Из (7) и (10) следует, что

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k), \tag{11}$$

а равенства (3), (8) и (10) дают:

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial R}{\partial p_\alpha}, \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial q_\alpha} \qquad (\alpha = k+1,\ \ldots,\ n). \tag{12}$$

Совокупность уравнений (11) и (12) образует систему *уравнений Рауса.* Она состоит из k уравнений (11) второго порядка, имеющих структуру уравнений Лагранжа второго рода, и $2(n-k)$ уравнений (12) первого порядка, обладающих структурой уравнений Гамильтона.

Уравнения Рауса находят широкое применение при исследовании движения систем с циклическими координатами (см. далее п. 165).

§ 4. Уравнения движения неголономных систем

155. Уравнения движения с множителями связей. Пусть на систему наложено s дифференциальных неинтегрируемых связей, заданных равенствами (26) п. 16:

$$\sum_{j=1}^{m} b_{\beta j}(q_1, \ldots, q_m, t)\dot{q}_j + b_\beta(q_1, \ldots, q_m, t) = 0 \quad (\beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ s). \tag{1}$$

Тогда в общем уравнении динамики (см. п. 137)

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j\right)\delta q_j = 0 \tag{2}$$

величины δq_j не могут быть произвольными. Они связаны s независимыми соотношениями

$$\sum_{j=1}^{m} b_{\beta j}\delta q_j = 0 \qquad (\beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ s), \tag{3}$$

и число степеней свободы системы равно $n = m - s$.

Для вывода уравнений движения воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа. Каждое из s равенств (3) умножим на свой неопределенный скалярный множитель λ_β и результаты вычтем из (2). Тогда получим

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j - \sum_{\beta=1}^{s}\lambda_\beta b_{\beta j}\right)\delta q_j = 0. \tag{4}$$

В силу независимости равенств (3) ранг матрицы, составленной из коэффициентов $b_{\beta j}$ ($\beta = 1, 2, \ldots, s$; $j = 1, 2, \ldots, m$), равен s. Следовательно, хотя бы один из ее миноров порядка s отличен от нуля. Для определенности будем считать, что

$$\det \left\| b_{\beta, n+k} \right\|_{\beta, k=1}^{s} \neq 0. \tag{5}$$

Тогда величины $\delta q_1, \ldots, \delta q_n$ можно принять за независимые, а δq_{n+k} ($k = 1, \ldots, s$) однозначно выражаются через них из равенств (3).

Выберем величины λ_β ($\beta = 1, 2, \ldots, s$) так, чтобы коэффициенты при $\delta q_{n+1}, \ldots, \delta q_m$ в выражении (4) обратились в нуль. При условии (5) это сделать можно, и притом единственным способом. При таком выборе величин λ_β в выражении (4) будут содержаться только независимые вариации δq_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), и, следовательно, коэффициенты при них должны равняться нулю.

Таким образом, приходим к следующим m уравнениям:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{\beta=1}^{s} \lambda_\beta b_{\beta j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{6}$$

К ним еще надо присоединить s уравнений связей (1). Тогда получим систему $m + s$ уравнений для определения величин q_j, λ_β ($j = 1, 2, \ldots, m$; $\beta = 1, 2, \ldots, s$). Величины λ_β называются *множителями связей*. Слагаемые $\sum\limits_{\beta=1}^{s} \lambda_\beta b_{\beta j}$ в уравнениях (6) представляют собой обобщенные реакции связей,

Пример 1. *В качестве примера рассмотрим движение конька по горизонтальной поверхности льда (см. пример 5 из п. 10 и рис. 10) в предположении, что трение отсутствует. Пусть C — центр масс конька. Положение конька зададим тремя обобщенными координатами x, y, φ, смысл которых ясен из рис. 10. Неинтегрируемая связь задается уравнением*

$$\dot{x} \operatorname{tg} \varphi - \dot{y} = 0. \tag{7}$$

Если m — масса конька, а J_C — его момент инерции относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс, то кинетическая энергия вычисляется по формуле

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} J_C \dot{\varphi}^2. \tag{8}$$

Уравнения (6) *принимают вид*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} &= Q_x + \lambda \operatorname{tg}\varphi, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} &= Q_y - \lambda, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= Q_\varphi. \end{aligned} \tag{9}$$

Так как трения нет, а потенциальная энергия Π *конька постоянна, то обобщенные силы* Q_x, Q_y, Q_φ *равны нулю. Уравнения* (9) *с учетом выражения* (8) *запишутся в виде*

$$m\ddot{x} = \lambda \operatorname{tg}\varphi, \quad m\ddot{y} = -\lambda, \quad \ddot{\varphi} = 0. \tag{10}$$

Пусть в начальный момент центр масс конька находится в начале координат и конек расположен вдоль оси Ox, *т. е. при* $t = 0$ *имеем* $x = 0$, $y = 0$, $\varphi = 0$. *Пусть, далее, в начальный момент скорость центра масс равна* v_0, *а угловая скорость конька* ω_0, *т. е.* $\dot{x} = v_0$, $\dot{\varphi} = \omega_0$. *Из уравнения связи* (7) *находим тогда, что при* $t = 0$ $\dot{y} = 0$. *Третье уравнение системы* (10) *при этих начальных условиях дает*

$$\varphi = \omega_0 t, \tag{11}$$

т. е. конек движется, равномерно вращаясь вокруг вертикали.

