Глава X
Дифференциальные уравнения аналитической динамики

§ 1. Уравнения Лагранжа (второго рода)

137. Общее уравнение динамики в обобщенных координатах. Рассмотрим систему N материальных точек P_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, N$). Если система несвободна, то наложенные на нее связи предполагаются удерживающими и идеальными. Пусть $\delta\boldsymbol{r}_\nu$ — виртуальное перемещение точки P_ν, m_ν — ее масса, $\boldsymbol{w}_\nu$ — ускорение в инерциальной системе координат, а $\boldsymbol{F}_\nu$ — равнодействующая всех активных сил, приложенных к точке P_ν. Тогда имеет место общее уравнение динамики (п. 57)

$$\sum_{\nu=1}^{N}(\boldsymbol{F}_\nu - m_\nu\boldsymbol{w}_\nu)\cdot\delta\boldsymbol{r}_\nu = 0. \tag{1}$$

В том случае, когда все или некоторые из связей не идеальны, к величинам $\boldsymbol{F}_\nu$ следует добавить часть $\boldsymbol{G}_\nu$ равнодействующей реакций связей, действующих на точку P_ν, которая не удовлетворяет условию идеальности. После этого изучаемую систему можно формально рассматривать как систему с идеальными связями.

Общее уравнение динамики (1) мы принимаем за исходное при получении основных дифференциальных уравнений аналитической динамики, которым посвящена данная глава. Фактически все изучаемые ниже уравнения движения материальных систем являются только различными формами записи уравнения (1), к которым оно приводится при тех или иных предположениях о характере активных сил, действующих на систему, и о наложенных на нее связях.

Пусть на систему наложено r геометрических и s кинематических неинтегрируемых связей. Пусть $q_1, q_2, \ldots, q_m$ — обобщенные координаты системы. Их число m равно $3N - r$. Тогда радиусы-векторы $\mathbf{r}_\nu$ точек P_ν относительно начала инерциальной системы координат записываются в виде функций аргументов $q_1, q_2, \ldots, q_m, t$

$$\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_m, t), \tag{2}$$

которые предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми. Если система склерономна, то обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_m$ можно выбрать так, чтобы функции $\boldsymbol{r}_\nu$ не зависели от t. Из (2) получаем (см. п. 16)

$$\boldsymbol{v}_\nu = \dot{\boldsymbol{r}}_\nu = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N), \tag{3}$$

$$\delta\boldsymbol{r}_\nu = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j}\delta q_j \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N). \tag{4}$$

Запишем общее уравнение динамики (1) в обобщенных координатах. Для элементарной работы активных сил имеем выражение

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \cdot \delta\boldsymbol{r}_\nu = \sum_{\nu=1}^{m} Q_j \delta q_j, \tag{5}$$

где Q_j — обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q_j. Она в общем случае является функцией q_l, $\dot{q}_l$ и t $(l = 1, 2, \ldots, m)$.

Преобразуем выражение для элементарной работы сил инерции на виртуальном перемещении системы. Пользуясь формулой (4) и меняя порядок суммирования, получаем предварительно

$$\begin{aligned} -\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{w}_\nu \cdot \delta\boldsymbol{r}_\nu &= -\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{d\dot{\boldsymbol{r}}_\nu}{dt} \cdot \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j}\delta q_j = \\ &= -\sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{d\dot{\boldsymbol{r}}_\nu}{dt} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j} \right) \delta q_j. \end{aligned} \tag{6}$$

Но

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{d\dot{\boldsymbol{r}}_\nu}{dt} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j} \right) - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j}$$
$$(j = 1, 2, \ldots, m).$$

Последнее равенство при помощи формул (25) п. 16 можно записать в виде

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{d\dot{\boldsymbol{r}}_\nu}{dt} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_\nu}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_\nu}{\partial q_j} \tag{7}$$
$$(j = 1, 2, \ldots, m).$$

Если использовать выражение для кинетической энергии системы

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu^2,$$

то равенство (7) можно переписать в виде

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{d\dot{\boldsymbol{r}}_\nu}{dt}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{8}$$

Подставив (8) в формулу (6), получим выражение для элементарной работы сил инерции в виде

$$-\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{w}_\nu \cdot \delta\boldsymbol{r}_\nu = -\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}\right)\delta q_j. \tag{9}$$

