где $\boldsymbol{M}_A^{(F)} = \boldsymbol{M}_{A1}^{(F)} + \boldsymbol{M}_{A2}^{(F)}$ — дополнительный момент, возникающий за счет того, что система G является системой переменного состава:

$$\boldsymbol{M}_{A1}^{(F)} = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{K}_{A1}}{\Delta t}, \qquad \boldsymbol{M}_{A2}^{(F)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{K}_{A2}}{\Delta t}. \tag{8}$$

Здесь $\Delta \boldsymbol{K}_{A1}$ — сумма моментов количеств движения при $t = t''$ тех материальных точек, которые за время Δt вышли из объема, ограниченного поверхностью S, а $\Delta \boldsymbol{K}_{A2}$ — аналогичная величина для точек, вошедших внутрь поверхности S.

§ 2. Движение материальной точки переменного состава

132. Дифференциальное уравнение движения. Пусть материальная точка P переменного состава движется относительно инерциальной системы отсчета $Oxyz$. Масса точки P изменяется со временем вследствие одновременного отделения и присоединения к ней малых частиц материи, размерами которых можно пренебречь.

Пусть $\boldsymbol{u}_1$ — абсолютная скорость (скорость относительно $Oxyz$) частицы, которая отделяется от точки P в момент времени t', а $\boldsymbol{u}_2$ — абсолютная скорость частицы, которая присоединяется к P в этот момент. Пусть ΔM_1 и ΔM_2 — соответственно массы отделяющейся и присоединяющейся частиц. Тогда, применяя обозначения предыдущего пункта, имеем следующие равенства, справедливые с точностью до членов первого порядка малости включительно относительно Δt и ΔM_i $(i = 1,\ 2)$:

$$\Delta \boldsymbol{Q}_1 = \Delta M_1 \boldsymbol{u}_1, \qquad \Delta \boldsymbol{Q}_2 = \Delta M_2 \boldsymbol{u}_2,$$

и, следовательно, согласно формулам (6) п. 130,

$$\boldsymbol{F}_1 = -\frac{dM_1}{dt} \boldsymbol{u}_1, \qquad \boldsymbol{F}_2 = \frac{dM_2}{dt} \boldsymbol{u}_2. \tag{1}$$

Здесь, как и в п. 129, $M_1(t)$ и $M_2(t)$ представляют собой суммарную массу всех частиц, отделившихся от точки P и, соответственно, присоединившихся к ней за время t, прошедшее от момента $t = 0$, когда масса точки P была равна M_0.

Пусть $\boldsymbol{v}$ — абсолютная скорость точки P. Тогда ее количество движения вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{Q} = M \boldsymbol{v}. \tag{2}$$

Подставив (1) и (2) в уравнение (5) п. 130, получим

$$\frac{dM}{dt}\boldsymbol{v} + M\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{R} - \frac{dM_1}{dt}\boldsymbol{u}_1 + \frac{dM_2}{dt}\boldsymbol{u}_2,$$

где $\boldsymbol{R}$ — равнодействующая сил, приложенных к точке P. Используя соотношение $M = M_0 - M_1 + M_2$, это равенство можно переписать в виде

$$-\frac{dM_1}{dt}\boldsymbol{v} + \frac{dM_2}{dt}\boldsymbol{v} + M\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{R} - \frac{dM_1}{dt}\boldsymbol{u}_1 + \frac{dM_2}{dt}\boldsymbol{u}_2.$$

Перенеся первые два слагаемых левой части в правую часть равенства, окончательно получим

$$M\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{R} - \frac{dM_1}{dt}(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{v}) + \frac{dM_2}{dt}(\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{v}). \qquad (3)$$

Уравнение (3) является дифференциальным уравнением движения точки переменного состава и называется *обобщенным уравнением Мещерского.*

Отметим, что $\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_{1r}$ — скорость отделяющихся частиц относительно точки P. Аналогично $\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_{2r}$ — скорость присоединяющихся частиц относительно точки P.

