гессиан функции Лагранжа

$$\det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \right\|_{i,k=1}^{n} = \det \left\| \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \right\|_{i,k=1}^{n} = \det \left\| a_{ik} \right\|_{i,k=1}^{n} \neq 0 \qquad (45)$$

и уравнения Лагранжа разрешимы относительно обобщенных ускорений.

В дальнейшем, если не будет оговорено особо, мы будем рассматривать более общие системы, в которых функция Лагранжа L не обязательно определяется как разность кинетической энергии и потенциала и в этом смысле является произвольной функцией $L(q_i,\ \dot{q}_i,\ t)$. Будем лишь требовать, чтобы гессиан этой функции относительно обобщенных скоростей не был равен нулю:

$$\det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \right\|_{i,k=1}^{n} \neq 0. \qquad (46)$$

Такие системы будем называть *ненатуральными.* Требование (46) аналогично неравенству (45) и нужно для обеспечения разрешимости уравнений Лагранжа относительно обобщенных ускорений.

§ 2. Канонические уравнения Гамильтона

148. Преобразование Лежандра. Функция Гамильтона. В уравнениях Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \qquad (1)$$

описывающих движение голономной системы в потенциальном поле сил, функция L зависит от переменных $q_i,\ \dot{q}_i,\ t\ \ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Эти переменные задают момент времени и кинематическое состояние системы, т. е. положения и скорости ее точек. Переменные q_i, $\dot{q}_i$, t $(i = 1, 2, \ldots, n)$ называют *переменными* Лагранжа.

Но состояние системы можно задавать и при помощи других параметров. За такие параметры можно принять величины q_i, p_i, t $(i = 1, 2, \ldots, n)$, где p_i — *обобщенные импульсы*, определяемые равенствами

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \qquad (2)$$

Переменные q_i, p_i, t называют *переменными Гамильтона.*

Гессиан функции L относительно переменных $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ отличен от нуля (см. неравенства (45), (46) п. 147). Замечая, что он равен якобиану правых частей равенств (2), на основании теоремы о неявной функции получаем, что эти равенства разрешимы относительно переменных $\dot{q}_i$:

$$\dot{q}_i = \varphi_i(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Следовательно, переменные Лагранжа могут быть выражены через переменные Гамильтона и наоборот.

Гамильтон предложил записывать уравнения движения в переменных q_i, p_i, t. В этих переменных уравнения Лагранжа (1) переходят в разрешенную относительно производных систему $2n$ уравнений первого порядка, имеющую замечательно симметричную форму записи. Эти уравнения называют *уравнениями Гамильтона* (или *каноническими уравнениями*). Переменные q_i и p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ называются *канонически сопряженными.*

Прежде чем получать уравнения Гамильтона, введем некоторые вспомогательные определения. Пусть дана функция $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, гессиан которой отличен от нуля:

$$\det \left\| \frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_k} \right\|_{i,k=1}^{n} \neq 0. \tag{4}$$

Перейдем от переменных x_1, x_2, $\ldots$, x_n к новым переменным $y_1, y_2, \ldots, y_n$ по формулам

$$y_i = \frac{\partial X}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Преобразованием Лежандра функции $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется функция новых переменных $Y(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, определяемая равенством

$$Y = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i - X, \tag{6}$$

в правой части которого переменные x_i выражены через новые переменные y_i при помощи уравнений (5)[1].

В курсах математического анализа показывается[2], что преобразование Лежандра имеет обратное, причем если X при преобразовании

[1]Эти уравнения в силу условия (4) разрешимы относительно x_i $(i=1, 2, \ldots, n)$.

[2]См., например, гл. 6 книги: Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. – М.: Наука, 1966.

Лежандра переходит в Y, то преобразование Лежандра от Y будет снова X.