Подставим теперь выражения (5) и (9) в соотношение (1) и умножим обе части получившегося равенства на -1. В результате получим *общее уравнение динамики в обобщенных координатах*:

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j\right)\delta q_j = 0. \tag{10}$$

138. Уравнения Лагранжа. Пусть система голономна. Тогда величины δq_j $(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ независимы и число обобщенных координат равно числу степеней свободы системы $(m = n)$. В силу независимости величин δq_j уравнение (10) удовлетворяется тогда и только тогда, когда равны нулю коэффициенты при всех δq_j. Поэтому уравнение (10) эквивалентно следующей системе n уравнений:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{11}$$

Уравнения (11) называются *уравнениями Лагранжа второго рода*[1]. Они образуют систему n уравнений второго порядка относительно n функций $q_i(t)$. Порядок этой системы равен $2n$. Заметим, что это наименьший возможный порядок дифференциальных уравнений движения рассматриваемой системы, так как начальные значения величин q_i, $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ могут быть произвольными.

[1]Уравнения (11) для краткости мы часто будем называть просто уравнениями Лагранжа.

Для получения уравнений Лагранжа надо выразить кинетическую энергию T системы через обобщенные координаты и скорости, найти обобщенные силы и произвести указанные в (11) дифференцирования функции $T\ (q_j,\ \dot{q}_j,\ t)$ по обобщенным координатам, обобщенным скоростям и времени. Заметим, что форма уравнений Лагранжа не зависит от выбора обобщенных координат $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n$. При другом их выборе изменились бы только функции T и Q_i, а сама форма уравнений (11) осталась бы той же. В связи с этим говорят, что уравнения Лагранжа второго рода обладают свойством *ковариантности.*

В уравнениях Лагранжа не содержатся реакции идеальных связей. Если же нужно найти реакции связей, то надо после интегрирования уравнений Лагранжа подставить функции $q_i(t)$ в выражения (2), и тогда равнодействующая $\boldsymbol{R}_\nu$ реакций связей, приложенных к точке P_ν, найдётся из соотношений

$$\boldsymbol{R}_\nu = m_\nu \ddot{\boldsymbol{r}}_\nu - \boldsymbol{F}_\nu(\boldsymbol{r}_\nu,\ \dot{\boldsymbol{r}}_\nu,\ t).$$

Пример 1 (Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси u). *Здесь $n = 1$. За обобщенную координату примем угол φ поворота тела вокруг оси u. Обобщенная сила Q_φ равняется главному моменту $M_u^{(e)}$ внешних сил относительно оси u (см. пример 2 п. 54). Кинетическая энергия тела равна*

$$T = \frac{1}{2} J_u \dot{\varphi}^2,$$

где J_u — момент инерции тела относительно оси u. Имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = J_u \dot{\varphi}, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = J_u \ddot{\varphi}, \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0.$$

Уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi$$

имеет вид

$$J_u \ddot{\varphi} = M_u^{(e)}.$$

Пример 2 (Уравнения движения сферического маятника). *Сферический маятник представляет собой материальную точку, которая движется в однородном поле тяжести, оставаясь на сфере постоянного радиуса. Будем считать, что точка имеет массу m и закреплена на одном из концов невесомого стрежня длиной l; другой конец стержня при помощи шарнира прикреплен к неподвижной точке O так, что стержень может иметь произвольное направление в пространстве* (рис. 134). *Трением пренебрегаем.*

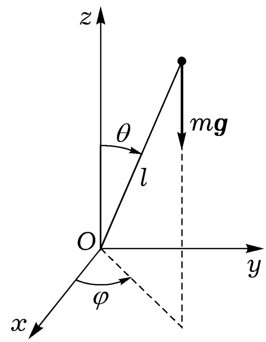

Рис. 134

Сферический маятник имеет две степени свободы. За обобщенные координаты примем сферические координаты φ, θ точки m. Так как расстояние точки m до начала координат постоянно и равно l, то, согласно формуле (30) *п.* 9, *для кинетической энергии имеем выражение*

$$T = \frac{1}{2}ml^2(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\dot\varphi^2). \tag{12}$$

Для нахождения обобщенной силы Q_φ дадим точке виртуальное перемещение по параллели. Тогда $\delta A_\varphi = 0$ и, следовательно, $Q_\varphi = 0$. Чтобы найти обобщенную силу Q_θ, дадим точке виртуальное перемещение по меридиану. Тогда $\delta A_\theta = mg\sin\theta\cdot l\delta\theta = Q_\theta\delta\theta$. Отсюда $Q_\theta = mgl\sin\theta$.

