, которые за время Δt вышли из объема, ограниченного поверхностью S, а $\Delta \boldsymbol{K}_{A2}$ — аналогичная величина для точек, вошедших внутрь поверхности S.

§ 2. Движение материальной точки переменного состава

132. Дифференциальное уравнение движения. Пусть материальная точка P переменного состава движется относительно инерциальной системы отсчета $Oxyz$. Масса точки P изменяется со временем вследствие одновременного отделения и присоединения к ней малых частиц материи, размерами которых можно пренебречь.

Пусть $\boldsymbol{u}_1$ — абсолютная скорость (скорость относительно $Oxyz$) частицы, которая отделяется от точки P в момент времени t', а $\boldsymbol{u}_2$ — абсолютная скорость частицы, которая присоединяется к P в этот момент. Пусть ΔM_1 и ΔM_2 — соответственно массы отделяющейся и присоединяющейся частиц. Тогда, применяя обозначения предыдущего пункта, имеем следующие равенства, справедливые с точностью до членов первого порядка малости включительно относительно Δt и ΔM_i $(i = 1,\ 2)$:

$$\Delta \boldsymbol{Q}_1 = \Delta M_1 \boldsymbol{u}_1, \qquad \Delta \boldsymbol{Q}_2 = \Delta M_2 \boldsymbol{u}_2,$$

и, следовательно, согласно формулам (6) п. 130,

$$\boldsymbol{F}_1 = -\frac{dM_1}{dt} \boldsymbol{u}_1, \qquad \boldsymbol{F}_2 = \frac{dM_2}{dt} \boldsymbol{u}_2. \tag{1}$$

Здесь, как и в п. 129, $M_1(t)$ и $M_2(t)$ представляют собой суммарную массу всех частиц, отделившихся от точки P и, соответственно, присоединившихся к ней за время t, прошедшее от момента $t = 0$, когда масса точки P была равна M_0.

Пусть $\boldsymbol{v}$ — абсолютная скорость точки P. Тогда ее количество движения вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{Q} = M \boldsymbol{v}. \tag{2}$$