Преобразование Лежандра функции $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ по переменным $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ есть функция

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - L(q_j, \dot{q}_j, t). \tag{7}$$

в которой величины $\dot{q}_i$ выражены через q_j, p_j, t при помощи уравнений (2); при этом при проведении преобразования величины q_i, t играют роль параметров. Функция H называется *функцией Гамильтона.*

149. Уравнения Гамильтона. Полный дифференциал функции Гамильтона вычисляется по формуле

$$dH = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \tag{8}$$

С другой стороны, полный дифференциал правой части равенства (7), вычисленный при условиях (2), будет таким:

$$dH = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \, dp_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \tag{9}$$

Так как при переходе к новым переменным значение полного дифференциала не меняется, то правые части равенств (8) и (9) равны. Отсюда следует, что

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{10}$$

а также

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{11}$$

Но согласно (1) и (2), $\dot{p}_i = \dfrac{\partial L}{\partial q_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Поэтому из (10) получаем уравнения движения

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{12}$$

Эти уравнения называются *уравнениями Гамильтона* (или *каноническими уравнениями*).

Отметим, что попутно мы получили равенство (11), означающее, что если функция Лагранжа не зависит явно от времени, то и функция Гамильтона также не зависит от времени, и наоборот. Аналогично, из равенств (10) следует, что если функция L не зависит от какой-либо из обобщенных координат, то и функция H от этой координаты не зависит, и наоборот.

Пример 1. *Получим гамильтонову форму уравнений движения математического маятника, рассмотренного в примере* 2 *п.* 57. *Для кинетической и потенциалной энергии имеем выражения* (см. рис. 55)

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2, \qquad \Pi = -mgl\ \cos\varphi.$$

Поэтому

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl\ \cos\varphi.$$

Из равенства

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi}$$

находим

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{ml^2}p_\varphi.$$

Используя формулу (7), *находим функцию Гамильтона*

$$H = p_\varphi\dot{\varphi} - L = \frac{1}{2ml^2}p_\varphi^2 - mgl\ \cos\varphi.$$

Канонические уравнения (12) *имеют вид*

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{1}{ml^2}p_\varphi, \qquad \frac{dp_\varphi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial\varphi} = -mgl\ \sin\varphi.$$

150. Физический смысл функции Гамильтона. Пусть система натуральна. Тогда $L = L_2 + L_1 + L_0$ и, согласно формулам (2) и (7),

$$H = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(L_2 + L_1 + L_0)}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i - (L_2 + L_1 + L_0),$$

но по теореме Эйлера об однородных функциях

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L_2}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i = 2L_2, \qquad \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L_1}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i = L_1,$$

поэтому

$$H = (2L_2 + L_1) - (L_2 + L_1 + L_0) = L_2 - L_0. \tag{13}$$

Пусть $T = T_2 + T_1 + T_0$. Если силы имеют обычный потенциал П, то $L_0 = T_0 - \Pi$ и, согласно (13),

$$H = T_2 - T_0 + \Pi. \tag{14}$$

Если же силы имеют обобщенный потенциал $V = V_1 + V_0$, то $L_0 = T_0 - V_0$ и

$$H = T_2 - T_0 + V_0. \tag{15}$$

Пусть система натуральна и склерономна; тогда $T_1 = 0$, $T_0 = 0$ и $T = T_2$. В том случае, когда силы имеют обычный потенциал,

$$H = T + \Pi, \tag{16}$$

т. е. для натуральной склерономной системы с обычным потенциалом сил функция Гамильтона H представляет собой полную механическую энергию. В этом и состоит физический смысл функции Гамильтона.

Отметим также, что в случае склерономной натуральной системы с обобщенным потенциалом сил

$$H = T + V_0. \tag{17}$$

151. Интеграл Якоби. Найдем полную производную функции Гамильтона по времени. Используя уравнения (12), получим тождество

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i\right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t},\end{aligned}$$

т. е. полная производная функции Гамильтона по времени тождественно равна ее частной производной:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{18}$$

Система называется *обобщенно консервативной*, если ее функция Гамильтона не зависит явно от времени. В этом случае $\partial H/\partial t \equiv 0$ и в силу тождества (18) $dH/dt \equiv 0$, т. е. при движении системы

$$H\ (q_i,\ p_i) = h, \tag{19}$$

где h — произвольная постоянная. Функцию H называют *обобщенной полной энергией*, а равенство (19) — *обобщенным интегралом энергии.*