Для координат θ и φ (после деления обеих частей уравнений Лагранжа на постоянные множители) получаем такие уравнения:

$$\ddot\theta - \sin\theta\cos\theta\dot\varphi^2 - \frac{g}{l}\sin\theta = 0, \qquad \frac{d}{dt}(\sin^2\theta\dot\varphi) = 0. \tag{13}$$

139. Анализ выражения для кинетической энергии. Рассмотрим структуру выражения для кинетической энергии системы, записанной через обобщенные координаты и скорости. Используя формулу (3), кинетическую энергию можно представить в виде

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\boldsymbol r}_\nu^2 = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \boldsymbol r_\nu}{\partial q_j}\dot q_j + \frac{\partial \boldsymbol r_\nu}{\partial t}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{m} a_{jk}\dot q_j\dot q_k + \sum_{j=1}^{m} a_j\dot q_j + a_0, \end{aligned} \tag{14}$$

где введены обозначения

$$a_{jk} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{\partial \boldsymbol r_\nu}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial \boldsymbol r_\nu}{\partial q_k},\ a_j = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{\partial \boldsymbol r_\nu}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial \boldsymbol r_\nu}{\partial t},\ a_0 = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\left(\frac{\partial \boldsymbol r_\nu}{\partial t}\right)^2. \tag{15}$$

Величины a_{jk}, a_j, a_0 — функции от $q_1, q_2, \ldots, q_m, t$.

Формула (14) показывает, что кинетическая энергия является многочленом второй степени относительно обобщенных скоростей и представима в виде

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \tag{16}$$

где

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{m} a_{jk}\dot q_j \dot q_k, \qquad T_1 = \sum_{j=1}^{m} a_j \dot q_j, \qquad T_0 = a_0.$$

В случае склерономной системы $\partial \boldsymbol{r}_\nu/\partial t = 0$ $(\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ N)$ и из (15) следует, что $a_j = 0,\ a_0 = 0 \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$. Поэтому

$$T = T_2 = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{m} a_{jk}\dot q_j \dot q_k, \tag{17}$$

т. е. кинетическая энергия склерономной системы является квадратичной формой обобщенных скоростей, причем коэффициенты a_{jk} в (17) не зависят явно от времени.

Покажем, что квадратичная форма T_2 является невырожденной. Это означает, что определитель, составленный из ее коэффициентов, отличен от нуля при любых $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_m,\ t$:

$$\det \left\| a_{jk} \right\|_{j,k=1}^{m} \neq 0. \tag{18}$$

В самом деле, из того, что квадратичная форма T_2 может быть записана в виде

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j}\dot q_j \right)^2, \tag{19}$$

сразу следует, что она неотрицательна: $T_2 \geqslant 0$.

Докажем теперь, что она может обратиться в нуль только тогда, когда все $\dot q_j$ $(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ равны нулю. Допустим, что это не так, т. е. что T_2 может равняться нулю при некоторых значениях обобщенных скоростей $\dot q_1^*,\ \dot q_2^*,\ \ldots,\ \dot q_m^*$, среди которых есть отличные от нуля. Тогда каждое выражение, заключенное в скобки в формуле (19), должно обратиться в нуль, т. е.

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_j}\dot q_j^* = 0 \qquad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ N).$$

В скалярной форме эти векторные равенства запишутся в виде

$$\sum_{j=1}^{m} \dot q_j^* \frac{\partial x_\nu}{\partial q_j} = 0, \qquad \sum_{j=1}^{m} \dot q_j^* \frac{\partial y_\nu}{\partial q_j} = 0, \qquad \sum_{j=1}^{m} \dot q_j^* \frac{\partial z_\nu}{\partial q_j} = 0, \tag{20}$$
$$(\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ N).$$

Равенства (20) показывают, что столбцы матрицы (22) п. 14 линейно зависимы, т. е. ранг этой матрицы меньше m. Согласно п. 14, это невозможно, если величины $q_1, q_2, \ldots, q_m$ являются обобщенными координатами.