Исключив теперь величину λ *из первых двух уравнений системы* (10), *получим*

$$\ddot{x} + \operatorname{tg}\omega_0 t\ddot{y} = 0.$$

Используя уравнение связи (7), *исключаем отсюда величину* $\ddot{y}$. *Тогда с учетом равенства* (11) *получим уравнение относительно* x:

$$\ddot{x} + \omega_0 \operatorname{tg}\omega_0 t\dot{x} = 0. \tag{12}$$

Из (7), (11) *и* (12) *с учетом начальных условий найдем*

$$x = \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t, \qquad y = \frac{v_0}{\omega_0}(1 - \cos\omega_0 t). \tag{13}$$

Отсюда следует, что центр масс конька равномерно со скоростью v_0 *движется по окружности радиусом* v_0/ω_0, *центр которой находится на оси* Oy (рис. 136).

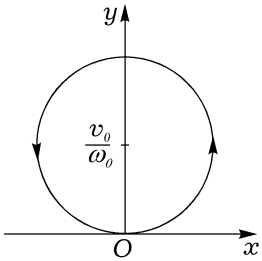

Рис. 136

Множитель связи λ можно найти теперь из (13) *и второго из уравнений системы* (10):

$$\lambda = -m\omega_0 v_0 \cos\omega_0 t. \qquad (14)$$

При известной величине λ можно найти реакцию $\boldsymbol{R}$ связи. Для ее проекций R_x, R_y из (10), (11) *получаем выражения*

$$R_x = \lambda \operatorname{tg}\omega_0 t, \qquad R_y = -\lambda.$$

Подставив в них значение λ из формулы (14), *получим*

$$R_x = -m\omega_0 v_0 \sin\omega_0 t, \qquad R_y = m\omega_0 v_0 \cos\omega_0 t.$$

Реакция $\boldsymbol{R}$ имеет постоянную величину $m\omega_0 v_0$ и направлена к центру окружности, по которой движется центр масс конька.

156. Уравнения Воронца. Система уравнений (1), (6) помимо функций q_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ содержит еще s дополнительных неизвестных — множителей связей λ_β $(\beta = 1, 2, \ldots, s)$. Число уравнений в системе (1), (6) равно $m + s = n + 2s$, т. е. превышает число степеней свободы на удвоенное количество неинтегрируемых связей.

Большое количество уравнений в системе (1), (6) и наличие в ней множителей связей ведет к значительным сложностям при исследовании движения. К тому же, когда целью исследования является только нахождение движения, т. е. определение зависимостей $q_j(t)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$, вычисление величин λ_β, позволяющих найти реакции связей, является совершенно излишней процедурой.

Для неголономных систем со связями (1) П. В. Воронец получил уравнения, которые по форме близки к уравнениям Лагранжа второго рода и свободны от упомянутых недостатков. Выведем эти уравнения, предполагая, что система склерономна.

В случае склерономной системы величины b_β в уравнениях связей (1) равны нулю, а коэффициенты $b_{\beta j}$ не зависят от времени. Среди m обобщенных скоростей есть n независимых; пусть это будут обобщенные скорости $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$. Тогда из (1) находим

$$\dot{q}_{n+k} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki}\dot{q}_i \quad (k = 1, 2, \ldots, s = m - n), \qquad (15)$$

где α_{ki} — функции от $q_1, q_2, \ldots, q_m$.

Когда система неголономна, то величины

$$A_{ij}^{(k)} = \left(\frac{\partial \alpha_{ki}}{\partial q_j} + \sum_{\mu=1}^{s} \frac{\partial \alpha_{ki}}{\partial q_{n+\mu}} \alpha_{\mu j}\right) - \left(\frac{\partial \alpha_{kj}}{\partial q_i} + \sum_{\mu=1}^{s} \frac{\partial \alpha_{kj}}{\partial q_{n+\mu}} \alpha_{\mu i}\right) \tag{16}$$

не могут все одновременно быть тождественно равными нулю[1]. Уравнения движения, содержащие множители связей, запишутся в виде

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i - \sum_{k=1}^{s} \lambda_k \alpha_{ki} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_{n+k}} - \frac{\partial T}{\partial q_{n+k}} = Q_{n+k} + \lambda_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, s). \end{aligned} \tag{17}$$

Эти уравнения должны рассматриваться совместно с уравнениями связей (15).

Обозначим Θ функцию, получающуюся в результате исключения при помощи равенств (15) величин $\dot q_{n+k}$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$ из выражения для кинетической энергии T:

$$T(q_1, \ldots, q_m, \dot q_1, \ldots, \dot q_m, t) = \Theta(q_1, \ldots, q_m, \dot q_1, \ldots, \dot q_n, t).$$

Согласно (15), справедливо равенство

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot q_i} + \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot q_{n+k}} \alpha_{ki} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial \dot q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i} + \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ki} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_{n+k}} + \sum_{k=1}^{s} \frac{d\alpha_{ki}}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_{n+k}}. \tag{18}$$

Заменив здесь величины $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}$ и $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_{n+k}}$ на их выражения из уравнений (17), получим, что члены, содержащие множители связей, взаимно уничтожаются, и равенство (18) запишется в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i + \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ki} \frac{\partial T}{\partial q_{n+k}} + \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ki} Q_{n+k} + \sum_{k=1}^{s} \frac{d\alpha_{ki}}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_{n+k}}. \tag{19}$$

[1]Если бы это было не так, то для всех k имели бы место равенства $q_{n+k} = f_k(q_1, q_2, \ldots, q_m)$, т. е. система не была бы неголономной. Действительно, условия $A_{i,j}^{(k)} = 0$ $(i\ j = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, s)$ суть записанные с учетом равенств (15) условия того, что величина $dq_{n+k} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ki} dq_i$ является полным дифференциалом.

