Глава XI
Интегрирование уравнений динамики

§ 1. Множитель Якоби

161. Множитель системы уравнений. Дифференциальное уравнение для множителя. В данной главе будут получены некоторые общие утверждения, относящиеся к интегрированию уравнений динамики. Сначала рассмотрим нужные в дальнейшем вспомогательные вопросы теории дифференциальных уравнений.

Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_k}{X_k}, \tag{1}$$

где X_i $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k)$ — заданные функции переменных $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k$.

Всякая функция $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k)$, которая постоянна при $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k$, удовлетворяющих системе (1), называется ее *первым интегралом.* Если $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k)$ — первый интеграл, то дифференциал df в силу (1) тождественно равен нулю, т. е.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_k}dx_k = 0$$

в силу уравнений (1). Это означает, что необходимое и достаточное условие того, что функция $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k)$ является первым интегралом, записывается в виде равенства

$$X(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial x_1}X_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}X_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_k}X_k = 0. \tag{2}$$

Обозначение $X(f)$ введено для краткости записи. Очевидно, что если $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_l$ $(l \leqslant k-1)$ — первые интегралы, то и любая функция $F(f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_l)$ тоже будет первым интегралом системы (1). Если известны l независимых первых интегралов

$$f_1 = c_1,\ f_2 = c_2,\ \ldots,\ f_l = c_l \qquad (c_j = \text{const};\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ l), \tag{3}$$

то их можно использовать для понижения порядка системы (1) на l единиц. В самом деле, если $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_l$ независимы, то ранг матрицы

$$\left\|\begin{matrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_l}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_l}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_l}{\partial x_k} \end{matrix}\right\| \tag{4}$$

равен l. Не ограничивая общности, будем тогда считать, что отличен от нуля определитель l-го порядка, составленный из первых l столбцов матрицы (4), т. е. якобиан функций $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_l$ по переменным $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_l$:

$$\frac{\partial(f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_l)}{\partial(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_l)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_l} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_l} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_l}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_l}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_l}{\partial x_l} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{5}$$

При выполнении этого неравенства соотношения (3) можно разрешить относительно величин $x_1, x_2, \ldots, x_l$, в результате чего эти величины выразятся через переменные $x_{l+1}, \ldots, x_k$ и константы $c_1, c_2, \ldots, c_l$. Подставив их в функции $X_{l+1}, \ldots, X_k$ и обозначив получающиеся в результате этой подстановка функции $X^*_{l+1}, \ldots, X^*_k$, где X^*_j $(j = l+1, \ldots, k)$ — функции от $x_{l+1}, \ldots, x_k$ и $c_1, c_2, \ldots, c_l$, мы сведем систему (1) к системе уравнений

$$\frac{dx_{l+1}}{X^*_{l+1}} = \ldots = \frac{dx_k}{X^*_k},$$

порядок которой на l единиц меньше порядка исходной системы (1). Система (1) может иметь только $k-1$ независимых первых интегралов. Если они известны, то соотношения

$$f_1 = c_1,\ f_2 = c_2,\ \ldots,\ f_{k-1} = c_{k-1} \tag{6}$$

дают общий интеграл системы дифференциальных уравнений (1). Всякий же другой интеграл f будет функцией независимых интегралов $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_{k-1}$. Для доказательства этого утверждения надо проверить, что якобиан функций $f,\ f_1,\ \ldots,\ f_{k-1}$ по переменным $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k$ равен нулю:

$$\frac{\partial(f,\ f_1,\ \ldots,\ f_{k-1})}{\partial(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k)} = 0. \tag{7}$$

Действительно, если $f,\ f_1,\ \ldots,\ f_{k-1}$ — первые интегралы, то

$$X(f) = X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + X_k\frac{\partial f}{\partial x_k} = 0,$$
$$X(f_1) = X_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \ldots + X_k\frac{\partial f_1}{\partial x_k} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$X(f_{k-1}) = X_1\frac{\partial f_{k-1}}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial f_{k-1}}{\partial x_2} + \ldots + X_k\frac{\partial f_{k-1}}{\partial x_k} = 0.$$

Эта система k линейных однородных уравнений относительно $X_1, X_2, \ldots, X_k$ должна иметь нетривиальное решение. Следовательно, выполняется равенство (7). Что и требовалось доказать.

