ки P и применяя теорему о сложении скоростей (п. 31), *получаем для проекций абсолютной скорости точки P следующие выражения:*

$$v_x = \dot{x} - y, \quad v_y = \dot{y} + x.$$

Кинетическая энергия точки P вычисляется по формуле

$$T = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) = T_2 + T_1 + T_0, \tag{41}$$

где

$$T_2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad T_1 = m(x\dot{y} - \dot{x}y), \quad T_0 = \frac{1}{2}m(x^2 + y^2). \tag{42}$$

Потенциальная энергия точки P определяется выражением

$$\Pi = -m\frac{1-\mu}{r_1} - m\frac{\mu}{r_2}, \quad r_1^2 = (x+\mu)^2 + y^2, \quad r_2^2 = (x-1+\mu)^2 + y^2. \tag{43}$$

Уравнения движения точки P могут быть записаны в форме канонических уравнений Гамильтона. Функция Гамильтона явно от времени не зависит, поэтому существует обобщенный интеграл энергии — интеграл Якоби:

$$T_2 - T_0 + \Pi = h = \text{const}. \tag{44}$$

Так как число степеней свободы $n = 2$, то для построения общего интеграла недостает одного первого интеграла.

§ 2. Системы с циклическими координатами

164. Циклические координаты. Крайне важным источником упрощения интегрирования дифференциальных уравнении движения является наличие циклических координат. Рассмотрим этот вопрос для голономных систем, движущихся в потенциальном поле сил. Пусть система имеет n степеней свободы, а $q_1, q_2, \ldots, q_n$ — ее обобщенные координаты. Координата q_α называется циклической, если она не входит в функцию Лагранжа, т. е. если $\partial L/\partial q_\alpha = 0$ [1].

[1] Как следует из п. 148, 153, $\dfrac{\partial L}{\partial q_\alpha} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha} = -\dfrac{\partial R}{\partial q_\alpha}$, поэтому если координата циклическая, то она не входит также и в функции Гамильтона и Рауса; верно и обратное.

Теорема. *Пусть q_α — циклическая координата. Тогда соответствующий ей импульс — первый интеграл: $p_\alpha = c_\alpha = \mathrm{const}$, при этом изменение остальных координат со временем такое же, как в системе с $n-1$ степенью свободы, в которой c_α играет роль параметра.*

Доказательство.

Доказательство проще всего провести, используя гамильтонову форму уравнений движения

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1,\, 2,\, \ldots\, ,\, n), \tag{1}$$

где $H = H(q_1, \ldots , q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1}, \ldots , q_n, p_1, \ldots , p_{\alpha-1}, p_\alpha, p_{\alpha+1}, \ldots , p_n, t)$. Если в (1) $i = \alpha$, то $\partial H/\partial q_\alpha = 0$ и $dp_\alpha/dt = 0$. Поэтому $p_\alpha = c_\alpha = \mathrm{const}$. Положив в (1) $p_\alpha = c_\alpha$, придем к системе уравнений $(2n-2)$-го порядка

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1,\ 2, \ldots\, ,\ n;\ i \neq \alpha), \tag{2}$$

в которой $H = H(q_1, \ldots, q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1}, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_{\alpha-1}, c_\alpha, p_{\alpha+1}, \ldots, p_n, t)$.

Интегрирование уравнений (2) дает

$$q_i = q_i(t,\ c_\alpha,\ c_1, \ldots\, ,\ c_{2n-2}), \quad p_i = p_i(t,\ c_\alpha,\ c_1, \ldots\, ,\ c_{2n-2}), \tag{3}$$

где $c_1, \ldots\, ,\ c_{2n-2}$ — произвольные постоянные. Зависимость циклической координаты q_α от времени определяется одним из уравнений системы (1)

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \tag{4}$$

в котором правая часть выражена через t и $2n-1$ постоянных $c_\alpha, c_1, \ldots\, , c_{2n-2}$ при помощи подстановки в нее функций (3). Интегрирование уравнения (4) дает

$$q_\alpha = \int \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\, dt + c,$$

где с — $2n$-я произвольная постоянная.

Аналогично, если не одна, а l обобщенных координат являются циклическими, то первыми интегралами будут l обобщенных импульсов и порядок системы дифференциальных уравнений (1) может быть понижен на $2l$ единиц.