Учитывая, что в соответствии с (15)

$$\frac{\partial\Theta}{\partial q_l} = \frac{\partial T}{\partial q_l} + \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot q_{n+k}} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \alpha_{kj}}{\partial q_l} \dot q_j \right) \qquad (l = 1, 2, \ldots, n),$$

из равенства (19) получаем

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial\Theta}{\partial q_i} - \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot q_{n+k}} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \alpha_{kj}}{\partial q_i} \dot q_j \right) + Q_i + \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ki} \frac{\partial\Theta}{\partial q_{n+k}} -$$
$$- \sum_{\mu=1}^{s} \alpha_{\mu i} \left(\sum_{k=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot q_{n+k}} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \alpha_{kj}}{\partial q_{n+\mu}} \dot q_j \right) \right) + \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ki} Q_{n+k} + \sum_{k=1}^{s} \frac{d\alpha_{ki}}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot q_{n+k}} \tag{20}$$

или

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial\Theta}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ki} \left(Q_{n+k} + \frac{\partial\Theta}{\partial q_{n+k}} \right) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot q_{n+k}} \left[\frac{d\alpha_{ki}}{dt} - \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \alpha_{kj}}{\partial q_i} + \sum_{\mu=1}^{s} \frac{\partial \alpha_{kj}}{\partial q_{n+\mu}} \alpha_{\mu i} \right) \dot q_j \right]. \tag{21}$$

Замечая, что выражение, заключенное в квадратные скобки в соотношении (21), тождественно равно величине

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij}^{(k)} \dot q_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, s),$$

где величины $A_{ij}^{(k)}$ определены равенствами (16), и вводя для импульсов обозначение

$$\theta_k = \frac{\partial T}{\partial \dot q_{n+k}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, s), \tag{22}$$

получаем окончательно уравнения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial\Theta}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ki} \left(Q_{n+k} + \frac{\partial\Theta}{\partial q_{n+k}} \right) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{s} \theta_k \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}^{(k)} \dot q_j \right) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{23}$$

Эти уравнения называются *уравнениями Воронца.* Они должны рассматриваться совместно с уравнениями связей (15). Полученная система уравнений движения неголономной системы не содержит множителей связей. Число уравнений равно $n+s$, т. е. совпадает с числом обобщенных координат.

157. Уравнения Чаплыгина. Пусть кинетическая энергия T, коэффициенты α_{ki} $(k=1, 2, \ldots, s;\ i=1, 2, \ldots, n)$ в уравнениях связей и обобщенные силы Q_l $(l=1, 2, \ldots, m)$ не зависят от обобщенных координат q_{n+k} $(k=1, 2, \ldots, s)$. Тогда уравнения (23) запишутся в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot q_i}-\frac{\partial\Theta}{\partial q_i}=Q_i+\sum_{k=1}^{s}\alpha_{ki}Q_{n+k}+\sum_{k=1}^{s}\theta_k\left(\sum_{j=1}^{n}A_{ij}^{(k)}\dot q_j\right)\qquad(i=1, 2, \ldots, n),\tag{24}$$

где

$$A_{ij}^{(k)}=\frac{\partial\alpha_{ki}}{\partial q_j}-\frac{\partial\alpha_{kj}}{\partial q_i}\qquad(i, j=1, 2, \ldots, n;\ k=1, 2, \ldots, s).\tag{25}$$

Если в выражениях для обобщенных сил Q_l $(l=1, 2, \ldots, m)$ и импульсов θ_k $(k=1, 2, \ldots, s)$ при помощи уравнений связей (15) исключить обобщенные скорости $\dot q_{n+k}$ $(k=1, 2, \ldots, s)$, то получим систему уравнений относительно q_i $(i=1, 2, \ldots, n)$, которую можно интегрировать независимо от уравнений связей (15). Эти уравнения впервые были получены Чаплыгиным и носят его имя.

После интегрирования уравнений (24) остальные координаты $q_{n+1}, \ldots, q_m$ найдутся из (15) при помощи квадратур.

Если обобщенные силы потенциальны и потенциал Π не зависит от обобщенных координат q_{n+k}, то уравнения (24) примут вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot q_i}-\frac{\partial\Theta}{\partial q_i}=-\frac{\partial\Pi}{\partial q_i}+\sum_{k=1}^{s}\theta_k\left(\sum_{j=1}^{n}A_{ij}^{(k)}\dot q_j\right)\qquad(i=1, 2, \ldots, n).\tag{26}$$

Пример 1 (Качение диска по неподвижной горизонтальной плоскости). *Пусть однородный круговой диск катится без скольжения по неподвижной горизонтальной плоскости, опираясь на нее одной точкой своего края. Движение отнесем к неподвижной системе координат $OXYZ$ с началом в некоторой точке O опорной плоскости; ось OZ направлена вертикально вверх* (рис. 137). *Пусть $GXYZ$ — поступательно движущаяся система координат, оси которой параллельны соответствующим осям системы $OXYX$. Система координат $Gxyz$*

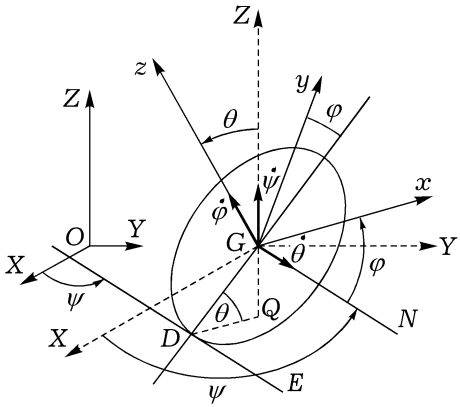

Рис. 137

жестко связана с диском: ее ось Gz перпендикулярна плоскости диска. За обобщенные координаты примем три угла Эйлера и две координаты x, y проекции Q центра тяжести G на опорную плоскость в системе $OXYZ$. Третья координата z центра тяжести есть его расстояние до опорной плоскости. Из рис. 137 *видно, что*

$$z = \rho \sin\theta, \tag{27}$$

где ρ — радиус диска.