Разложив якобиан, стоящий в левой части равенства (7), по элементам первой строки, представим это равенство в виде

$$\Delta_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \Delta_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \Delta_k\frac{\partial f}{\partial x_k} = 0, \tag{8}$$

где Δ_i $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k)$ есть алгебраическое дополнение i-го элемента первой строки якобиана.

Условие (8) означает, что f — функция первых интегралов $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_{k-1}$. Если f — первый интеграл, то выполнено условие (8), а если выполнено (8), то f — функция $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_{k-1}$ и, следовательно, является первым интегралом. Поэтому равенство (8) является необходимым и достаточным условием того, что (при известных первых интегралах $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_{k-1}$) f есть первый интеграл. Последнее означает, что условия (2) и (8) эквивалентны. Поэтому соответствующие коэффициенты при производных $\partial f/\partial x_i$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k)$ в равенствах (2) и (8) пропорциональны, т. е. существует функция $M(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_k)$ такая, что

$$\Delta_i = MX_i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k). \tag{9}$$

Функция M называется *множителем Якоби* или просто *множителем* системы уравнений (1).

В равенство (9) входят интегралы $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_{k-1}$. Однако можно получить дифференциальное уравнение для M, которое не содержит $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_{k-1}$. Покажем, что множитель M удовлетворяет линейному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial(MX_1)}{\partial x_1}+\frac{\partial(MX_2)}{\partial x_2}+\ldots+\frac{\partial(MX_k)}{\partial x_k}=0. \tag{10}$$

В самом деле, если в соответствии с (9) вместо величин MX_i $(i=1,\ 2,\ldots,\ k)$ подставить в (10) их выражения Δ_i, то после проведения содержащихся в (10) дифференцирований получим, что левая часть равенства (10) представляет собой совокупность слагаемых, каждое из которых есть произведение производной второго порядка вида $\partial^2 f_s/\partial x_i\partial x_j$ $(i\neq j)$ на $k-2$ частных производных первого порядка. Поэтому, чтобы показать справедливость равенства (10), достаточно убедиться в том, что его левая часть не содержит ни одной производной второго порядка. Возьмем, например, производную $\partial^2 f_1/\partial x_1\partial x_2$. Она содержится в двух слагаемых. В одном слагаемом при $\partial^2 f_1/\partial x_1\partial x_2$ будет коэффициент при $\partial f_1/\partial x_2$ в Δ_1, т. е. определитель

$$\frac{\partial(f_2,\ f_3,\ \ldots,\ f_{k-1})}{\partial(x_3,\ x_4,\ \ldots,\ x_k)}, \tag{11}$$

а во втором — коэффициент при $\partial f_1/\partial x_1$ в Δ_2, т. е. определитель (11), взятый с противоположным знаком. Следовательно, сумма упомянутых слагаемых равна нулю. То же самое справедливо и для остальных слагаемых.

Любое решение уравнения (10) принято называть *множителем.* Справедливо следующее утверждение: *частное двух множителей является первым интегралом системы* (1).

В самом деле, пусть M_1 и M_2 — множители, т. е. решения уравнения (10). Тогда справедливы равенства

$$\sum_{i=1}^{k}\left(M_1\frac{\partial X_i}{\partial x_i}+X_i\frac{\partial M_1}{\partial x_i}\right)=0, \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{k}\left(M_2\frac{\partial X_i}{\partial x_i}+X_i\frac{\partial M_2}{\partial x_i}\right)=0. \tag{13}$$

Умножив первое из этих равенств на $-M_2$, а второе на M_1 и сложив результаты, получим

$$\sum_{i=1}^{k}X_i\left(M_1\frac{\partial M_2}{\partial x_i}-M_2\frac{\partial M_1}{\partial x_i}\right)=M_1^2\sum_{i=1}^{k}X_i\frac{\partial\left(\frac{M_2}{M_1}\right)}{\partial x_i}=M_1^2X\left(\frac{M_2}{M_1}\right)=0.$$

Следовательно, M_2/M_1 действительно является первым интегралом. Верно и обратное: *произведение какого-либо множителя на первый интеграл системы уравнений* (1) *также является множителем.* В этом легко убедиться непосредственной проверкой.

Для дальнейшего приложения теории множителя к уравнениям динамики важно заметить, что из (10) следует, что если $\sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{\partial X_i}{\partial x_i} = 0$, то $M = 1$ является множителем.