Пусть имеет место только отделение частиц. Тогда $M_2 \equiv 0$, $M(t) = M_0 - M_1(t)$ и $dM/dt = -dM_1/dt$. В этом случае уравнение (3) принимает вид

$$M\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{R} + \frac{dM}{dt}\boldsymbol{u}_{1r}. \qquad (4)$$

Уравнение (4) называется *уравнением Мещерского.* Из него видно, что эффект отделения частиц эквивалентен действию на точку P добавочной силы $\boldsymbol{F}_1 = \dfrac{dM}{dt}\boldsymbol{u}_{1r}$ (называемой *реактивной силой*). Аналогично можно рассмотреть и эффект присоединения частиц к точке P. Реактивная сила численно равна произведению величины dM/dt (называемой *секундным расходом массы*) на относительную скорость отделения (или присоединения) частиц к точке переменного состава P. В случае отделения частиц реактивная сила направлена противоположно вектору $\boldsymbol{u}_{1r}$ относительной скорости отделяющихся частиц, а в случае присоединения частиц реактивная сила и относительная скорость $\boldsymbol{u}_{2r}$ имеют одинаковые направления.

Пусть имеет место только отделение частиц от точки P переменного состава. Если абсолютная скорость $\boldsymbol{u}_1$ отделяющихся частиц равна нулю, то уравнение Мещерского (4) примет вид

$$M\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{R} - \frac{dM}{dt}\boldsymbol{v},$$

или

$$\frac{d(M\boldsymbol{v})}{dt} = \boldsymbol{R},$$

т. е. если абсолютная скорость отделяющихся частиц равна нулю, то производная по времени от количества движения точки P переменного состава равна равнодействующей приложенных к ней сил. Если же относительная скорость $\boldsymbol{u}_{1r}$ отделяющихся частиц равна нулю, то из (4) получаем

$$M\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{R},$$

т. е. если относительная скорость отделяющихся частиц равна нулю, то уравнение движения точки P переменного состава записывается формально в том же виде, что и уравнения движения точки постоянного состава.

133. Движение ракеты вне поля сил. Пусть точка P переменного состава движется в безвоздушном пространстве вне поля сил. Движение точки моделирует, например, движение ракеты в космическом пространстве, если ракету принять за точку и пренебречь силами сопротивления космической среды, гравитационным притяжением, силами светового давления и т. п. Тогда $\boldsymbol{R} = 0$ и из равенства (4) получаем векторное уравнение движения ракеты

$$M\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{dM}{dt}\boldsymbol{u}_r, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{u}_r$ — относительная скорость отделения продуктов сгорания топлива. Будем считать, что скорость $\boldsymbol{u}_r$ постоянна и имеет направление, противоположное скорости $\boldsymbol{v}$ ракеты. Тогда ракета будет двигаться по прямой линии, имеющей направление вектора $\boldsymbol{v}$. Примем эту прямую за ось Ox (рис. 132). Проектируя обе части равенства (5) на ось Ox, получаем

$$M\frac{dv}{dt} = -\frac{dM}{dt}u_r, \tag{6}$$

где u_r — величина относительной скорости $\boldsymbol{u}_r$. Полагая, что при $t = 0$ масса ракеты равна M_0, а ее скорость равна v_0, и интегрируя (6), получаем

$$v(t) = v_0 + u_r \ln\frac{M_0}{M(t)}. \tag{7}$$

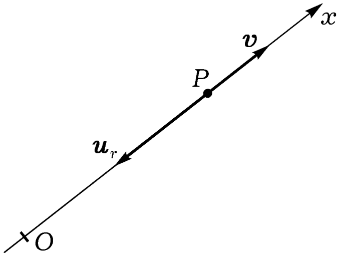

Рис. 132

Отсюда видно, что скорость ракеты в данный момент времени зависит от отношения начальной массы к текущему ее значению. Пусть $M_{\text{Т}}$ — начальная масса топлива, а $M_{\text{К}}$ — конечная масса ракеты после того, как израсходовано все топливо (т. е. масса корпуса ракеты, полезных грузов и оборудования). Тогда $M_0 = M_{\text{К}} + M_{\text{Т}}$, и для скорости ракеты, которую она приобретет в конце процесса сгорания топлива, получаем из (7) следующее выражение, называемое *формулой Циолковского*:

$$v_{\text{К}} = v_0 + u_r \ln\left(1 + \frac{M_{\text{Т}}}{M_{\text{К}}}\right). \tag{8}$$

Иэ этой формулы следует, что предельная скорость ракеты $v_{\text{К}}$ зависит только от относительного запаса топлива и относительной скорости истечения продуктов его сгорания. От закона изменения массы ракеты (режима работы двигателя) предельная скорость ракеты не зависит; если задано отношение $M_{\text{Т}}/M_{\text{К}} = Z$ (называемое *числом Циолковского*), то предельная скорость будет вполне определенной независимо от того, быстро или медленно происходило сгорание топлива.