В случае натуральной системы с обычным потенциалом сил функция Гамильтона вычисляется по формуле (14) и, если она не зависит от времени,

$$T_2 - T_0 + \Pi = h. \tag{20}$$

Соотношение (20), где h — произвольная постоянная, называют *интегралом Якоби.*

Если система консервативна, т. е. она склерономна и силы имеют потенциал, не зависящий от времени, то $T_0 = 0$, $T_1 = 0$, $T = T_2$ и интеграл Якоби запишется в виде

$$E = T + \Pi = h. \tag{21}$$

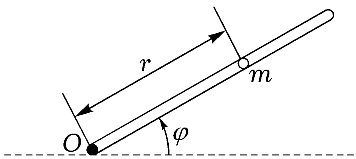

Рис. 135

Таким образом, консервативная система является частным случаем обобщенно консервативной и в рассматриваемом частном случае обобщенный интеграл энергии переходит в обычный.

Пример 1. *Гладкая трубка вращается в горизонтальной плоскости с заданной постоянной угловой скоростью ω. Внутри трубки движется шарик массой m.*

Будем считать, что шарик можно принять за материальную точку. Угол φ, который составляет ось трубки с некоторым неизменным направлением в горизонтальной плоскости, известен ($\varphi = \omega t$)*. Положение шарика будем задавать координатой r — расстоянием до оси вращения трубки* (рис. 135).

Потенциальная энергия шарика постоянна; примем, что $\Pi = 0$. *Для кинетической энергии шарика имеем выражение*

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \omega^2 r^2),$$

т. е.

$$T_2 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2, \qquad T_1 = 0, \qquad T_0 = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2.$$

Имеет место интеграл Якоби (20)*, который в рассматриваемом примере запишется в виде*

$$H = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = h = \text{const}.$$

Было бы ошибкой принять за интеграл полную механическую энергию $E = T + \Pi$, так как рассматриваемая система (шарик во вращающейся трубке) не является консервативной.

152. Уравнения Уиттекера и Якоби. Пусть движение системы описывается каноническими уравнениями (12). Если функция Гамильтона не зависит явно от времени, то существует обобщенный интеграл энергии

$$H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) = h, \tag{22}$$

где h — произвольная постоянная, определяемая начальными условиями, $h = H(q_1^0, \ldots, q_n^0, p_1^0, \ldots, p_n^0)$. В $2n$-мерном пространстве $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$ [1] уравнение (22) задает гиперповерхность. Будем рассматривать только такие движения, которые соответствуют этой гиперповерхности. Иначе говоря, рассмотрим движение системы на фиксированном изоэнергетическом уровне $H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) = h$.

Покажем, что движение изучаемой системы на изоэнергетическом уровне описывается системой дифференциальных уравнений, порядок которой равен $2n - 2$, причем эта система уравнений может быть записана в виде канонических уравнений. Предположим, что в некоторой области фазового пространства выполняется неравенство $\partial H/\partial p_1 \neq 0$. Тогда в этой области равенство (22) разрешимо относительно p_1:

$$p_1 = -K(q_1, q_2, \ldots, q_n, \quad p_2, \ldots, p_n, h). \tag{23}$$

Перепишем систему уравнений (12), отделив два уравнения, соответствующих значению i, равному единице, от остальных $(2n-2)$-х уравнений

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \qquad \frac{dq_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \tag{24}$$

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \qquad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \qquad (j = 2, 3, \ldots, n). \tag{25}$$

Разделив почленно уравнения (25) на первое из уравнений (24), получим

$$\frac{dq_j}{dq_1} = \frac{\dfrac{\partial H}{\partial p_j}}{\dfrac{\partial H}{\partial p_1}}, \qquad \frac{dp_j}{dq_1} = -\frac{\dfrac{\partial H}{\partial q_j}}{\dfrac{\partial H}{\partial p_1}}, \qquad (j = 2, 3, \ldots, n). \tag{26}$$

[1] Это пространство называют *фазовым пространством.*

Подставив величину p_1, задаваемую равенством (23), в левую часть интеграла (22) и продифференцировав полученное тождество по переменной q_j, получим