162. Инвариантность множителя. Последний множитель Якоби. Сделаем в системе уравнений (1) замену переменных, введя вместо $x_1, x_2, \ldots, x_k$ переменные $y_1, y_2, \ldots, y_k$ по формулам

$$x_i = x_i(y_1, y_2, \ldots, y_k) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k). \tag{14}$$

Будем считать, что якобиан

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_k)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_k)} \tag{15}$$

отличен от нуля. Тогда замена переменных (14) является обратимой. Для получения преобразованной системы уравнений введем вспомогательную переменную t так, чтобы каждое из отношений dx_i/X_i равнялось ее дифференциалу dt. Тогда система (1) запишется так:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_k) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k). \tag{16}$$

Рассматривая каждую из величин y_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ как сложную функцию t: $y_i(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t))$, имеем

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial y_i}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} X_j = X(y_i).$$

Выраженную через $y_1, y_2, \ldots, y_k$ величину $X(y_i)$ обозначим Y_i. Тогда в новых переменных система уравнений (1) будет такой:

$$\frac{dy_1}{Y_1} = \frac{dy_2}{Y_2} = \ldots = \frac{dy_k}{Y_k}. \tag{17}$$

Отметим, что выражение $X(f)$ инвариантно в том смысле, что

$$X(f) = \sum_{j=1}^{k} Y_j \frac{\partial f}{\partial y_j} = Y(f). \tag{18}$$

В самом деле,

$$X(f)=\sum_{i=1}^{k}X_i\frac{\partial f}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{k}X_i\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial f}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right)=$$
$$=\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{k}X_i\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial f}{\partial y_j}=\sum_{j=1}^{k}Y_j\frac{\partial f}{\partial y_j}=Y(f).$$

Равенство (18) показывает, в частности, что интеграл исходной системы уравнений (1), будучи записанным в новых переменных, является интегралом преобразованной системы (17).

Пусть $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_{k-1}$ — независимые первые интегралы системы (1) и f — произвольная функция, а M_0 — какой-либо множитель, удовлетворяющий тождеству[1]

$$M_0X(f)=\frac{\partial(f,\ f_1,\ \ldots,\ f_{k-1})}{\partial(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k)}. \tag{19}$$

Умножив обе части этого тождества на определитель (15), получим

$$M_0\frac{\partial(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k)}{\partial(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_k)}X(f)=\frac{\partial(f,\ f_1,\ \ldots,\ f_{k-1})}{\partial(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k)}\frac{\partial(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k)}{\partial(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_k)}.$$

Если воспользоваться инвариантностью выражения $X(f)$ и правилом умножения функциональных определителей[2], то последнее равенство можно записать так:

$$M_0\frac{\partial(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k)}{\partial(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_k)}Y(f)=\frac{\partial(f,\ f_1,\ \ldots,\ f_{k-1})}{\partial(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_k)}.$$

Отсюда следует, что функция

$$M_0^*=M_0\frac{\partial(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k)}{\partial(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_k)} \tag{20}$$

является множителем преобразованной системы уравнений (17). Пусть теперь M — произвольный множитель, т. е. какое-либо решение уравнения в частных производных (10), а M_0 — множитель из тождества (19). Согласно п. 160,

$$M=M_0F,$$

[1]См. определение множителя системы уравнений (1) при помощи равенств (2), (7)–(9).

[2]См. гл. 3 книги: Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 1, ч. 1, М.; Л.: ГТТИ, 1933.

где F — первый интеграл системы уравнений (1) (а также и системы (17)). Умножив обе части этого равенства на определитель (15) и воспользовавшись формулой (20), получим

$$M\frac{\partial(x_1,\, x_2,\, \ldots\, ,\, x_k)}{\partial(y_1,\, y_2,\, \ldots\, ,\, y_k)} = M_0\frac{\partial(x_1,\, x_2,\, \ldots\, ,\, x_k)}{\partial(y_1,\, y_2,\, \ldots\, ,\, y_k)}F = M_0^*F. \tag{21}$$

Но мы показали, что M_0^* — множитель для переменных $y_1,\, y_2,\, \ldots\, ,\, y_k$. А так как F — первый интеграл, то, согласно п. 161, функция M_0^*F также является множителем.