Таким образом, квадратичная форма T_2 определенно-положительна. Из критерия Сильвестра тогда следует, что определитель, составленный из ее коэффициентов, положителен. Следовательно, справедливо неравенство (18).

Замечание 1. *Если при данном выборе обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots, q_m$ для некоторых положений системы неравенство* (18) *не выполняется, то это означает, что при исследовании движения системы вблизи этих положений величины $q_1, q_2, \ldots, q_m$ в качестве обобщенных координат малопригодны. В окрестности таких положений системы целесообразно вводить другие обобщенные координаты.*

Комментарий 1. *В качестве примера рассмотрим движение твердого тела вокруг неподвижной точки O. Пусть A, B, C — главные моменты инерции, а p, q, r — проекции угловой скорости тела на его главные оси инерции для точки O. Кинетическая энергия тела вычисляется по формуле*

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2). \tag{21}$$

В качестве обобщенных координат примем углы Эйлера ψ, θ, φ, вводимые обычным образом (п. 19). *Найдем величину T при значении угла θ, равном* 0 *или π. Использовав кинематические уравнения Эйлера* (п. 36), *получим из* (21)

$$T = \frac{1}{2}\Big[(A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi)\dot\theta^2 + C(\dot\varphi \pm \dot\psi)^2\Big], \tag{22}$$

где знаки плюс и минус отвечают значениям θ, равным 0 *и π соответственно. Определитель квадратичной формы* (22) *равен нулю. Следовательно, при значениях θ, близких* 0 *или π, вводимые обычным образом углы Эйлера неудобны для описания движения тела. Этот факт уже отмечался в п.* 19.

140. Разрешимость уравнений Лагранжа относительно обобщеных ускорений. Используя структуру (16) выражения кинетической энергии, уравнения Лагранжа (11) можно представить в виде

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\ddot q_k = g_i \qquad (i = 1,\ 2.\ \ldots,\ n), \tag{23}$$

где функции g_i не зависят от обобщенных ускорений. Из предыдущего пункта следует, что определитель линейной относительно $\ddot{q}_i$ системы уравнений (23) отличен от нуля, поэтому она разрешима и имеет единственное решение

$$\ddot{q}_i = G_i(q_k,\ \dot{q}_k,\ t). \tag{24}$$

Как известно из теории дифференциальных уравнений, при некоторых ограничениях на G_i (например, при существовании непрерывных частных производных у функций G_i, которое в механике всегда предполагается) система уравнений (24) имеет единственное решение при произвольных начальных данных: $q_i = q_i^0$, $\dot{q}_i = \dot{q}_i^0$, при $t = t_0$ $(i = 1,\ 3,\ \ldots,\ n)$. Таким образом, уравнения Лагранжа удовлетворяют условию детерминированности движения (см. п. 45).

141. Уравнения Лагранжа в случае потенциальных сил. Функция Лагранжа. Пусть обобщенные силы Q_i вычисляются по формулам

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где потенциал (потенциальная энергия) П есть функция $q_1, q_2, \ldots, q_n, t$.

Уравнения Лагранжа (11) в случае потенциальных сил имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Положим $L = T - \Pi$, тогда эти уравнения примут вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{25}$$

Функция L называется *функцией Лагранжа* (*лагранжианом, кинетическим потенциалом*).

Используя выражение (16), функцию Лагранжа можно представить в виде многочлена второй степени относительно обобщенных скоростей

$$L = L_1 + L_2 + L_0, \tag{26}$$

где

$$L_2 = T_2, \quad L_1 = T_1, \quad L_0 = T_0 - \Pi. \tag{27}$$

Замечание 2. *Для получения дифференциальных уравнений движения (25) голономной системы в потенциальном поле сил надо знать только одну функцию — функцию Лагранжа L. Уравнения Лагранжа не* *изменятся, если к функции L добавить полную производную по времени от произвольной дважды непрерывно дифференцируемой функции f от обобщенных координат и времени:*