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} - \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial K}{\partial q_j} = 0 \qquad (j = 2,\ 3,\ \dots,\ n). \tag{27}$$

Аналогично получим, что

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial K}{\partial p_j} = 0 \qquad (j = 2,\ 3,\ \dots,\ n). \tag{28}$$

Преобразуя правые части уравнений (26) с использованием равенств (27) и (28), находим окончательно

$$\frac{dq_j}{dq_1} = \frac{\partial K}{\partial p_j}, \qquad \frac{dp_j}{dq_1} = -\frac{\partial K}{\partial q_j}, \qquad (j = 2,\ 3,\ \dots,\ n). \tag{29}$$

Уравнения (29) описывают движение системы при $H = h = \mathrm{const}$ и называются *уравнениями Уиттекера*. Они имеют форму канонических уравнений; роль функции Гамильтона играет функция K из (23), а роль времени — координата q_1.

Интегрирование уравнений Уиттекера (29) дает

$$\begin{gathered} q_j = q_j(q_1,\ h,\ c_1,\ \dots,\ c_{2n-2}), \\ p_j = p_j(q_1,\ h,\ c_1,\ \dots,\ c_{2n-2}), \qquad (j = 2,\ 3,\ \dots,\ n), \end{gathered} \tag{30}$$

где $c_1,\ \dots,\ c_{2n-2}$ — произвольные постоянные. Если эти выражения для q_j, p_j подставить в равенство (23), то получим

$$p_1 = f_1(q_1,\ h,\ c_1,\ \dots,\ c_{2n-2}), \tag{31}$$

Равенства (30), (31) задают геометрический характер движения: они определяют уравнения траекторий в фазовом пространстве (точнее, на гиперповерхности фазового пространства $H = h$). Чтобы найти зависимость движения от времени, воспользуемся первым из двух уравнений (24). Если в его правую часть подставить величины p_1, q_j, p_j из (30) и (31), то получим

$$\frac{dq_1}{dt} = g_1(q_1,\ h,\ c_1,\ \dots,\ c_{2n-2}),$$

откуда

$$t = \int \frac{dq_1}{g_1} + c_{2n-1}. \tag{32}$$

Разрешив уравнение (32) относительно q_1, получим

$$q_1 = q_1(t,\ h,\ c_1,\ \ldots,\ c_{2n-1}). \tag{33}$$

Уравнения Уиттекера (29) имеют структуру уравнений Гамильтона. Их можно записать в виде уравнений типа Лагранжа. Пусть гессиан функции K по переменным p_j отличен от нуля:

$$\det \left\| \frac{\partial^2 K}{\partial p_j \partial p_l} \right\|_{j,l=2}^{n} \neq 0. \tag{34}$$

Пусть P — преобразование Лежандра функции K по переменным p_j $(j = 2,\ 3,\ \ldots,\ n)$. Тогда

$$P = P(q_2,\ \ldots,\ q_n,\ q_2',\ \ldots,\ q_n',\ q_1,\ h) = \sum_{j=2}^{n} q_j' p_j - K, \tag{35}$$

где $q_j' = dq_j/dq_1$. Величины p_j в (35) выражаются через $q_2',\ \ldots,\ q_n'$ из уравнений

$$q_j' = \frac{\partial K}{\partial p_j} \qquad (j = 2,\ 3,\ \ldots,\ n),$$

т. е. из первых $n-1$ уравнений системы (29).

При помощи функции P уравнения (29) могут быть записаны в следующей эквивалентной форме:

$$\frac{d}{dq_1}\frac{\partial P}{\partial q_j'} - \frac{\partial P}{\partial q_j} = 0 \qquad (j = 2,\ 3,\ \ldots,\ n). \tag{36}$$

Это уравнения типа Лагранжа. Они называются *уравнениями Якоби.* Роль функции Лагранжа в уравнениях Якоби играет функция P, а роль времени, как и в уравнениях Уиттекера (29), — координата q_1.