Таким образом, мы доказали теорему об инвариантности множителя: *если M — множитель для переменных $x_1, x_2, \ldots , x_k$, то его произведение на якобиан* (15) *есть множитель для новых переменных $y_1, y_2, \ldots , y_k$.*

Свойство инвариантности является основным для практического применения теории множителя. Предположим, что известны $k-2$ независимых первых интеграла системы дифференциальных уравнений (1)

$$f_j = c_j \quad (c_j = \text{const};\ j = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ k-2),$$

т. е. для получения общего интеграла недостает одного первого интеграла.

Введем новые переменные $y_1,\, y_2,\, \ldots\, ,\, y_k$ по формулам

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = f_1, \ldots , \quad y_k = f_{k-2}.$$

Тогда при $i \geqslant 3$ $\;Y_i = X(y_i)$ и в новых переменных система уравнений (1) станет такой:

$$\frac{dy_1}{Y_1} = \frac{dy_2}{Y_2} = \frac{dy_3}{0} = \ldots = \frac{dy_k}{0}, \tag{22}$$

т. е. сводится к одному уравнению

$$Y_2dy_1 - Y_1dy_2 = 0, \tag{23}$$

в котором $y_3, \ldots , y_k$ рассматриваются как постоянные.

Если бы был известен множитель M для переменных $x_1, x_2, \ldots , x_k$, то, согласно теореме об инвариантности множителя, функция

$$M^* = M\frac{\partial(x_1,\, x_2,\, \ldots\, ,\, x_k)}{\partial(y_1,\, y_2,\, \ldots\, ,\, y_k)} \tag{24}$$

была бы множителем для переменных $y_1,\, y_2,\, \ldots\, ,\, y_k$, т. е. удовлетворяла бы уравнению

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial(M^*Y_i)}{\partial y_i} = 0,$$

которое с учетом того, что $Y_i = 0$ при $i \geqslant 3$, имеет вид

$$\frac{\partial(M^*Y_1)}{\partial y_1} + \frac{\partial(M^*Y_2)}{\partial y_2} = 0. \tag{25}$$

Последнее равенство означает, что функция M^* является интегрирующим множителем Эйлера для уравнения (23), т. е. выражение $M^*(Y_2 dy_1 - Y_1 dy_2)$ будет полным дифференциалом. Следовательно, недостающий первый интеграл может быть записан в виде

$$\int M^*(Y_2 dy_1 - Y_1 dy_2) = \text{const}.$$

Функция M^* носит название *последнего множителя*, или *последнего множителя Якоби.*

Таким образом, если для системы (1) известен какой-либо множитель, то ее интегрирование требует нахождения не $k-1$, а лишь $k-2$ независимых первых интегралов. Нахождение последнего недостающего интеграла сводится к квадратуре.

Пример 1 (Качение неоднородного шара по плоскости[1]). *Рассмотрим движение шара по неподвижной горизонтальной плоскости. Шар считаем неоднородным, его центр масс совпадает с геометрическим центром, движение происходит без скольжения.*

Движение отнесем к системе $Gxyz$, образованной главными центральными осями инерции. Пусть a — радиус, A, B, C — моменты инерции относительно осей Gx, Gy, Gz, а m — масса шара. Если $\boldsymbol{v}' = (v_x,\ v_y,\ v_z)$ — скорость центра шара, а $\boldsymbol{\omega}' = (p,\ q,\ r)$ — угловая скорость, $\boldsymbol{n}' = (\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3)$ — единичный вектор, направленный вертикально вверх, то условие отсутствия скольжения (*равенство нулю абсолютной скорости точки D шара, которой он касается плоскости*) *запишется в виде*

$$\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{n}. \tag{26}$$

Уравнение движения шара получим в форме уравнений Аппеля. Энергия ускорений вычисляется по формуле (см. п. 159, 160)

$$\begin{gathered} S = \frac{1}{2}mw^2 + \frac{1}{2}(A\dot{p}^2 + B\dot{q}^2 + C\dot{r}^2) + \\ + (C-B)qr\dot{p} + (A-C)rp\dot{q} + (B-A)pq\dot{r}, \end{gathered} \tag{27}$$

[1] Эта задача решена С. А. Чаплыгиным в его работе «О катании шара по горизонтальной плоскости» (см.: Чаплыгин С. А. Собр. соч. Т. 1, М.; Л.: Гостехиздат, 1948.— С. 76–101).