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

В самом деле, из последнего равенства имеем следующие два соотношения:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\frac{df}{dt}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial t},$$

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{df}{dt}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial q_k \partial q_i}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_i}.$$

Правые части этих равенств одинаковы, так как f дважды непрерывно дифференцируема, и поэтому возможно изменение порядка ее дифференцирования по $(q_i,\ q_k,\ t)$. Поэтому если в (25) вместо L подставить $L + \dfrac{df}{dt}$, то величины $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\dfrac{df}{dt}\right)$ и $\dfrac{\partial}{\partial q_i}\left(\dfrac{df}{dt}\right)$ взаимно уничтожатся, и уравнения Лагранжа останутся неизменными.

142. Теорема об изменении полной механической энергии голономной системы. Пусть помимо потенциальных сил к системе приложены также некоторые непотенциальные силы. Часть обобщенных сил, соответствующую непотенциальным силам, обозначим через Q_i^*. Тогда

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i^* \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

и уравнения Лагранжа (11) примут вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i^* \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{28}$$

Найдем производную по времени от кинетической энергии $T(q_k,\ \dot{q}_k,\ t)$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial q_i}\dot{q}_i\right) + \frac{\partial T}{\partial t} = \\ &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right)\dot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial t}. \end{aligned} \tag{29}$$

Далее воспользуемся выражением (16) и *теоремой Эйлера об однородных функциях.* Согласно этой теореме, для однородной функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ k-й степени справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = kf.$$

Применяя эту теорему к функции (16), получаем

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T_2 + T_1.$$

Используя еще уравнения (28), запишем равенство (29) в виде

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}(2T_2 + T_1) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \dot{q}_i - \sum_{i=1}^{n} Q_i^* \dot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial t},$$

или

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}(2T_2 + 2T_1 + 2T_0) - \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) + \\ + \frac{d\Pi}{dt} - \frac{\partial \Pi}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} Q_i^* \dot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Так как $2T_2 + 2T_1 + 2T_0 = 2T$, то отсюда вытекает следующее выражение для производной по времени от полной механической энергии системы $E = T + \Pi$:

$$\frac{dE}{dt} = N^* + \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) + \frac{\partial \Pi}{\partial t} - \frac{\partial T}{\partial t}, \tag{30}$$

где

$$N^* = \sum_{i=1}^{n} Q_i^* \dot{q}_i. \tag{31}$$

Величина N^* называется *мощностью непотенциальных сил.*

Формула (30) выражает *теорему об изменении полной механической энергии голономной системы.* Рассмотрим некоторые ее частные случаи.

1. Пусть система склерономна. Тогда $T_1 = 0$, $T_0 = 0$, $\partial T/\partial t = 0$ и

$$\frac{dE}{dt} = N^* + \frac{\partial \Pi}{\partial t}. \tag{32}$$

2. Пусть система склерономна и потенциал не зависит явно от времени. В этом случае $\partial \Pi / \partial t = 0$ и из (32) получаем

$$\frac{dE}{dt} = N^*. \tag{33}$$

3. Пусть система удовлетворяет следующим требованиям: а) она склерономна, б) все силы системы потенциальны, в) потенциал не зависит явно от времени. Система, удовлетворяющая этим трем условиям, называется *консервативной*. Для нее

$$\frac{dE}{dt} = 0, \tag{34}$$

т. е. полная механическая энергия консервативной системы не изменяется при движении системы; имеет место интеграл энергии

$$E = T + \Pi = h = \text{const}.$$

143. Гироскопические силы. Непотенциальные силы называются *гироскопическими*, если их мощность равна нулю.

Из равенства (33) следует, что для склерономной системы, у которой потенциал Π не зависит явно от времени, интеграл энергии существует и при наличии гироскопических сил.

Пусть непотенциальные силы линейны относительно обобщенных скоростей

$$Q_i^* = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik} \dot{q}_k \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Матрицу, составленную из коэффициентов γ_{ik}, считаем кососимметрической, т. е. $\gamma_{ik} = -\gamma_{ki}$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Тогда силы Q_i^* гироскопические, а кососимметричность матрицы коэффициентов γ_{ik} является необходимым и достаточным условием гироскопичности сил Q_i^*.