Кинетическая и потенциальная энергия диска определяются выражениями

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2), \qquad \Pi = mg\rho\sin\theta,$$

где m — масса диска, g — ускорение свободного падения, p, q, r — проекция угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ диска на оси Gx, Gy, Gz, являющиеся его главными центральными осями инерции, A, B, C — моменты инерции диска относительно осей Gx, Gy, Gz, причем

$$A = B = \frac{1}{4}m\rho^2, \qquad C = \frac{1}{2}m\rho^2,$$

а p, q, r задаются кинематическими уравнениями Эйлера

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi, \\ q &= \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi, \\ r &= \dot{\psi}\cos\theta + \varphi. \end{aligned} \tag{28}$$

Принимая во внимание, что, согласно (27),

$$\dot{z} = \rho\dot{\theta}\cos\theta, \tag{29}$$

выражение для кинетической энергии диска можно записать в виде

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{8}m\rho^2(1 + 4\cos^2\theta)\dot{\theta}^2 + \\ + \frac{1}{8}m\rho^2\sin^2\theta\dot{\psi}^2 + \frac{1}{4}m\rho^2(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})^2. \end{aligned} \tag{30}$$

Уравнения связей получим из условия отсутствия скольжения. Если скольжения нет, то скорость $\boldsymbol{v}_D$ *точки диска, которой он касается опорной плоскости, равна нулю. Поэтому*

$$\boldsymbol{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \overline{GD} = 0, \tag{31}$$

где $\boldsymbol{v}_G$ *— скорость центра тяжести,* $\overline{GD}$ *— радиус-вектор точки* D *относительно* G.

На рис. 137 *прямая* DE *является касательной к диску в точке* D. *Она параллельна линии узлов* GN. *Прямая* DG *перпендикулярна* DE, *лежит в плоскости, проходящей через оси* GZ *и* Gz, *и составляет угол* φ *с осью* Gy. *В системе координат* $OXYZ$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}'_G &= (\dot{x},\, \dot{y},\, \dot{z}), \\ \overline{GD}' &= \rho(\cos\theta\sin\psi,\, -\cos\theta\cos\psi,\, -\sin\theta), \\ \boldsymbol{\omega}' &= (\dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta,\, \dot{\theta}\sin\psi - \dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta,\, \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta). \end{aligned} \tag{32}$$

Третья компонента векторной правой части равенства (31) *тождественно равна нулю в силу равенства* (29). *Приравнивание нулю первых компонент дает уравнения связей*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \rho[\dot{\theta}\sin\psi\sin\theta - (\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})\cos\psi], \\ \dot{y} &= -\rho[\dot{\theta}\cos\psi\sin\theta + (\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})\sin\psi]. \end{aligned} \tag{33}$$

Так как Π, T *и уравнения связей не содержат обобщенных координат* x, y, *то уравнения движения диска могут быть записаны в форме уравнений Чаплыгина.*

Для удобства вычислений введем временно обозначения

$$q_1 = \theta,\ q_2 = \varphi,\ q_3 = \psi,\ q_4 = x,\ q_5 = y.$$

Тогда в обозначениях п. 156, 157 *имеем*

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \rho\sin q_1\sin q_3, & \alpha_{12} &= -\rho\cos q_3, \\ \alpha_{13} &= -\rho\cos q_1\cos q_3, & \alpha_{21} &= -\rho\sin q_1\cos q_3, \\ \alpha_{22} &= -\rho\sin q_3, & \alpha_{23} &= -\rho\cos q_1\sin q_3. \end{aligned}$$

Отсюда и из (25) *следует, что*

$$A_{23}^{(1)} = -A_{32}^{(1)} = \rho \sin q_3, \qquad A_{23}^{(2)} = -A_{32}^{(2)} = -\rho \cos q_3.$$

Остальные величины $A_{ij}^{(k)}$ $(i,\, j = 1,\, 2,\, 3;\ k = 1,\, 2)$ *тождественно равны нулю.*

Для обобщенных импульсов θ_1, θ_2 *имеем выражения*

$$\theta_1 = m\dot{x} = m\rho(\sin q_1 \sin q_3 \dot{q}_1 - \cos q_3 \dot{q}_2 - \cos q_1 \cos q_3 \dot{q}_3),$$
$$\theta_2 = m\dot{y} = -m\rho(\sin q_1 \cos q_3 \dot{q}_1 + \sin q_3 \dot{q}_2 + \cos q_1 \sin q_3 \dot{q}_3).$$

Если теперь возвратиться к исходным обозначениям, то уравнения Чаплыгина запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} &= -mg\rho \cos\theta, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} &= m\rho^2 \sin\theta\dot{\theta}\dot{\psi}, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial \Theta}{\partial \psi} &= -m\rho^2 \sin\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}. \end{aligned} \tag{34}$$

Здесь Θ *есть кинетическая энергия* (30), *в которой величины* $\dot{x}$, $\dot{y}$ *исключены при помощи уравнений связей* (33):

$$\Theta = \frac{5}{8}m\rho^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{8}m\rho^2 \sin^2\theta\dot{\psi}^2 + \frac{3}{4}m\rho^2(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})^2. \tag{35}$$