где $\boldsymbol{w}' = (w_x,\ w_y,\ w_z)$ — *ускорение центра шара. Из* (26) *получаем*

$$\boldsymbol{w} = a[\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{n} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{n})]$$

или

$$\begin{aligned} w_x &= a[\dot{q}\gamma_3 - \dot{r}\gamma_2 + q\dot{\gamma}_3 - r\dot{\gamma}_2 + p\omega_n - \gamma_1\omega^2], \\ w_y &= a[\dot{r}\gamma_1 - \dot{p}\gamma_3 + r\dot{\gamma}_1 - p\dot{\gamma}_3 + q\omega_n - \gamma_2\omega^2], \\ w_z &= a[\dot{p}\gamma_2 - \dot{q}\gamma_1 + p\dot{\gamma}_2 - q\dot{\gamma}_1 + r\omega_n - \gamma_3\omega^2]. \end{aligned} \tag{28}$$

Здесь $\omega_n = p\gamma_1 + q\gamma_2 + r\gamma_3$ — *проекция вектора* $\boldsymbol{\omega}$ *на вертикаль.*

Принимая величины $p,\ q,\ r$ *за псевдоскорости* $\dot{\pi}_1,\ \dot{\pi}_2,\ \dot{\pi}_3$ *и замечая, что обобщенные силы* $\Pi_1,\ \Pi_2,\ \Pi_3$ *равняются нулю, из уравнений Аппеля получаем*

$$\begin{aligned} A_1\dot{p} + (A_3 - A_2)qr &= ma^2\gamma_1(\dot{p}\gamma_1 + \dot{q}\gamma_2 + \dot{r}\gamma_3), \\ A_2\dot{q} + (A_1 - A_3)rp &= ma^2\gamma_2(\dot{p}\gamma_1 + \dot{q}\gamma_2 + \dot{r}\gamma_3), \\ A_3\dot{r} + (A_2 - A_1)pq &= ma^2\gamma_3(\dot{p}\gamma_1 + \dot{q}\gamma_2 + \dot{r}\gamma_3), \end{aligned} \tag{29}$$

где $A_1 = A + ma^2,\ A_2 = B + ma^2,\ A_3 = C + ma^2$.

Уравнения (29) *совместно с уравнениями Пуассона* (см. п. 114)

$$\dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2 \tag{30}$$

образуют замкнутую систему уравнений, описывающую движение шара относительно его центра масс. Если она проинтегрирована, то траектория центра масс находится из уравнений (26) *при помощи квадратур. Покажем, что интегрирование системы уравнений* (29), (30) *сводится к квадратурам.*

Уравнения (29), (30) *имеют интеграл энергии*

$$\frac{1}{2}(A_1p^2 + A_2q^2 + A_3r^2) - \frac{1}{2}ma^2\omega_n^2 = h = \text{const}. \tag{31}$$

Интегралами будут также величина вектора кинетического момента шара относительно точки D *касания его с плоскостью*

$$(A_1p - ma^2\gamma_1\omega_n)^2 + (A_2q - ma^2\gamma_2\omega_n)^2 + (A_3r - ma^2\gamma_3\omega_n)^2 = \text{const} \tag{32}$$

и проекция этого вектора на вертикаль

$$A_1p\gamma_1 + A_2q\gamma_2 + A_3r\gamma_3 - ma^2\omega_n = \text{const}. \tag{33}$$

Кроме того, существует очевидный геометрический интеграл

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1. \tag{34}$$

Интеграл (31) *следует из теоремы об изменении кинетической энергии* (*см. п.* 88; *левая часть* (31) *есть кинетическая энергия шара: она постоянна, так как работа внешних сил, приложенных к шару, равна нулю*). *Существование интегралов* (32) *и* (33) *следует из теоремы об изменении кинетического момента в ее общей форме* (*см. формулу* (7) *п.* 87). *Действительно, момент внешних сил* (*силы тяжести и реакции плоскости*) *относительно точки касания шара и плоскости равен нулю. А так как скорость «геометрической точки», которая «вычерчивает след» шара на плоскости, очевидно, равна скорости центра масс шара, то из теоремы об изменении кинетического момента следует, что кинетический момент* $\boldsymbol{K}_D$ *шара относительно точки касания остается во все время движения неизменным. Но, воспользовавшись формулой* (4) *п.* 81, *легко получить, что*

$$\boldsymbol{K}_D' = (A_1 p - ma^2\gamma_1\omega_n,\ A_2 q - ma^2\gamma_2\omega_n,\ A_3 r - ma^2\gamma_3\omega_n).$$