165. Понижение порядка системы дифференциальных уравнений движения при помощи уравнений Рауса. Пусть q_α

$(\alpha = k+1, \dots, n)$ — циклические координаты. Тогда имеем $n-k$ первых интегралов

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha} = c_\alpha = \text{const} \quad (\alpha = k+1, \dots, n). \tag{5}$$

Пусть гессиан функции Лагранжа по переменным $\dot q_\alpha$ отличен от нуля:

$$\det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot q_\alpha \partial \dot q_\beta} \right\|_{\alpha,\beta=k+1}^{n} \neq 0. \tag{6}$$

Составим функцию Рауса (п. 153)

$$R = \sum_{\alpha=k+1}^{n} c_\alpha \dot q_\alpha - L, \tag{7}$$

где $\dot q_\alpha$ выражены через q_i, $\dot q_i$, c_α и t $(i = 1, 2, \dots, k;\ \alpha = k+1, \dots, n)$ из уравнений (5)[1]. Функция Рауса не содержит обобщенных скоростей, отвечающих циклическим координатам:

$$R = R(q_i,\ \dot q_i,\ c_\alpha,\ t) \quad (i = 1,\ 2, \dots,\ k;,\ \alpha = k+1, \dots,\ n). \tag{8}$$

Поэтому часть системы уравнений Рауса

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1,\ 2, \dots,\ k) \tag{9}$$

описывает изменение нециклических координат со временем и может интегрироваться независимо от другой ее части

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial R}{\partial c_\alpha}, \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = 0 \quad (\alpha = k+1, \dots,\ n), \tag{10}$$

соответствующей циклическим координатам.

Проинтегрировав систему уравнений (9), имеющую порядок $2k$, получим

$$q_i = q_i(t,\ c_\alpha,\ c_1,\ c_1', \dots,\ c_k,\ c_k') \quad (i = 1, 2, \dots, k), \tag{11}$$

где c_i, c_i' $(i = 1,\ 2, \dots,\ k)$ — произвольные постоянные. Затем из первых $n-k$ уравнений системы (10) находим зависимости циклических координат от времени

$$q_\alpha = \int \frac{\partial R}{\partial c_\alpha}\, dt + c_\alpha' \quad (\alpha = k+1, \dots,\ n), \tag{12}$$

[1] При выполнении условия (6) уравнения (5) разрешимы относительно $\dot q_\alpha$.

где в функции $\partial R/\partial c_\alpha$ величины q_i заменены на их выражения (11).

Описанная в п. 164, 165 процедура понижения порядка системы дифференциальных уравнений движения является одним из наиболее эффективных и практически важных способов, применяемых при интегрировании уравнений движения. Всякая симметрия задачи, допускающая такой выбор обобщенных координат, чтобы некоторые из них q_α были циклическими, приводит к существованию первых интегралов $p_\alpha = \text{const}$ и, как мы видели, позволяет свести исследование движения к рассмотрению системы с меньшим числом обобщенных координат. Для обобщенно консервативных систем с двумя степенями свободы наличие одной циклической координаты позволяет свести интегрирование уравнений движения к квадратурам (см. п. 164).

Пример 1 (Движение сферического маятника). *Сферический маятник* (*см. пример* 2 *п.* 138) *имеет две степени свободы. Если за обобщенные координаты принять углы θ и φ* (рис. 134), *то для кинетической и потенциальной энергии будем иметь выражения*

$$T = \frac{1}{2}ml^2(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\dot\varphi^2), \quad \Pi = mgl\cos\theta.$$

Так как функция Лагранжа

$$L = \mathrm{T} - \Pi = \frac{1}{2}ml^2(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\dot\varphi^2) - mgl\cos\theta$$

не содержит φ, то эта обобщенная координата циклическая. Ей соответствует первый интеграл

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = ml^2\sin^2\theta\dot\varphi = ml^2\omega_0\alpha, \tag{13}$$

где α — произвольная безразмерная постоянная; обозначение $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ введено для удобства.