В самом деле, замечая, что у кососимметрической матрицы диагональные элементы γ_{ii} $(i = 1,\ 2, \ldots,\ n)$ всегда равны нулю, получаем

$$N^* = \sum_{i=1}^{n} Q_i^* \dot{q}_i = \sum_{i,k=1}^{n} \gamma_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k = 0.$$

Прежде чем переходить к рассмотрению примеров, обратим внимание на следующее. Имеет место равенство

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \cdot \boldsymbol{v}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t} \right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i + \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t}.$$

Замечая, что

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} = Q_i$$

и что в случае склерономной системы $\partial \boldsymbol{r}_\nu / \partial t = 0$, получаем отсюда

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \cdot \boldsymbol{v}_\nu = \sum_{i=1}^{n} Q_i \dot{q}_i.$$

Поэтому в случае склерономной системы равенство $N^* = 0$ выражает условие гироскопичности

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu^* \cdot \boldsymbol{v}_\nu = 0$$

непотенциальных сил $\boldsymbol{F}_\nu^*$, приложенных к точкам материальной системы.

Пример 1. *Покажем, что силы, приложенные к вращающемуся гироскопу и обеспечивающие его регулярную прецессию, являются гироскопическими (отсюда и происходит термин «гироскопические силы»). Пусть O — неподвижная точка гироскопа, $\boldsymbol{\omega}_1$ — его угловая скорость собственного вращения, а $\boldsymbol{\omega}_2$ — угловая скорость прецессии. Согласно п. 106, главный момент $\boldsymbol{M}_O$ сил, приложенных к гироскопу, вычисляется по формуле*

$$\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_1 \left[C + (C - A)\frac{\omega_2}{\omega_1}\cos\theta_0 \right],$$

где C и A — моменты инерции гироскопа (относительно оси симметрии и относительно перпендикулярной ей главной оси, проходящей через неподвижную точку O гироскопа), θ_0 — постоянное значение угла нутации.

Для элементарной работы сил, приложенных к гироскопу (являющемуся склерономной системой), имеем такое выражение:

$$\delta A = \boldsymbol{M}_O \cdot \boldsymbol{\omega}\, dt = \boldsymbol{M}_O \cdot \boldsymbol{\omega}_1\, dt + \boldsymbol{M}_O \cdot \boldsymbol{\omega}_2\, dt = 0.$$

Таким образом, силы, обеспечивающие регулярную прецессию гироскопа, имеют мощность, равную нулю, и, следовательно, являются гироскопическими.

Пример 2. *Кориолисовы силы инерции в склерономной системе являются гироскопическими. В самом деле, пусть m_ν — масса точки P_ν, $\boldsymbol{v}_\nu$ — ее скорость в неинерциальной системе координат, а $\boldsymbol{\omega}$ — угловая* *скорость вращения этой системы координат относительно некоторой инерциальной системы координат. Тогда кориолисова сила инерции $\boldsymbol{j}_{\nu c}$ для точки P_ν вычисляется по формуле*

$$\boldsymbol{j}_{\nu c} = -2m_\nu(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_\nu).$$

Для склерономной системы действительное перемещение $d\boldsymbol{r}_\nu$ является одним из виртуальных. Поэтому для элементарной работы кориолисовых сил инерции имеем выражение

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{j}_{\nu c} \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{j}_{\nu c} \cdot d\boldsymbol{r}_\nu = $$
$$= \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{j}_{\nu c} \cdot \boldsymbol{v}_\nu \, dt = -2\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_\nu) \cdot \boldsymbol{v}_\nu \, dt.$$

Следовательно, мощность кориолисовых сил инерции равна нулю и они являются гироскопическими.

144. Диссипативные силы. Функция Рэлея. Непотенциальные силы называются *диссипативными*, если их мощность отрицательна или равна нулю ($N^* \leqslant 0$, причем $N^* \not\equiv 0$).

Из равенства (33) следует, что для склерономной системы, у которой потенциал П не зависит явно от времени, при наличии диссипативных сил

$$\frac{dE}{dt} \leqslant 0,$$

т. е. полная механическая энергия системы убывает во время движения. Саму систему в этом случае называют *диссипативной*. Иногда говорят, что происходит рассеивание, или диссипация, энергии. Отсюда и возник термин «диссипативные силы».

