При этом для высоты h подъема ракеты, согласно (17), получаем

$$h = \frac{\beta^2 u_r^2}{4g},$$

т. е. при наибольшей длине активного участка траектории ракеты полная высота ее подъема вдвое меньше наибольшей возможной высоты, задаваемой равенством (18).

§ 3. Уравнения движения тела переменного состава

135. Движение вокруг неподвижной точки. *Твердым телом переменного состава будем* называть такую механическую систему, которая образована материальными точками P_ν ($\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ N$), расстояние между которыми остается постоянным, причем хотя бы одна из точек P_ν является материальной точкой переменного состава.

Если $m_\nu(t)$ — масса точки P_ν, то

$$m_\nu(t) = m_\nu(0) - m_{\nu 1}(t) + m_{\nu 2}(t) \qquad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ N), \tag{1}$$

где $m_{\nu 1}(t)$ ($m_{\nu 2}(t)$) — суммарная масса частиц, потерянных точкой P_ν за время t (соответственно присоединившихся к точке P_ν). Неотрицательные неубывающие функции $m_{\nu 1}(t)$, $m_{\nu 2}(t)$ считаем непрерывными и дифференцируемыми.

Пусть твердое тело переменного состава имеет одну неподвижную точку O. Для получения дифференциальных уравнений движения тела воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента системы переменного состава. Пусть система координат $Oxyz$ жестко связана с телом, а $\boldsymbol{K}_O$ — кинетический момент тела относительно точки O. Если $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела, то из равенства (7) п. 131 получаем

$$\frac{\tilde{d}\boldsymbol{K}_O}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{K}_O = \boldsymbol{M}_O^{(e)} + \boldsymbol{M}_O^{(F)}, \tag{2}$$

где $\tilde{d}/dt$ означает локальную (в системе $Oxyz$) производную, $\boldsymbol{M}_O^{(e)}$ — главный момент внешних сил относительно точки O, $\boldsymbol{M}_O^{(F)}$ — дополнительный момент, возникающий за счет того, что тело имеет переменный состав.

Найдем вектор $\boldsymbol{M}_O^{(F)}$. Пусть $\Delta m_{\nu 1}$ — масса частиц, отделившихся от точки P_ν, $\Delta m_{\nu 2}$ — масса частиц, присоединившихся к точке P_ν за время Δt. Если $\boldsymbol{u}_{\nu 1}$ и $\boldsymbol{u}_{\nu 2}$ — абсолютные скорости отделяющихся и присоединяющихся частиц в момент времени t, то с точностью до членов первого порядка малости относительно $\Delta m_{\nu 1}$, $\Delta m_{\nu 2}$, Δt имеем

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{K}_{O1} &= \sum_{\nu=1}^{N} \Delta m_{\nu 1} \boldsymbol{\rho}_\nu \times \boldsymbol{u}_{\nu 1}, \\ \Delta \boldsymbol{K}_{O2} &= \sum_{\nu=1}^{N} \Delta m_{\nu 2} \boldsymbol{\rho}_\nu \times \boldsymbol{u}_{\nu 2}, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\boldsymbol{\rho}_\nu$ — радиус-вектор материальной точки P_ν относительно неподвижной точки O тела. Из (3) и формул (8) п. 131 получаем

$$\boldsymbol{M}_O^{(F)} = -\sum_{\nu=1}^{N} \frac{dm_{\nu 1}}{dt} \boldsymbol{\rho}_\nu \times \boldsymbol{u}_{\nu 1} + \sum_{\nu=1}^{N} \frac{dm_{\nu 2}}{dt} \boldsymbol{\rho}_\nu \times \boldsymbol{u}_{\nu 2}. \tag{4}$$

Пусть $\boldsymbol{v}_\nu$ — скорость точки тела P_ν, а $\boldsymbol{u}_{\nu 1}^{(r)}$ и $\boldsymbol{u}_{\nu 2}^{(r)}$ — соответственно скорости присоединяющейся и отделяющейся частиц относительно точки P_ν. Тогда $\boldsymbol{u}_{\nu i} = \boldsymbol{v}_\nu + \boldsymbol{u}_{\nu i}^{(r)}$ $(i = 1, 2)$, что позволяет записать равенство (4) в таком виде:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_O^{(F)} = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_\nu \times \left(-\frac{dm_{\nu 1}}{dt} \boldsymbol{u}_{\nu 1}^{(r)} + \frac{dm_{\nu 2}}{dt} \boldsymbol{u}_{\nu 2}^{(r)} \right) + \\ + \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_\nu \times \left(-\frac{dm_{\nu 1}}{dt} + \frac{dm_{\nu 2}}{dt} \right) \boldsymbol{v}_\nu. \end{aligned} \tag{5}$$

При помощи соотношения (1) это равенство приводится к виду

$$\boldsymbol{M}_O^{(F)} = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_\nu \times \left(-\frac{dm_{\nu 1}}{dt} \boldsymbol{u}_{\nu 1}^{(r)} + \frac{dm_{\nu 2}}{dt} \boldsymbol{u}_{\nu 2}^{(r)} \right) + \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_\nu \times \frac{dm_\nu}{dt} \boldsymbol{v}_\nu. \tag{6}$$