Подставив функцию Θ *в* (34), *получим систему уравнений движения*

$$\begin{gathered} \ddot{\theta} + \sin\theta\cos\theta\dot{\psi}^2 + \frac{6}{5}\sin\theta\dot{\varphi}\dot{\psi} + \frac{4}{5}\frac{g}{\rho}\cos\theta = 0, \\ \frac{d}{dt}(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}) = \frac{2}{3}\sin\theta\dot{\theta}\dot{\psi}, \\ \frac{d}{dt}[(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})\cos\theta + \frac{1}{6}\sin^2\theta\dot{\psi}] = -\frac{2}{3}\sin\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}. \end{gathered} \tag{36}$$

Если эта система проинтегрирована, то движение центра тяжести диска найдется при помощи конечного соотношения (27) *и двух квадратур из* (33).

Уравнения движения (36) *допускают частные решения, для которых* $\theta = \theta_0 = \mathrm{const}$. *При этом*

$$\dot{\varphi} = \omega_1 = \mathrm{const}, \qquad \dot{\psi} = \omega_2 = \mathrm{const}, \tag{37}$$

а угол θ_0 *удовлетворяет следующему соотношению, вытекающему из первого уравнения системы* (36):

$$\cos\theta_0 \sin\theta_0 \omega_2^2 + \frac{6}{5}\sin\theta_0 \omega_1 \omega_2 + \frac{4}{5}\frac{g}{\rho}\cos\theta_0 = 0. \tag{38}$$

Если $\theta_0 = \pi/2$, *то это уравнение переходит в условие* $\omega_1\omega_2 = 0$. *Отсюда следует, что существуют следующие движения диска:*

$$\theta_0 = \pi/2, \qquad \omega_1 = 0, \qquad \omega_2 \neq 0, \tag{39}$$

$$\theta_0 = \pi/2, \qquad \omega_1 \neq 0, \qquad \omega_2 = 0, \tag{40}$$

$$\theta_0 = \pi/2, \qquad \omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = 0, \tag{41}$$

В движении (39) *диск вращается с произвольной постоянной угловой скоростью* ω_2 *вокруг одного из своих диаметров, который неподвижен и занимает вертикальное положение. В движении* (40) *диск катится по прямой, при этом плоскость диска вертикальна, а центр тяжести движется с произвольной постоянной скоростью* $|\omega_1\rho|$. *Движение* (41) *соответствует покою диска в вертикальной плоскости.*

В общем случае, когда $\theta_0 \neq \pi/2$, *величины* ω_1, ω_2, θ_0 *связаны между собой соотношением* (38), *которое, следовательно, определяет двухпараметрическое семейство движений диска. Для этих движений из уравнений связей* (33) *получаем*

$$x = \alpha - \rho\frac{\omega_2\cos\theta_0 + \omega_1}{\omega_2}\sin\psi, \quad y = \beta + \rho\frac{\omega_2\cos\theta_0 + \omega_1}{\omega_2}\cos\psi,$$

где α *и* β *— постоянные интегрирования, определяемые по начальным условиям, а* $\psi = \omega_2 t + \psi_0$. *Отсюда и из* (27) *следует, что центр тяжести диска движется по окружности, расположенной в горизонтальной плоскости и имеющей центр в точке* $(\alpha, \beta, \rho\sin\theta_0)$; *радиус этой окружности*

$$R = \rho\left|\frac{\omega_2\cos\theta_0 + \omega_1}{\omega_2}\right|.$$

Отсюда и из рис. 137 *следует, что точка* D *касания во время движения диска описывает на опорной плоскости* OXY *окружность с центром в точке* (α, β) *и радиусом, равным* $\rho|\omega_1/\omega_2|$.

В самом общем случае аналитическое исследование движения диска приводится к интегрированию одного линейного дифференциального уравнения второго порядка и квадратурам. Чтобы показать это, заметим, что $\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi = r$, *и, рассматривая промежуток времени, на котором* $\dot\theta \neq 0$, *перейдем во втором и третьем уравнениях системы* (36)

к новой независимой переменной θ. Тогда получим

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{2}{3}\sin\theta\dot{\psi}, \quad \frac{d}{d\theta}\left(r\cos\theta + \frac{1}{6}\sin^2\theta\dot{\psi}\right) = -\frac{2}{3}\sin\theta(r - \dot{\psi}\cos\theta). \quad (42)$$

Исключив из этих уравнений величину $\dot{\psi}$, приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta\frac{dr}{d\theta} - \frac{4}{3}r = 0,$$

которое, если положить $u = \cos^2\theta$, принимает вид

$$u(1-u)\frac{d^2r}{du^2} + \frac{1}{2}(1-3u)\frac{dr}{du} - \frac{1}{3}r = 0.$$

Это линейное дифференциальное уравнение второго порядка представляет собой известное из теории дифференциальных уравнении гипергеометрическое уравнение Гаусса. Его интегрирование дает величину r как функцию угла θ. Из первого уравнения системы (42) *и равенства $\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi} = r$ определяются затем $\dot{\psi}$ и $\dot{\varphi}$ как функции угла θ. Таким образом, задача нахождения углов Эйлера сводится к нахождению θ как функции времени, так как $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ найдутся при известной функции $\theta(t)$ посредством квадратур.*

Зависимость $\theta(t)$ также получается посредством квадратур. Действительно, уравнения (34) *имеют интеграл энергии*

$$\Theta + \Pi = h = \text{const}. \quad (43)$$

Это следует из того (см. п. 143), *что уравнения* (34) *можно рассматривать как уравнения движения склерономной системы под действием гироскопических сил $Q_\varphi = m\rho^2\sin\theta\dot{\theta}\dot{\psi}$, $Q_\psi = -m\rho^2\sin\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}$ и потенциальной силы $Q_\theta = -mg\rho\cos\theta$ с потенциалом, не зависящим от времени.*