Отсюда и следуют интегралы (32) *и* (33). *В существовании упомянутых интегралов можно убедиться и непосредственно, вычислив полные производные по времени от правых частей равенств* (31)–(33) *в силу уравнений движения* (29), (30) *и убедившись, что эти производные тождественно равны нулю.*

Указанных четырех интегралов достаточно, чтобы интегрирование системы (29), (30) *можно было свести к квадратурам. Чтобы в этом убедиться, достаточно найти множитель Якоби* M. *Разрешив уравнения* (29) *относительно производных, получим*

$$\begin{aligned}
\dot p &= \frac{1}{A_1}[(A_2 - A_3)qr + \gamma_1\varphi],\\
\dot q &= \frac{1}{A_2}[(A_3 - A_1)rp + \gamma_2\varphi],\\
\dot r &= \frac{1}{A_3}[(A_1 - A_2)pq + \gamma_3\varphi],
\end{aligned} \tag{35}$$

где

$$\varphi = \frac{1}{f}\left(\frac{A_2 - A_3}{A_1}\gamma_1 qr + \frac{A_3 - A_1}{A_2}\gamma_2 rp + \frac{A_1 - A_2}{A_3}\gamma_3 pq\right), \tag{36}$$

$$f = \frac{1}{ma^2} - \left(\frac{\gamma_1^2}{A_1} + \frac{\gamma_2^2}{A_2} + \frac{\gamma_3^2}{A_3}\right). \tag{37}$$

Множитель M удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial p}(M\dot{p})+\frac{\partial}{\partial q}(M\dot{q})+\frac{\partial}{\partial r}(M\dot{r})+\frac{\partial}{\partial \gamma_1}(M\dot{\gamma}_1)+\frac{\partial}{\partial \gamma_2}(M\dot{\gamma}_2)+\frac{\partial}{\partial \gamma_3}(M\dot{\gamma}_3)=0,$$

где $\dot{p}$, $\dot{q}$, $\dot{r}$, $\dot{\gamma}_1$, $\dot{\gamma}_2$, $\dot{\gamma}_3$ *— правые части уравнений* (35) *и* (30)*. Учитывая* (30)*, уравнение для множителя можно преобразовать к такой форме:*

$$\dot{M}+M\left(\frac{\partial \dot{p}}{\partial p}+\frac{\partial \dot{q}}{\partial q}+\frac{\partial \dot{r}}{\partial r}\right)=0. \tag{38}$$

Подставив в выражение, стоящее в скобках, правые части уравнений (35) *и произведя необходимые дифференцирования, получим уравнение* (38) *в виде*

$$f\dot{M}+M\left(\frac{r\gamma_2-q\gamma_3}{A_1}\gamma_1+\frac{p\gamma_3-r\gamma_1}{A_2}\gamma_2+\frac{q\gamma_1-p\gamma_2}{A_3}\gamma_3\right)=0.$$

Учитывая (30) *и* (37)*, имеем окончательно*

$$2f\dot{M}-M\dot{f}=0.$$

Интегрирование этого уравнения дает такое выражение для множителя: $M=c\sqrt{f}$ (*c — произвольная постоянная*)*. Из теории последнего множителя Якоби следует теперь, что интегрирование систем дифференциальных уравнений* (29)*,* (30) *сводится к квадратурам.*

Упражнение 1. *Показать, что для построения общего интеграла уравнений* (32), (35) *п.* 105 *помимо трех интегралов* (36), (37) *и* (38) *достаточно найти еще только один первый интеграл.*

163. Приложение теории множителя к каноническим уравнениям. Пусть движение материальной системы описывается каноническими уравнениями Гамильтона:

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\quad (i=1,\,2,\,\ldots,\,n). \tag{39}$$

В симметричной форме эта система уравнений запишется в виде

$$\frac{dq_1}{\dfrac{\partial H}{\partial p_1}}=\ldots=\frac{dq_n}{\dfrac{\partial H}{\partial p_n}}=\frac{dp_1}{-\dfrac{\partial H}{\partial q_1}}=\ldots=\frac{dp_n}{-\dfrac{\partial H}{\partial q_n}}=\frac{dt}{1}. \tag{40}$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial H}{\partial p_1}\right)+\ldots+\frac{\partial}{\partial q_n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_n}\right)+\frac{\partial}{\partial p_1}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_1}\right)+\ldots+$$
$$+\frac{\partial}{\partial p_n}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_n}\right)+\frac{\partial(1)}{\partial t}=0,$$

то для канонической системы уравнений существует множитель $M = 1$ (см. замечание в конце п. 161).