Если мощность диссипативных сил N^* будет определенно-отрицательной функцией обобщенных скоростей $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ [1], то диссипация называется *полной*. Если же N^* — знакопостоянная отрицательная функция[2], то диссипация называется *неполной* или *частичной*.

Пусть задана положительная квадратичная форма

$$R = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k \qquad (b_{ik} = b_{ki}),$$

[1]Это означает, что при $|\dot{q}_i| < \varepsilon$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, где ε — достаточно малое положительное число, $N^* \leqslant 0$, причем N^* обращается в нуль только тогда, когда все обобщенные скорости равны нулю.

[2]То есть в окрестности $|\dot{q}_i| < \varepsilon$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ при сколь угодно малом ε справедливо неравенство $N^* \leqslant 0$ и N^* может обращаться в нуль не только тогда, когда все $\dot{q}_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

такая, что непотенциальные силы Q_i^* задаются соотношениями

$$Q_i^* = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = -\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_k \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{35}$$

Тогда для склерономной системы мощность N^* непотенциальных сил равна

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu^* \cdot \boldsymbol{v}_\nu = \sum_{i=1}^{n} Q_i^* \dot{q}_i = -2R \leqslant 0. \tag{36}$$

Функция R называется *диссипативной функцией Рэлея.* Из (33) и (36) следует, что в случае склерономной системы с потенциалом, не зависящим явно от времени,

$$\frac{dE}{dt} = -2R,$$

т. е. скорость убывания полной механической энергии системы равна удвоенной функции Рэлея.

В качестве примера рассмотрим склерономную систему, к каждой точке которой приложена сила сопротивления, пропорциональная скорости этой точки:

$$\boldsymbol{F}_\nu = -k\boldsymbol{v}_\nu \qquad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ N), \tag{37}$$

где $k > 0$. Мощность этих сил будет равна

$$N^* = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \cdot \boldsymbol{v}_\nu = -2R,$$

где

$$R = \frac{1}{2}k\sum_{\nu=1}^{N} v_\nu^2. \tag{38}$$

145. Обобщенный потенциал. Пусть существует функция V от обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени такая, что обобщенные силы Q_i определяются по формулам

$$Q_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{39}$$

Тогда функция V называется *обобщенным потенциалом.*

Если положить $L = T - V$, то уравнения Лагранжа (11) запишутся в той же форме (25), какую они имели в случае обычного потенциала сил.

Из (39) следует, что

$$Q_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + f_i,$$

где функции f_i не зависят от обобщенных ускорений. Но в теоретической механике обычно рассматриваются только такие силы, которые не зависят от ускорений. Поэтому обобщенный потенциал V должен быть линейной функцией от обобщенных скоростей:

$$V = V_1 + V_0, \qquad V_1 = \sum_{i=1}^{n} A_i \dot{q}_i, \tag{40}$$

где V_0, A_i $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ — функции обобщенных координат и времени.

Из (39) и (40) находим выражение для обобщенных сил:

$$\begin{aligned} Q_i &= \frac{dA_i}{dt} - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_{k=1}^{n} A_k \dot{q}_k + V_0\right) = \\ &= -\frac{\partial V_0}{\partial q_i} + \frac{\partial A_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial A_i}{\partial q_k} - \frac{\partial A_k}{\partial q_i}\right)\dot{q}_k. \end{aligned} \tag{41}$$

Если $\partial A_i/\partial t = 0$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, т. е. линейная часть V_1 обобщенного потенциала не зависит явно от времени, то обобщенные силы складываются из потенциальных сил $-\partial V_0/\partial q_i$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ и гироскопических сил

$$Q_i^* = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik} \dot{q}_k \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{42}$$

где

$$\gamma_{ik} = -\gamma_{ki} = \frac{\partial A_i}{\partial q_k} - \frac{\partial A_k}{\partial q_i} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{43}$$

Если к тому же система склерономна и часть V_0 обобщенного потенциала не зависит от времени, то, согласно п. 143, при движении системы величина $T + V_0$ остается постоянной (однако $T + V \neq \mathrm{const}$).