Подставив в равенство (43) *величины $\dot{\psi}$, $\dot{\varphi}$ как функции угла θ и разрешив его относительно $\dot{\theta}$, получим $\dot{\theta}$ как функцию θ. Отсюда t выразится через θ при помощи одной квадратуры, обратив которую найдем $\theta = \theta(t)$.*

158. Уравнения Аппеля. Аппель предложил уравнения движения, которые не содержат множителей связей и применимы как к голономным, так и к неголономным системам с неинтегрируемыми связями вида (1). Получим эти уравнения в псевдокоординатах (см. п. 17). Пусть псевдоскорости $\dot{\pi}_i$ определены по формулам (29) п. 17:

$$\dot{\pi}_i = \sum_{j=1}^{m} c_{ij}(q_1, q_2, \ldots, q_m, t)\dot{q}_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \quad (44)$$

Для получения уравнений Аппеля выразим в псевдокоординатах общее уравнение динамики

$$\sum_{\nu=1}^{N}(\boldsymbol{F}_\nu - m_\nu \boldsymbol{w}_\nu)\cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0. \tag{45}$$

Подставив в равенство

$$\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{F}_\nu \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu = \sum_{j=1}^{m} Q_j \delta q_j,$$

где Q_j — обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q_j, вместо величин δq_j их выражения через $\delta\pi_i$ по формулам (32) п. 17, получим элементарную работу активных сил в виде

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{F}_\nu \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu = \sum_{j=1}^{m} Q_j \sum_{i=1}^{n} d_{ij}\delta\pi_i = \sum_{i=1}^{n}\Pi_i \delta\pi_i, \tag{46}$$

где

$$\Pi_i = \Pi_i(q_1, \ldots, q_m, \dot\pi_i, \ldots, \dot\pi_n, t) = \sum_{j=1}^{m} d_{ij}Q_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{47}$$

Величины Π_i называются *обобщенными силами, соответствующими псевдокоординатам* π_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Для получения элементарной работы сил инерции в псевдокоординатах получим, при помощи равенств (35) п. 17, следующее выражение:

$$\begin{aligned} -\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{w}_\nu \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu &= -\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{w}_\nu \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{w}_\nu}{\partial \ddot\pi_i}\delta\pi_i = \\ &= -\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{w}_\nu \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}_\nu}{\partial \ddot\pi_i}\right)\delta\pi_i. \end{aligned} \tag{48}$$

Если ввести функцию S по формуле

$$S = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{w}_\nu^2, \tag{49}$$

то равенство (48) можно записать так:

$$-\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{w}_\nu \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial \ddot\pi_i}\delta\pi_i. \tag{50}$$

Функция S называется *энергией ускорений.* В общем случае она является функцией от $q_1, \ldots, q_m, \dot{\pi}_1, \ldots, \dot{\pi}_n, \ddot{\pi}_1, \ldots, \ddot{\pi}_n, t$.

Из равенств (46) и (50) следует, что общее уравнение динамики (45) в псевдокоординатах имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_i} - \Pi_i \right) \delta\pi_i = 0. \tag{51}$$

Так как величины $\delta\pi_i$ могут принимать произвольные значения, то отсюда следуют уравнения

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_i} = \Pi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{52}$$

Эти уравнения называются *уравнениями Аппеля.* Они должны рассматриваться совместно с s уравнениями связей (1) и n соотношениями (44), вводящими псевдоскорости.

Аналогично тому, как в п. 140 доказана разрешимость уравнений Лагранжа относительно обобщенных ускорений $\ddot{q}_i$, можно показать, что уравнения Аппеля (52) разрешимы относительно псевдоускорений $\ddot{\pi}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Кроме того, уравнения (1) и (44), по самому выбору псевдоскоростей, разрешимы относительно $\dot{q}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ (см. уравнения (30) п. 17). Таким образом, приходим к $m + n$ уравнениям, разрешенным относительно производных неизвестных функций $q_1, \ldots, q_m, \dot{\pi}_1, \ldots, \dot{\pi}_n$. Если заданы начальные значения $q_1^0, \ldots, q_m^0, \dot{\pi}_1^0, \ldots, \dot{\pi}_n^0$, то, при не очень обременительных для механики условиях на силы, дальнейшее движение системы будет однозначно определено. Но по величинам $q_1^0, \ldots, q_m^0, \dot{\pi}_1^0, \ldots, \dot{\pi}_n^0$ из формул (30) п. 17 однозначно определяются совместимые со связями (1) начальные значения обобщенных скоростей $\dot{q}_1^0, \ldots, \dot{q}_m^0$. А по величинам $q_j^0, \dot{q}_j^0$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ однозначно определяются совместимые со связями начальные положения и начальные скорости точек системы в декартовой системе координат. Отсюда следует, что если заданы не противоречащие конечным и дифференциальным связям положения и скорости точек системы, то дальнейшее их движение однозначно определено.

Если в качестве величин $\dot{\pi}_i$ приняты обобщенные скорости $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то соответствующие обобщенные силы Π_i равны величинам Q'_i, вычисляемым по формулам (13) п. 63. Энергия ускорений S в этом случае будет функцией от $q_1, \ldots, q_m, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, \ddot{q}_1, \ldots, \ddot{q}_n, t$, и уравнения Аппеля

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_i} = Q'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{53}$$

вместе с уравнениями связей (1) образуют систему уравнений, определяющих движение рассматриваемой неголономной системы. Число уравнений равно $n + s = m$, т. е., как и в случае уравнений Воронца, совпадает с числом обобщенных координат. Если система голономна, то $m = n$, $Q'_i = Q_i$, и уравнения (53) будут просто другой формой записи уравнений Лагранжа второго рода.

