Так как рассматриваемая система консервативна, то функция P может быть вычислена по формуле (40)*. Получаем*

$$G = \frac{1}{2}m(1 + y'^2 + z'^2).$$

Тогда

$$P = \sqrt{2m(h - mgz)(1 + y'^2 + z'^2)},$$

и уравнения Якоби (36) *запишутся в виде*

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{h - mgz}{1 + y'^2 + z'^2}} \cdot y'\right) = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{h - mgz}{1 + y'^2 + z'^2}} \cdot z'\right) + \frac{mg}{2}\sqrt{\frac{1 + y'^2 + z'^2}{h - mgz}} = 0.$$

§ 3. Уравнения Рауса

153. Функция Рауса. Для описания состояния голономной системы в данный момент времени t Раус предложил комбинацию переменных Лагранжа и Гамильтона. *Переменными Рауса* являются величины

$$q_i,\ \dot{q}_i; \quad q_\alpha,\ p_\alpha; \quad t \quad (i = 1,\ 2,\ \dots,\ k; \quad \alpha = k + 1,\ \dots,\ n),$$

где k — произвольное фиксированное число, меньшее n. Предположим, что гессиан функции Лагранжа по переменным $\dot{q}_\alpha$ $(\alpha = k + 1,\ \dots,\ n)$ отличен от нуля:

$$\det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha\, \partial \dot{q}_\beta} \right\|_{\alpha,\beta=k+1}^{n} \neq 0. \tag{1}$$

Для натуральной системы

$$\det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta} \right\|_{\alpha,\beta=k+1}^{n} = \det \left\| \frac{\partial^2 T_2}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta} \right\|_{\alpha,\beta=k+1}^{n} = \det \left\| a_{\alpha\beta} \right\|_{\alpha,\beta=k+1}^{n}. \tag{2}$$

Последний определитель в равенстве (2) отличен от нуля (положителен), так как T_2 — определенно-положительная квадратичная форма от обобщенных скоростей и к ней применим критерий Сильвестра. Следовательно, для натуральной системы неравенство (1) всегда выполнено. В случае ненатуральной системы это неравенство является дополнительным к условию (46) п. 147 ограничением на функцию L.

Обобщенные импульсы p_α определяются обычным образом при помощи равенств

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \qquad (\alpha = k+1, \ldots, n). \tag{3}$$

Функцией Рауса $R(q_1, \ldots, q_k, q_{k+1}, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_k, p_{k+1}, \ldots, p_n, t)$ называется преобразование Лежандра функции L по переменным $\dot{q}_{k+1}, \ldots \dot{q}_n$, т. е.

$$R = \sum_{\alpha=k+1}^{n} p_\alpha \dot{q}_\alpha - L(q_i, q_\alpha, \dot{q}_i, \dot{q}_\alpha, t), \tag{4}$$

где $\dot{q}_\alpha$ $(\alpha = k+1, \ldots, n)$ выражены через $q_i, q_\alpha, \dot{q}_i, p_\alpha, t$ из уравнений (3).

154. Уравнения Рауса. Полный дифференциал функции Рауса вычисляется по формуле

$$dR = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial R}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \sum_{\alpha=k+1}^{n} \left(\frac{\partial R}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \frac{\partial R}{\partial p_\alpha} dp_\alpha \right) + \frac{\partial R}{\partial t} dt. \tag{5}$$

С другой стороны, вычислив полный дифференциал правой части равенства (4) при условии (3), получим

$$dR = -\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \sum_{\alpha=k+1}^{n} \left(\dot{q}_\alpha dp_\alpha - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \tag{6}$$

Сравнение правых частей равенств (5) и (6) приводит к равенствам

$$\frac{\partial R}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k), \tag{7}$$

$$\frac{\partial R}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}, \quad \frac{\partial R}{\partial p_\alpha} = \dot{q}_\alpha \qquad (\alpha = k+1, \ldots, n), \tag{8}$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{9}$$

Но для нашей системы справедливы уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{10}$$

Из (7) и (10) следует, что

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k), \tag{11}$$

а равенства (3), (8) и (10) дают:

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial R}{\partial p_\alpha}, \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial q_\alpha} \qquad (\alpha = k+1,\ \ldots,\ n). \tag{12}$$

Совокупность уравнений (11) и (12) образует систему *уравнений Рауса*. Она состоит из k уравнений (11) второго порядка, имеющих структуру уравнений Лагранжа второго рода, и $2(n-k)$ уравнений (12) первого порядка, обладающих структурой уравнений Гамильтона.

Уравнения Рауса находят широкое применение при исследовании движения систем с циклическими координатами (см. далее п. 165).

§ 4. Уравнения движения неголономных систем

155. Уравнения движения с множителями связей. Пусть на систему наложено s дифференциальных неинтегрируемых связей, заданных равенствами (26) п. 16:

$$\sum_{j=1}^{m} b_{\beta j}(q_1, \ldots, q_m,\ t)\dot{q}_j + b_\beta(q_1, \ldots, q_m, t) = 0 \quad (\beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ s). \tag{1}$$

Тогда в общем уравнении динамики (см. п. 137)

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j\right)\delta q_j = 0 \tag{2}$$

величины δq_j не могут быть произвольными. Они связаны s независимыми соотношениями

$$\sum_{j=1}^{m} b_{\beta j}\delta q_j = 0 \qquad (\beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ s), \tag{3}$$

и число степеней свободы системы равно $n = m - s$.

Для вывода уравнений движения воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа. Каждое из s равенств (3) умножим на свой неопределенный скалярный множитель λ_β и результаты вычтем из (2). Тогда получим

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j - \sum_{\beta=1}^{s}\lambda_\beta b_{\beta j}\right)\delta q_j = 0. \tag{4}$$