Так как для системы (39) множитель известен, то для построения ее общего интеграла достаточно знать не $2n$, а $2n-1$ первых интегралов. Построение $2n$-го интеграла сводится к квадратуре.

Отметим еще одну возможность упрощения задачи интегрирования канонической системы уравнений. Пусть функция Гамильтона H не зависит явно от времени. Тогда, отбрасывая в уравнениях (40) последнюю дробь, содержащую dt, получим систему из $2n-1$ уравнений, которая по-прежнему имеет множитель $M = 1$. Поэтому для построения ее общего интеграла достаточно знать $2n-2$ первых интеграла. Но так как в рассматриваемом случае материальная система является обобщенно консервативной, то один интеграл нам известен заранее. Это обобщенный интеграл энергии $H = h = \text{const}$ (см. п. 151). Поэтому для построения общего интеграла достаточно знать еще $2n-3$ первых интеграла. Если, например, $n = 2$, то кроме интеграла энергии $H = h$ достаточно найти еще только один первый интеграл.

Пример 1 (Ограниченная задача трех тел (см. п. 124)). *Пусть точка P малой массы движется под действием притяжения двух точек S и J конечных масс, не оказывая влияния на движение последних. Будем считать, что точка J движется относительно точки S по круговой орбите, а точка P движется в плоскости этой орбиты* (*т. е. рассматривается так называемая плоская круговая ограниченная задача трех тел*).

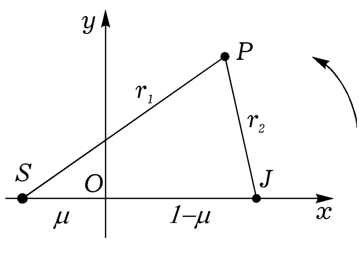

Рис. 138

Выберем единицы измерения так, чтобы сумма масс точек S и J, неизменное расстояние между ними и период их обращения по орбитам равнялись единице. Пусть m — масса точки P, а $1-\mu$ и μ — массы точек S и J соответственно.

Движение точки P будем рассматривать во вращающейся системе координат Oxy с началом в центре масс точек S и J и осью Ox, направленной на точку J (рис. 138). *Обозначая x, y координаты точ-*

ки P и применяя теорему о сложении скоростей (п. 31), *получаем для проекций абсолютной скорости точки P следующие выражения:*

$$v_x = \dot{x} - y, \quad v_y = \dot{y} + x.$$

Кинетическая энергия точки P вычисляется по формуле

$$T = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) = T_2 + T_1 + T_0, \tag{41}$$

где

$$T_2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad T_1 = m(x\dot{y} - \dot{x}y), \quad T_0 = \frac{1}{2}m(x^2 + y^2). \tag{42}$$

Потенциальная энергия точки P определяется выражением

$$\Pi = -m\frac{1-\mu}{r_1} - m\frac{\mu}{r_2}, \quad r_1^2 = (x+\mu)^2 + y^2, \quad r_2^2 = (x - 1 + \mu)^2 + y^2. \tag{43}$$

Уравнения движения точки P могут быть записаны в форме канонических уравнений Гамильтона. Функция Гамильтона явно от времени не зависит, поэтому существует обобщенный интеграл энергии — интеграл Якоби:

$$T_2 - T_0 + \Pi = h = \text{const}. \tag{44}$$

Так как число степеней свободы $n = 2$, то для построения общего интеграла недостает одного первого интеграла.

§ 2. Системы с циклическими координатами

164. Циклические координаты. Крайне важным источником упрощения интегрирования дифференциальных уравнении движения является наличие циклических координат. Рассмотрим этот вопрос для голономных систем, движущихся в потенциальном поле сил. Пусть система имеет n степеней свободы, а $q_1, q_2, \dots, q_n$ — ее обобщенные координаты. Координата q_α называется циклической, если она не входит в функцию Лагранжа, т. е. если $\partial L/\partial q_\alpha = 0$ [1].

[1] Как следует из п. 148, 153, $\dfrac{\partial L}{\partial q_\alpha} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha} = -\dfrac{\partial R}{\partial q_\alpha}$, поэтому если координата циклическая, то она не входит также и в функции Гамильтона и Рауса; верно и обратное.