Путь, пройденный ракетой на активном участке траектории, зависит от закона сгорания топлива. Полагая, что $x = 0$ при $t = 0$, из (7) получаем

$$x = v_0 t + u_r \int\limits_0^t \ln \frac{M_0}{M(t)}\, dt. \tag{9}$$

134. Вертикальное движение ракеты в однородном поле тяжести. Пусть ракета движется вертикально вверх в однородном поле тяжести при отсутствии сопротивления среды. Ракету принимаем за материальную точку. Начальная скорость ракеты равна нулю, начальная масса M_0. Относительная скорость $\boldsymbol{u}_r$ отделения продуктов сгорания топлива постоянна и направлена вертикально вниз. Требуется найти скорость ракеты и высоту ее подъема как функции времени, считая, что закон изменения массы ракеты со временем задан.

На ракету действует внешняя сила — сила тяжести, направленная вертикально вниз. Примем прямую, по которой движется ракета, за ось Oz (рис. 133). Проектируя обе части уравнения (4) на ось Oz, получаем

$$M\frac{dv}{dt} = -Mg - \frac{dM}{dt}u_r.$$

Интегрируя это уравнение, находим зависимость скорости ракеты от времени

$$v = u_r \ln \frac{M_0}{M(t)} - gt. \tag{10}$$

Если положить, что при $t = 0$ $z = 0$, то, проинтегрировав (10), найдем, что зависимость высоты подъема ракеты от времени задается формулой

$$z = u_r \int\limits_0^t \ln \frac{M_0}{M(t)}\, dt - \frac{gt^2}{2}. \tag{11}$$

Пусть масса ракеты изменяется по экспоненциальному закону:

$$M = M_0 e^{-\alpha t}, \tag{12}$$

где α — постоянный положительный коэффициент, характеризующий быстроту сгорания топлива. Масса M_1 отброшенных продуктов сгорания возрастает по закону

$$M_1 = M_0(1 - e^{-\alpha t}).$$

Для величины F_1 реактивной силы, согласно первой из формул (1) п. 132, получаем выражение

$$F_1 = \alpha M_0 e^{-\alpha t} u_r = \alpha u_r M,$$

т. е. величина αu_r есть ускорение, сообщаемое ракете за счет реактивной силы.

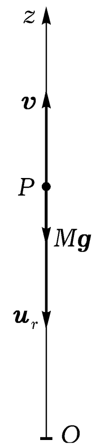

Рис. 133

Для закона изменения массы (12) из (10) и (11) получаем

$$v = (\alpha u_r - g)t, \qquad z = \frac{1}{2}(\alpha u_r - g)t^2. \tag{13}$$

Отсюда, в частности, следует, что вертикальный подъем ракеты возможен только при $\alpha u_r > g$. Это означает, что ускорение ракеты за счет реактивной силы должно быть больше ускорения свободного падения.

Пусть запас топлива M_T задан. Из (12) найдем время t_K сгорания топлива. Так как в конце процесса сгорания $M = M_K$, то из (12) получаем

$$M_K = M_0 e^{-\alpha t_K}.$$

Учитывая, что $M_0 = M_K + M_T$ и вводя обозначение $\beta = \ln(1 + M_T/M_K)$, получаем отсюда

$$t_K = \frac{\beta}{\alpha}. \tag{14}$$

Из (13) следует, что скорость v_K ракеты в конце процесса сгорания топлива и длина z_K активного участка траектории ракеты определяются формулами

$$v_K = \beta\left(u_r - \frac{g}{\alpha}\right), \qquad z_K = \frac{\alpha u_r - g}{2\alpha^2}\beta^2. \tag{15}$$