Так как из (13) *следует, что*

$$\dot\varphi = \frac{\omega_0}{\sin^2\theta}\alpha, \tag{14}$$

то для функции Рауса

$$R = p_\varphi\dot\varphi - L$$

получаем выражение

$$R = -\frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}\frac{ml^2\omega_0^2\alpha^2}{\sin^2\theta} + mgl\cos\theta. \tag{15}$$

Уравнения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot\theta} - \frac{\partial R}{\partial \theta} = 0$$

отвечают системе с одной степенью свободы, которой соответствуют кинетическая и потенциальная энергия, определяемые равенствами

$$T^* = \frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2, \quad \Pi^* = mgl\cos\theta + \frac{1}{2}\frac{ml^2\omega_0^2\alpha^2}{\sin^2\theta}.$$

Эта система называется приведенной системой, а функция Π^* *— приведенным потенциалом, или потенциалом Рауса.*

Приведенная система имеет интеграл энергии

$$\frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2 + mgl\cos\theta + \frac{1}{2}\frac{ml^2\omega_0^2\alpha^2}{\sin^2\theta} = \frac{1}{2}ml^2\omega_0^2\beta, \tag{16}$$

где β *— безразмерная постоянная.*

Введем обозначение $u = \cos\theta$*. Тогда* $\dot u = -\sin\theta\dot\theta$ *и из* (16) *следует, что*

$$\frac{1}{\omega_0^2}\dot u^2 = G(u), \tag{17}$$

где $G(u)$ *— многочлен третьей степени,*

$$G(u) = (1-u^2)(\beta - 2u) - \alpha^2, \tag{18}$$

который можно также записать в форме

$$G(u) = 2(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3), \tag{19}$$

где u_1, u_2, u_3 *— корни уравнения* $G(u) = 0$.

Заметим, что $G(+\infty) = +\infty$, $G(\pm 1) = -\alpha^2 < 0$ *(если* $\alpha \neq 0$*),* $G(-\infty) = -\infty$*. Так как* $G(u)$ *— непрерывная функция, то хотя бы один из корней, например* u_3*, должен быть не меньше единицы. Но на отрезке* $-1 \leqslant u \leqslant +1$ *должны быть значения* u*, при которых функция* $G(u)$ *положительна или хотя бы обращается в нуль, так как в противном случае равенство* (17) *невозможно для действительных значений* u*. Величина же* u *обязательно должна быть действительной, так как движение маятника,безусловно, физически существует. Отсюда следует, что функция* $G(u)$ *имеет ровно два вещественных корня* u_1, u_2 *на отрезке* $-1 \leqslant u \leqslant +1$ *и один корень* $u_3 \geqslant 1$*. График функции* $G(u)$ *должен быть таким, как показано на рис.* 139.

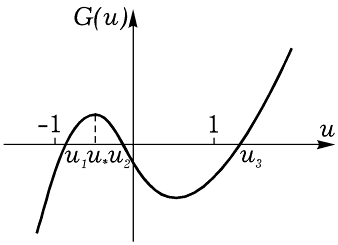

Рис. 139

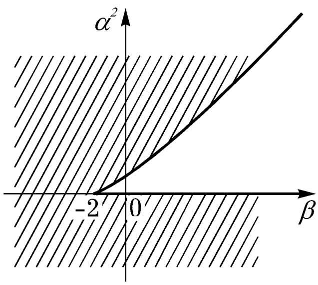

Рис. 140

Так как для реального движения $G(u) \geqslant 0$, *то интересующий нас интервал изменения* u *определяется неравенством* $u_1 \leqslant u \leqslant u_2$. *Ему соответствует область изменения угла* θ: $\theta_2 \leqslant \theta \leqslant \theta_1$, *отвечающая реальному движению маятника.*

Рассмотрим движение, отвечающее различным значениям постоянных α *и* β. *Сразу отметим, что из условий* $G(u) \geqslant 0$ *и* $-1 \leqslant u \leqslant +1$ *следует, что величина* β *не может быть совсем произвольной, а должна удовлетворять неравенству* $\beta \geqslant -2$. *Если* $\beta = -2$, *то постоянная* α *может быть только равной нулю, что соответствует положению равновесия маятника, когда он занимает вертикальное положение* ($u = -1$, *т. е.* $\theta = \pi$).