Для получения уравнений Аппеля нужно вычислить функцию S — энергию ускорений, определяемую по формуле (49). Это довольно громоздкая процедура. Поэтому, как правило, выписывание уравнений Аппеля является более трудоемкой процедурой по сравнению с получением уравнений Воронца и Чаплыгина, где вместо S надо вычислять кинетическую энергию T.

В качестве примера используем уравнения Аппеля для доказательства достаточности условий принципа виртуальных перемещений для равновесия системы (п. 62).

Пусть условия (3) и (4) п. 62 выполнены и при $t = t_0$ имеем $\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_{\nu 0}$, $\boldsymbol{v}_\nu = 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots, N)$. Покажем, что тогда на всем промежутке времени $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ система находится в состоянии равновесия, т. е. для этого промежутка времени $\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_{\nu 0}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, N)$.

Из (44), (46) и условия (4) п. 62 следует, что при $\boldsymbol{r}_\nu \equiv \boldsymbol{r}_{\nu 0}$ $\Pi_i(q_{10}, \ldots, q_{m0}\ 0, \ldots, 0, t) \equiv 0$ для $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ (здесь $q_{10}, \ldots, q_{m0}$ — значения обобщенных координат, отвечающие положению равновесия, задаваемому в декартовой системе координат радиусами-векторами $\boldsymbol{r}_{\nu 0}$ точек системы). С другой стороны, величины

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_i} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{w}_\nu \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}_\nu}{\partial \ddot{\pi}_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

при $\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_{\nu 0}$ также равны нулю, так как тогда $\boldsymbol{w}_\nu \equiv 0$. Следовательно, уравнения Аппеля (52) имеют частное решение $q_j = q_{j0}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$, отвечающее положению равновесия $\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_{\nu 0}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, N)$.

Достаточность условий принципа виртуальных перемещений следует теперь из принципа детерминированности движения Ньютона — Лапласа (см. п. 45), так как, согласно этому принципу, принимаемому в классической механике, движение системы однозначно определяется положениями и скоростями ее точек в начальный момент времени.

159. Вычисление энергии ускорений. Аналог теоремы Кенига. Пусть $\boldsymbol{w}_C$ — абсолютное ускорение центра масс, $\boldsymbol{w}_\nu$ — абсолютное ускорение точки P_ν системы, а $\boldsymbol{w}_{\nu r}$ — ускорение этой точки в ее движении относительно центра масс. Тогда для всех точек системы

$$\boldsymbol{w}_\nu = \boldsymbol{w}_C + \boldsymbol{w}_{\nu r}. \tag{54}$$

Вычислим энергию ускорений

$$S = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{w}_\nu^2. \tag{55}$$

Подставив (54) в формулу (55), получим

$$S = \frac{1}{2}\left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\right)\boldsymbol{w}_C^2 + \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{w}_{\nu r}\right)\cdot \boldsymbol{w}_C + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{w}_{\nu r}^2. \tag{56}$$

Так как $\sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu = M$, а $\sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{w}_{\nu r} = M\boldsymbol{w}_{Cr} = 0$, то из (56) получаем

$$S = \frac{1}{2}Mw_C^2 + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu w_{\nu r}^2, \tag{57}$$

т. е. *энергия ускорений системы равна сумме энергии ускорений, которую имела бы материальная точка, расположенная в центре масс системы и имеющая массу, равную массе системы, и энергии ускорений в движении системы относительно центра масс.*

Полученное утверждение является аналогом теоремы Кенига для кинетической энергии (см. п. 83).

160. Энергия ускорений твердого тела, движущегося вокруг неподвижной точки. Пусть $Oxyz$ — жестко связанная с телом система координат, начало которой совпадает с неподвижной точкой O тела. Оси Ox, Oy, Oz направлены по главным осям инерции тела для точки O. Положение частицы m_ν тела определяется ее радиусом-вектором $\boldsymbol{r}_\nu$, $\boldsymbol{r}'_\nu = (x_\nu, y_\nu, z_\nu)$. Пусть $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела, $\boldsymbol{\omega}' = (p, q, r)$, а $\boldsymbol{\varepsilon}$ — его угловое ускорение. Так как абсолютная производная вектора $\boldsymbol{\omega}$ совпадает с его относительной производной, то

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = (\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}). \tag{58}$$

Согласно п. 24, ускорение частицы m_ν определяется по формуле

$$\boldsymbol{w}_\nu = \boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}_\nu + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_\nu),$$

или

$$\boldsymbol{w}_\nu = \boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}_\nu + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}_\nu) - \boldsymbol{r}_\nu\omega^2. \tag{59}$$

Отсюда получаем выражения для проекций ускорения $\boldsymbol{w}_\nu$ на оси Ox, Oy, Oz:

$$\begin{aligned} w_{\nu x} &= -x_\nu(q^2+r^2) + y_\nu(qp-\dot r) + z_\nu(pr+\dot q),\\ w_{\nu y} &= -y_\nu(r^2+p^2) + z_\nu(rq-\dot p) + x_\nu(qp+\dot r),\\ w_{\nu z} &= -z_\nu(p^2+q^2) + x_\nu(pr-\dot q) + y_\nu(rq+\dot p). \end{aligned} \tag{60}$$