Согласно уравнению (3) п. 132, первая сумма в (6) представляет собой главный момент $\boldsymbol{M}_O^{(r)}$ реактивных сил относительно точки O. Замечая, что $\boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_\nu$ и проводя преобразования, совершенно аналогичные преобразованиям, проведенным в п. 82, получим, что вторая сумма в (6) равна $\frac{d\mathbf{J}}{dt}\boldsymbol{\omega}$, где $\mathbf{J}$ — матрица тензора инерции тела для точки O (которая является функцией времени). Таким образом, дополнительный момент $\boldsymbol{M}_O^{(F)}$, появляющийся за счет того, что рассматриваемое тело является системой переменного состава, может быть представлен в форме

$$\boldsymbol{M}_O^{(F)} = \boldsymbol{M}_O^{(r)} + \frac{d\mathbf{J}}{dt}\boldsymbol{\omega}. \tag{7}$$

Согласно формуле (9) п. 82, кинетический момент тела $\boldsymbol{K}_O$ может быть записан в виде $\boldsymbol{K}_O = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$. Отсюда и из равенств (2), (7) получаем

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{J}\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{M}_O^{(e)} + \boldsymbol{M}_O^{(r)} + \frac{d\mathbf{J}}{dt}\boldsymbol{\omega},$$

или

$$\mathbf{J}\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{M}_O^{(e)} + \boldsymbol{M}_O^{(r)}. \tag{8}$$

Если J_x, J_y, J_z и J_{xy}, J_{xz}, J_{yz} — осевые и центробежные моменты инерции, а p, q, r — проекции угловой скорости тела на оси Ox, Oy, Oz, то векторное уравнение (8) запишется в виде трех скалярных уравнений (3) п. 97, в правых частях которых появятся дополнительные слагаемые $M_x^{(r)}$, $M_y^{(r)}$, $M_z^{(r)}$, являющиеся проекциями момента реактивных сил на оси Ox, Oy, Oz. В общем случае, когда момент внешних сил зависит от ориентации тела в пространстве, при исследовании движения тела вокруг неподвижной точки к этим уравнениям надо добавить еще три кинематических уравнения Эйлера.

Если в процессе отбрасывания и присоединения частиц оси Ox, Oy, Oz остаются главными осями инерции, то скалярная форма уравнения (8) примет форму динамических уравнений Эйлера:

$$\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr &= M_x + M_x^{(r)}, \\ B\frac{dq}{dt} + (A - C)rp &= M_y + M_y^{(r)}, \\ C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq &= M_z + M_z^{(r)}, \end{aligned} \tag{9}$$

где A, B, C — моменты инерции тела (зависящие от времени) относительно осей Ox, Oy, Oz, а M_x, M_y, M_z — проекции главного момента внешних сил на эти оси.

136. Вращение вокруг неподвижной оси. Пусть Oz — неподвижная ось, вокруг которой вращается тело переменного состава. Тогда $p \equiv 0$, $q \equiv 0$, $r = \omega_z(t)$. Для получения уравнения движения тела спроектируем обе части векторного уравнения (8) на ось Oz. Получим

$$J_z\frac{d\omega_z}{dt} = M_z + M_z^{(r)}. \tag{10}$$

Это и будет дифференциальным уравнением вращения твердого тела вокруг неподвижной оси Oz. От соответствующего уравнения для тела постоянного состава оно отличается наличием в правой части дополнительного слагаемого $M_z^{(r)}$, являющегося проекцией момента реактивных сил на ось Oz, и тем, что момент инерции J_z тела относительно этой оси является переменной величиной.

Пример 1. *Тело, имеющее форму кольца радиусом r, вращается под действием постоянного момента M вокруг неподвижной вертикальной оси, совпадающей с осью симметрии. Когда тело приобрело угловую скорость ω_0, потребовалось затормозить его. Для таких целей на внешнем ободе кольца на противоположных концах диаметра установлены два реактивных двигателя. Относительная скорость истечения газов в двигателях направлена по касательной к ободу кольца и равна u; секундный расход топлива равен q, начальный момент инерции тела с топливом равен J_0. Требуется найти расход топлива, необходимый для полного торможения тела.*

Согласно (10)*, дифференциальное уравнение, описывающее вращение тела, будет таким:*

$$(J_0 - qr^2 t)\frac{d\omega}{dt} = M - qur. \tag{11}$$

Торможение вращения тела возможно, если величина реактивного момента достаточно велика ($qur > M$). Решив уравнение (11)*, получим зависимость угловой скорости тела от времени:*

$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{qur - M}{qr^2} \ln\left(1 - \frac{qr^2}{J_0} t\right).$$

Из уравнения $\omega(\tau) = 0$ найдем время τ торможения вращения тела, а затем по формуле $m = q\tau$ вычислим необходимый расход топлива. В результате получим

$$m = \frac{J_0}{r^2}\left(1 - e^{-\frac{qr^2\omega_0}{qur - M}}\right).$$