Функция $G(u)$ *имеет максимум в точке*

$$u = u_* = \frac{1}{6}(\beta - \sqrt{\beta^2 + 12}), \tag{20}$$

причем

$$G(u_*) = f(\beta) - \alpha^2,$$

где

$$f(\beta) = \frac{1}{54}[(\beta^2 + 12)^{3/2} + 36\beta - \beta^3]. \tag{21}$$

Для реального движения необходимо, чтобы выполнялось неравенство $G(u_*) \geqslant 0$, *т. е. чтобы*

$$0 \leqslant \alpha^2 \leqslant f(\beta). \tag{22}$$

На рис. 140 *значения параметров* α, β, *удовлетворяющие неравенству* (22), *соответствуют точкам, лежащим в незаштрихованной области плоскости или на ее границе. Верхняя граница области задается уравнением* $\alpha^2 = f(\beta)$; *она касается оси* $O\beta$ *в точке* $(-2,\ 0)$, *а при* $\beta \to \infty$ *имеет асимптоту* $\alpha^2 = \beta$.

Для классификации движения маятника рассмотрим последовательно три возможных случая.

1) $\alpha = 0$. *Из* (14) *следует, что в этом случае* $\varphi = \varphi_0 = \mathrm{const}$, *и мы приходим к задаче о движении математического маятника в плоскости* $\varphi = \varphi_0$. *Эта задача подробно изучена в п.* 93–96.

2) $0 < \alpha^2 < f(\beta)$. *В этом случае угол* θ *изменяется в промежутке* $\theta_2 \leqslant \theta \leqslant \theta_1$. *На сфере радиусом* l *с центром в точке подвеса маятника значения* $\theta = \theta_1$ *и* $\theta = \theta_2$ *выделяют два круга, лежащих в параллельных плоскостях* $z = z_1 = l\cos\theta_1$ *и* $z = z_2 = l\cos\theta_2$. *Материальная точка, закрепленная на конце стержня, движется по сфере между плоскостями* $z = z_1$ *и* $z = z_2$, *попеременно касаясь этих плоскостей* (рис. 141).

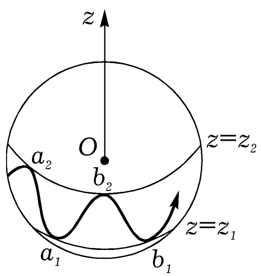

Рис. 141

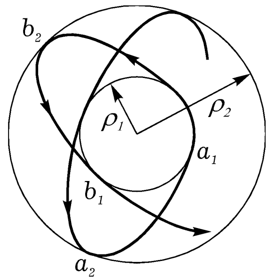

Рис. 142

При этом среднее положение точки всегда находится ниже горизонтальной плоскости, проходящей через точку O *подвеса маятника* (рис. 134), *т. е.* $u_1 + u_2 < 0$. *Чтобы убедиться в этом, приравняем коэффициенты при первой степени* u *в тождестве* (19). *Получим*

$$2(u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3) = -2,$$

откуда

$$u_3 = -\frac{1 + u_1u_2}{u_1 + u_2}.$$

Но так как $u_3 > 0$, *а* $|u_1u_2| < 1$, *то отсюда сразу следует, что* $u_1 + u_2 < 0$.

Из уравнения (14) *видно, что угол* φ *в рассматриваемом случае либо монотонно возрастает* (*если* $\alpha > 0$), *либо монотонно убывает* (*если* $\alpha < 0$). *На рис.* 142 *показана проекция траектории материальной точки на плоскость* Oxy *для движения, соответствующего рис.* 141, *когда обе плоскости* $z = z_1$ *и* $z = z_2$ *лежат ниже точки подвеса маятника* (*принято, что* $\alpha > 0$). *Эта проекция поочередно касается окружностей радиусов* $\rho_1 = l\sin\theta_1$ *и* $\rho_2 = l\sin\theta_2$ *и напоминает собой движе-*

ние по эллипсу, большая полуось которого вращается в горизонтальной плоскости в направлении движения.