Если N — число частиц, на которые мы мысленно разбили тело, то выражение для энергии ускорений имеет вид

$$S = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(w_{\nu x}^2 + w_{\nu y}^2 + w_{\nu z}^2).$$

Подставим сюда выражения (60) и произведем некоторые преобразования с учетом того, что Ox, Oy, Ox — главные оси инерции и, следовательно,

$$J_{xy} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu x_\nu y_\nu = 0,\ J_{xz} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu x_\nu z_\nu = 0,\ J_{yz} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu y_\nu z_\nu = 0.$$

Если еще в S отбросить несущественные для уравнений Аппеля слагаемые, не зависящие от p, q, r, то получим

$$\begin{aligned} S = {} & \frac{1}{2}\left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu x_\nu^2\right)(\dot r^2 + 2qp\dot r + \dot q^2 - 2pr\dot q) + \\ & + \frac{1}{2}\left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu y_\nu^2\right)(\dot p^2 + 2rq\dot p + \dot r^2 - 2qp\dot r) + \\ & + \frac{1}{2}\left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu z_\nu^2\right)(\dot q^2 + 2pr\dot q + \dot p^2 - 2rq\dot p). \end{aligned}$$

или

$$S = \frac{1}{2}(A\dot p^2 + B\dot q^2 + C\dot r^2) + (C-B)qr\dot p + (A-C)rp\dot q + (B-A)pq\dot r, \tag{61}$$

где A, B, C — моменты инерции тела относительно осей Ox, Oy, Oz соответственно.

Пример 1 (Вывод динамических уравнений Эйлера при помощи уравнений Аппеля). *Пусть M_x, M_y, M_z — проекции момента $\boldsymbol{M}_O$ внешних сил относительно точки O на оси Ox, Oy, Oz. В качестве*

псевдоскоростей примем величины $\dot{\pi}_1 = p$, $\dot{\pi}_2 = q$, $\dot{\pi}_3 = r$. *Для элементарной работы внешних сил имеем выражение*

$$\delta A = \boldsymbol{M}_O \cdot \boldsymbol{\omega}\, dt = M_x p\, dt + M_y q\, dt + M_z r\, dt = M_x \delta\pi_1 + M_y \delta\pi_2 + M_z \delta\pi_3.$$

Поэтому обобщенные силы Π_i, *соответствующие псевдокоординатам* π_i, *вычисляются по формулам*

$$\Pi_1 = M_x, \quad \Pi_2 = M_y, \quad \Pi_3 = M_z. \tag{62}$$

Уравнения (52) *с учетом выражений* (61) *и* (62) *непосредственно приводят к динамическим уравнениям Эйлера* (*см. уравнения* (4) *п.* 97).

Пример 2 (Качение шара по плоскости). *Пусть однородный шар движется по неподвижной горизонтальной плоскости без скольжения. Движение шара отнесем к неподвижной системе координат* $OXYZ$ *с началом в некоторой точке* O *плоскости, ось* OZ *направим вертикально вверх. Пусть* ω_X, ω_Y, ω_Z — *проекции угловой скорости шара на оси* OX, OY, OZ, *а* p, q, r — *проекции того же вектора на оси* Gx, Gy, Gz *жестко связанной с шаром системы координат с началом в центре шара.*

Пусть x, y, z — *координаты центра шара в системе* $OXYZ$; $z = a$, *где* a — *радиус шара. Условие отсутствия скольжения* (*равенство нулю скорости точки* D *шара, которой он касается плоскости*) *приводит к соотношениям*

$$\dot{x} = \omega_Y a, \qquad \dot{y} = -\omega_X a. \tag{63}$$

Момент инерции шара относительно любого диаметра равен $\frac{2}{5}ma^2$, *где* m — *масса шара. Из* (57) *и* (61) *получаем выражение для энергии ускорений:*

$$S = \frac{1}{2}m(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2) + \frac{1}{5}ma^2(\dot{p}^2 + \dot{q}^2 + \dot{r}^2). \tag{64}$$

Введем псевдоскорости по формулам

$$\dot{\pi}_1 = \omega_X, \qquad \dot{\pi}_2 = \omega_Y, \qquad \dot{\pi}_3 = \omega_Z. \tag{65}$$

Из (63) *тогда получим*

$$\ddot{x} = a\ddot{\pi}_2, \qquad \ddot{y} = -a\ddot{\pi}_1. \tag{66}$$

Пусть ε — *угловое ускорение шара. Тогда, замечая, что*

$$\dot{p}^2 + \dot{q}^2 + \dot{r}^2 = \varepsilon^2 = \dot{\omega}_X^2 + \dot{\omega}_Y^2 + \dot{\omega}_Z^2 = \ddot{\pi}_1^2 + \ddot{\pi}_2^2 + \ddot{\pi}_3^2$$

и пользуясь равенствами (66), *получаем из* (64) *такое окончательное выражение для энергии ускорений:*

$$S = \frac{1}{10} m a^2 [7(\ddot{\pi}_1^2 + \ddot{\pi}_2^2) + 2\ddot{\pi}_3^2].$$

Так как обобщенные силы Π_i $(i = 1, 2, 3)$ *равны нулю, то из уравнений Аппеля* $\partial S / \partial \ddot{\pi}_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$ *следует, что* $\ddot{\pi}_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$, *или* $\omega_X = \mathrm{const}$, $\omega_Y = \mathrm{const}$, $\omega_Z = \mathrm{const}$. *Таким образом, из уравнений Аппеля сразу следует, что угловая скорость при движении остается неизменной. Другим способом этот вывод получен в п.* 113.