Отметим, что в случае существования обобщенного потенциала функция Лагранжа является многочленом второй степени относительно обобщенных скоростей и представима в виде $L = L_2 + L_1 + L_0$, где

$$L_2 = T_2, \quad L_1 = T_1 - V_1, \quad L_0 = T_0 - V_0. \tag{44}$$

Квадратичная часть функции L совпадает с квадратичной частью кинетической энергии, и уравнения Лагранжа, как и в случае существования обычного потенциала П, разрешимы относительно обобщенных ускорений.

Упражнение 1. *Показать, что сумма переносных и кориолисовых сил инерции всех точек системы всегда имеет обобщенный потенциал.*

146. О составлении уравнений Лагранжа для описания движения в неинерциальной системе отсчета. При получении уравнений движения системы относительно неинерциальной системы координат можно применять различные способы. Укажем два из них.

Первый способ не связан с теорией относительного движения. Здесь задача формулируется без введения сил инерции. Кинетическая энергия абсолютного движения системы выражается через относительные обобщенные координаты и относительные скорости точек системы. Обобщенные силы вычисляются обычным способом (для заданных активных сил). В этом способе силы инерции учитываются автоматически самой процедурой выписывания уравнений Лагранжа.

Второй способ основан на теории относительного движения. Задачу формулируют, вводя переносные и кориолисовы силы инерции. Кинетическую энергию здесь надо вычислять для относительного движения, а при подсчете обобщенных сил, помимо заданных активных сил, учитываются и силы инерции.

Если в первом и втором из указанных способов за обобщенные координаты приняты одни и те же величины, то мы придем к одним и тем же уравнениям движения. В конкретной задаче бывает ясно, какой из способов предпочтительнее. Конечно, возможны и другие способы получения уравнений Лагранжа, описывающих движение системы относительно неинерциальной системы координат.

147. Натуральные и ненатуральные системы. Системы, в которых силы имеют обычный $\Pi(q_i,\ t)$ или обобщенный $V(q_i,\ \dot{q}_i,\ t)$ потенциал, называются *натуральными.* В таких системах функции Лагранжа L вводится как разность $T - \Pi$ или $T - V$ и является многочленом второй степени относительно обобщенных скоростей, причем гессиан функции Лагранжа

$$\det\left\|\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q_i \partial \dot q_k}\right\|_{i,k=1}^{n} = \det\left\|\frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_i \partial \dot q_k}\right\|_{i,k=1}^{n} = \det\left\|a_{ik}\right\|_{i,k=1}^{n} \neq 0 \qquad (45)$$

и уравнения Лагранжа разрешимы относительно обобщенных ускорений.

В дальнейшем, если не будет оговорено особо, мы будем рассматривать более общие системы, в которых функция Лагранжа L не обязательно определяется как разность кинетической энергии и потенциала и в этом смысле является произвольной функцией $L(q_i,\ \dot q_i,\ t)$. Будем лишь требовать, чтобы гессиан этой функции относительно обобщенных скоростей не был равен нулю:

$$\det\left\|\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q_i \partial \dot q_k}\right\|_{i,k=1}^{n} \neq 0. \qquad (46)$$

Такие системы будем называть *ненатуральными.* Требование (46) аналогично неравенству (45) и нужно для обеспечения разрешимости уравнений Лагранжа относительно обобщенных ускорений.

§ 2. Канонические уравнения Гамильтона

148. Преобразование Лежандра. Функция Гамильтона. В уравнениях Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \dots,\ n), \qquad (1)$$

описывающих движение голономной системы в потенциальном поле сил, функция L зависит от переменных $q_i,\ \dot q_i,\ t\ \ (i = 1,\ 2,\ \dots,\ n)$. Эти переменные задают момент времени и кинематическое состояние системы, т. е. положения и скорости ее точек. Переменные q_i, $\dot q_i$, t $(i = 1, 2, \dots, n)$ называют *переменными* Лагранжа.

Но состояние системы можно задавать и при помощи других параметров. За такие параметры можно принять величины q_i, p_i, t $(i = 1, 2, \dots, n)$, где p_i — *обобщенные импульсы*, определяемые равенствами

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \qquad (i = 1,\ 2,\ \dots,\ n). \qquad (2)$$

Переменные q_i, p_i, t называют *переменными Гамильтона.*