Для интегрирования уравнения (17) *сделаем замену переменных*

$$u = u_1 + (u_2 - u_1)\sin^2 v. \tag{23}$$

Отсюда и из (17), (19) *получаем дифференциальное уравнение для новой переменной* v

$$\dot{v}^2 = \frac{1}{2}\omega_0^2(u_3 - u_1)(1 - k^2\sin^2 v), \tag{24}$$

где

$$k^2 = \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1} \quad (0 \leqslant k^2 \leqslant 1).$$

Если момент времени, когда $u = u_1$, *принять за начальный, то из* (24) *получаем*

$$\tau = \int\limits_0^v \frac{d\omega}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\omega}} = F(v,\ k), \tag{25}$$

где $F(v,\ k)$ — *эллиптический интеграл первого рода* (см. п. 95), *а*

$$\tau = \omega_0\sqrt{\frac{u_3 - u_1}{2}}t.$$

Тогда из (23) *следует, что*

$$u = u_1 + (u_2 - u_1)sn^2\tau. \tag{26}$$

Так как эллиптическая функция $sn\,\tau$ *имеет период* $4K(k)$, *где* $K(k)$ — *полный эллиптический интеграл первого рода, то* $sn^2\tau$ *имеет период, вдвое меньший. Поэтому* $u = u_1$ *для* $\tau = 2nK(k)$ *и* $u = u_2$ *для* $\tau = (2n+1)K(k)$ $(n = 1,\ 2, \ldots)$. *Следовательно, угол* θ *периодически колеблется между значениями* θ_1 *и* θ_2. *Период* $\varkappa$ *этих колебаний вычисляется по формуле*

$$\varkappa = \frac{2\sqrt{2}K(k)}{\omega_0\sqrt{u_3 - u_1}}. \tag{27}$$

Когда угол θ *найден как функция времени, зависимость* $\varphi(t)$ *находится из уравнения* (14) *при помощи одной квадратуры.*

3) $\alpha^2 = f(\beta)$. *В этом случае корни* u_1 *и* u_2 *многочлена* $G(u)$ *совпадают, причем* $u_1 = u_2 = u_*$, *и мы приходим к задаче о коническом*

маятнике. Угол θ *при движении постоянен,* $\theta = \theta_* = \arccos u_* > \dfrac{\pi}{2}$. *Материальная точка движется по окружности радиусом* $l \sin\theta_*$ *в горизонтальной плоскости* $z = z_* = l\cos\theta_* < 0$*; время ее обращения по окружности равно* $2\pi\sqrt{-\dfrac{g}{z_*}}$. *Стержень, на котором закреплена точка, описывает поверхность конуса с осью симметрии* Oz.

§ 3. Скобки Пуассона и первые интегралы

166. Скобка Пуассона. Пусть u и v — дважды непрерывно дифференцируемые функции от $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t$. Выражение

$$(u,\ v) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial q_i}\right) \tag{1}$$

называют *скобкой Пуассона* функций u и v.

Отметим основные свойства скобки Пуассона. Пусть $u,\ v,\ w$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции переменных $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n,\ t$. Тогда

1) $(u,\ v) = -(v,\ u)$,

2) $(cu,\ v) = c(u,\ v) \quad (c = \text{const})$,

3) $(u + v,\ w) = (u,\ w) + (v,\ w)$,

4) $\dfrac{\partial}{\partial t}(u,\ v) = \left(\dfrac{\partial u}{\partial t},\ v\right) + \left(u,\ \dfrac{\partial v}{\partial t}\right)$,

5) $((u,\ v),\ w) + ((v,\ w),\ u) + ((w,\ u),\ v) = 0$.

Первые четыре свойства непосредственно вытекают из определения (1) скобки Пуассона. Пятое свойство, называемое *тождеством Пуассона*, более громоздко для доказательства, хотя также несложно. Для сокращения выкладок можно использовать то обстоятельство, что каждое слагаемое в левой части тождества 5 есть произведение частной производной второго порядка на две частные производные первого порядка. Поэтому, чтобы показать, что левая часть тождественно равна нулю, достаточно убедиться в том, что она не содержит ни одной производной второго порядка, например, от функции u (так как $u,\ v,\ w$ входят в тождество 5 симметрично).

Вторые производные от u могут дать первое и третье слагаемые в 5. Их сумму на основании свойств 1 и 2 можно записать в виде

$$((u,\ v),\ w) + ((w,\ u),\ v) = (w,\ (v,\ u)) - (v,\ (w,\ u)).$$