После сгорания топлива, т. е. при $t > t_K$, масса ракеты остается постоянной, и, имея при $t = t_K$ скорость v_K, она пройдет до наибольшей высоты подъема расстояние

$$s = \frac{v_K^2}{2g} = \frac{\beta^2}{2g}\left(u_r - \frac{g}{\alpha}\right)^2. \tag{16}$$

Для полной высоты подъема $h = z_K + s$ из (15) и (16) получаем выражение

$$h = \frac{\beta^2 u_r}{2}\left(\frac{u_r}{g} - \frac{1}{\alpha}\right). \tag{17}$$

Отсюда следует, что при возрастании α растет и наибольшая высота подъема ракеты. Наибольшая высота $h_{\max}$ соответствует случаю $\alpha = \infty$, т. е. случаю мгновенного сгорания топлива. При этом

$$h_{\max} = \frac{\beta^2 u_r^2}{2g}. \tag{18}$$

Найдем, при каком значении α длина z_K активного участка будет наибольшей. Из (15) имеем

$$\frac{\partial z_K}{\partial \alpha} = \beta^2\frac{2g - \alpha u_r}{2\alpha^3}, \qquad \frac{\partial^2 z_K}{\partial \alpha^2} = \beta^2\frac{\alpha u_r - 3g}{\alpha^4}. \tag{19}$$

Отсюда следует, что при $\alpha = 2g/u_r$, т. е когда ускорение, сообщаемое ракете реактивной силой, вдвое больше ускорения свободного падения, величина z_K будет максимальной. Из (15) находим, что

$$z_{K\max} = \frac{\beta^2 u_r^2}{8g}.$$

При этом для высоты h подъема ракеты, согласно (17), получаем

$$h = \frac{\beta^2 u_r^2}{4g},$$

т. е. при наибольшей длине активного участка траектории ракеты полная высота ее подъема вдвое меньше наибольшей возможной высоты, задаваемой равенством (18).

§ 3. Уравнения движения тела переменного состава

135. Движение вокруг неподвижной точки. *Твердым телом переменного состава будем* называть такую механическую систему, которая образована материальными точками P_ν ($\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ N$), расстояние между которыми остается постоянным, причем хотя бы одна из точек P_ν является материальной точкой переменного состава.

Если $m_\nu(t)$ — масса точки P_ν, то

$$m_\nu(t) = m_\nu(0) - m_{\nu 1}(t) + m_{\nu 2}(t) \qquad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ N), \tag{1}$$

где $m_{\nu 1}(t)$ ($m_{\nu 2}(t)$) — суммарная масса частиц, потерянных точкой P_ν за время t (соответственно присоединившихся к точке P_ν). Неотрицательные неубывающие функции $m_{\nu 1}(t)$, $m_{\nu 2}(t)$ считаем непрерывными и дифференцируемыми.

Пусть твердое тело переменного состава имеет одну неподвижную точку O. Для получения дифференциальных уравнений движения тела воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента системы переменного состава. Пусть система координат $Oxyz$ жестко связана с телом, а $\boldsymbol{K}_O$ — кинетический момент тела относительно точки O. Если $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела, то из равенства (7) п. 131 получаем

$$\frac{\tilde{d}\boldsymbol{K}_O}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{K}_O = \boldsymbol{M}_O^{(e)} + \boldsymbol{M}_O^{(F)}, \tag{2}$$

где $\tilde{d}/dt$ означает локальную (в системе $Oxyz$) производную, $\boldsymbol{M}_O^{(e)}$ — главный момент внешних сил относительно точки O, $\boldsymbol{M}_O^{(F)}$ — дополнительный момент, возникающий за счет того, что тело имеет переменный состав.

Найдем вектор $\boldsymbol{M}_O^{(F)}$. Пусть $\Delta m_{\nu 1}$ — масса частиц, отделившихся от точки P_ν, $\Delta m_{\nu 2}$ — масса частиц, присоединившихся к точке P_ν за время Δt. Если $\boldsymbol{u}_{\nu 1}$ и $\boldsymbol{u}_{\nu 2}$ — абсолютные скорости отделяющихся