Преобразуем выражение (35) для функции P, учитывая равенства (7), (23) и соотношение $q_1' \equiv 1$:

$$P = \sum_{j=2}^{n} p_j q_j' + p_1 = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i' = \frac{1}{\dot q_1}\sum_{i=1}^{n} p_i \dot q_i = \frac{1}{\dot q_1}(L + H). \tag{37}$$

Пусть система консервативна. Тогда $L = T - \Pi$, $H = T + \Pi$ и из (37) следует, что

$$P = \frac{2T}{\dot q_1}. \tag{38}$$

Но в консервативной системе

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k = \dot{q}_1^2 G(q_1, \ldots, q_n, q_2', \ldots, q_n'), \tag{39}$$

где

$$G = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}q_i'q_k'.$$

Из интеграла энергии $T + \Pi = h$ и равенства (39) находим, что

$$\dot{q}_1 = \sqrt{\frac{h-\Pi}{G}}.$$

И из (38), (39) получаем окончательное выражение для функции P в случае консервативной системы:

$$P = 2\sqrt{(h-\Pi)G}. \tag{40}$$

Пример 1. *Найдем уравнения Уиттекера и Якоби, описывающие движение точки массой m в однородном поле тяжести. Пусть ось Oz неподвижной системы координат $Oxyz$ направлена вертикально вверх. Тогда*

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \qquad \Pi = mgz,$$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz,$$

$$p_x = m\dot{x}, \quad p_y = m\dot{y}, \quad p_z = m\dot{z},$$

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + mgz.$$

Считая величину $\dot{x}$ положительной, из уравнения $H = h$ получаем $p_x = -K$, где

$$K = -\sqrt{2m(h-mgz) - p_y^2 - p_z^2}.$$

Уравнения Уиттекера (29) *будут такими:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p_y}{\sqrt{2m(h-mgz) - p_y^2 - p_z^2}},$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{p_z}{\sqrt{2m(h-mgz) - p_y^2 - p_z^2}}, \qquad \frac{dp_y}{dx} = 0,$$

$$\frac{dp_z}{dx} = -\frac{m^2 g}{\sqrt{2m(h-mgz) - p_y^2 - p_z^2}}.$$

Так как рассматриваемая система консервативна, то функция P *может быть вычислена по формуле* (40)*. Получаем*

$$G = \frac{1}{2}m(1 + y'^2 + z'^2).$$

Тогда

$$P = \sqrt{2m(h - mgz)(1 + y'^2 + z'^2)},$$

и уравнения Якоби (36) *запишутся в виде*

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{h - mgz}{1 + y'^2 + z'^2}} \cdot y'\right) = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{h - mgz}{1 + y'^2 + z'^2}} \cdot z'\right) + \frac{mg}{2}\sqrt{\frac{1 + y'^2 + z'^2}{h - mgz}} = 0.$$

§ 3. Уравнения Рауса

153. Функция Рауса. Для описания состояния голономной системы в данный момент времени t Раус предложил комбинацию переменных Лагранжа и Гамильтона. *Переменными Рауса* являются величины

$$q_i,\ \dot{q}_i;\quad q_\alpha,\ p_\alpha;\quad t\quad (i = 1, 2, \ldots, k;\quad \alpha = k + 1, \ldots, n),$$

где k — произвольное фиксированное число, меньшее n. Предположим, что гессиан функции Лагранжа по переменным $\dot{q}_\alpha$ $(\alpha = k + 1, \ldots, n)$ отличен от нуля:

$$\det\left\|\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha\, \partial \dot{q}_\beta}\right\|_{\alpha,\beta=k+1}^{n} \neq 0. \tag{1}$$

Для натуральной системы

$$\det\left\|\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta}\right\|_{\alpha,\beta=k+1}^{n} = \det\left\|\frac{\partial^2 T_2}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta}\right\|_{\alpha,\beta=k+1}^{n} = \det\left\|a_{\alpha\beta}\right\|_{\alpha,\beta=k+1}^{n}. \tag{2}$$

Последний определитель в равенстве (2) отличен от нуля (положителен), так как T_2 — определенно-положительная квадратичная форма от обобщенных скоростей и к ней применим критерий Сильвестра. Следовательно, для натуральной системы неравенство (1) всегда выполнено. В случае ненатуральной системы это неравенство является дополнительным к условию (46) п. 147 ограничением на функцию L.