маятнике. Угол θ при движении постоянен, $\theta = \theta_* = \arccos u_* > \frac{\pi}{2}$. Материальная точка движется по окружности радиусом $l\sin\theta_*$ в горизонтальной плоскости $z = z_* = l\cos\theta_* < 0$; время ее обращения по окружности равно $2\pi\sqrt{-\frac{g}{z_*}}$. Стержень, на котором закреплена точка, описывает поверхность конуса с осью симметрии Oz.

§ 3. Скобки Пуассона и первые интегралы

166. Скобка Пуассона. Пусть u и v — дважды непрерывно дифференцируемые функции от $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t$. Выражение

$$(u,\ v) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial q_i}\right) \tag{1}$$

называют *скобкой Пуассона* функций u и v.

Отметим основные свойства скобки Пуассона. Пусть u, v, w — дважды непрерывно дифференцируемые функции переменных $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t$. Тогда

$$1)\ (u,\ v) = -(v,\ u),$$

$$2)\ (cu,\ v) = c(u,\ v) \quad (c = \mathrm{const}),$$

$$3)\ (u + v,\ w) = (u,\ w) + (v,\ w),$$

$$4)\ \frac{\partial}{\partial t}(u,\ v) = \left(\frac{\partial u}{\partial t},\ v\right) + \left(u,\ \frac{\partial v}{\partial t}\right),$$

$$5)\ ((u,\ v),\ w) + ((v,\ w),\ u) + ((w,\ u),\ v) = 0.$$

Первые четыре свойства непосредственно вытекают из определения (1) скобки Пуассона. Пятое свойство, называемое *тождеством Пуассона*, более громоздко для доказательства, хотя также несложно. Для сокращения выкладок можно использовать то обстоятельство, что каждое слагаемое в левой части тождества 5 есть произведение частной производной второго порядка на две частные производные первого порядка. Поэтому, чтобы показать, что левая часть тождественно равна нулю, достаточно убедиться в том, что она не содержит ни одной производной второго порядка, например, от функции u (так как u, v, w входят в тождество 5 симметрично).

Вторые производные от u могут дать первое и третье слагаемые в 5. Их сумму на основании свойств 1 и 2 можно записать в виде

$$((u,\ v),\ w) + ((w,\ u),\ v) = (w,\ (v,\ u)) - (v,\ (w,\ u)).$$

Теперь уже нетрудно непосредственным вычислением проверить, что правая часть этого равенства не содержит вторых производных от функции u.

167. Теорема Якоби–Пуассона. Пусть переменные q_i, p_i удовлетворяют дифференциальным уравнениям Гамильтона

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i = 1,\ 2, \dots,\ n). \tag{2}$$

Для того чтобы функция $f(q_i,\ p_i,\ t)$ была первым интегралом, необходимо и достаточно, чтобы ее полная производная по времени, в силу уравнений (2), тождественно равнялась нулю: $df/dt \equiv 0$. Выразим это условие через скобку Пуассона. В силу (2) имеем

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt}\right) = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right).$$

Применяя обозначение (1) для скобки Пуассона, необходимое и достаточное условие того, что f — первый интеграл, можно записать в виде равенства

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (f,\ H) = 0. \tag{3}$$

Имеет место следующее замечательное утверждение.

Теорема (Якоби–Пуассона). *Если f_1 и f_2 — первые интегралы системы* (2), *то их скобка Пуассона $(f_1,\ f_2)$ также будет первым интегралом этой системы.*

Доказательство.

Пусть f_1 и f_2 — первые интегралы. Тогда, согласно (3),

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + (f_1,\ H) = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial t} + (f_2,\ H) = 0, \tag{4}$$

а нужно доказать, что

$$\frac{\partial (f_1,\ f_2)}{\partial t} + ((f_1,\ f_2),\ H) = 0. \tag{5}$$

Преобразуем левую часть этого равенства. По свойству 4 скобок Пуассона имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}(f_1, f_2) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}, f_2\right) + \left(f_1, \frac{\partial f_2}{\partial t}\right).$$

Если теперь производные $\partial f_1/\partial t$ и $\partial f_2/\partial t$ заменить на их выражения из равенства (4) и затем воспользоваться свойствами 1 и 2 скобок Пуассона, то получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(f_1, f_2) = -((f_1, H), f_2) - (f_1, (f_2, H)) = ((H, f_1), f_2) + ((f_2, H), f_1).$$

Подставляя это выражение в левую часть равенства (5), получаем ее в виде

$$((H, f_1), f_2) + ((f_2, H), f_1) + ((f_1, f_2), H).$$

Из свойства 5 скобок Пуассона следует, что последнее выражение тождественно равно нулю, что и доказывает справедливость теоремы Якоби–Пуассона.

Пример 1 (Движение материальной точки под действием притяжения к заданному центру O). *Пусть $Oq_1q_2q_3$ — неподвижная прямоугольная декартова система координат, а $\Pi(r)$, где $r^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$, — потенциал силы притяжения. Если массу точки принять за единицу, то для функции Гамильтона имеем выражение*

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \Pi(r).$$

Пусть

$$f_1 = q_2p_3 - q_3p_2, \quad f_2 = q_3p_1 - q_1p_3.$$

Проверка показывает, что $(f_1,\ H) = 0$ и $(f_2,\ H) = 0$, т. е. f_1 и f_2 — первые интегралы. Они представляют собой проекции момента количества движения материальной точки относительно центра O (этот момент постоянен, так как рассматриваемое силовое поле является центральным) на оси Oq_1 и Oq_2. Согласно теореме Якоби–Пуассона, функция $(f_1,\ f_2)$ тоже должна быть первым интегралом. Имеем

$$(f_1,\ f_2) = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial f_1}{\partial q_i}\frac{\partial f_2}{\partial p_i} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i}\frac{\partial f_2}{\partial q_i}\right) = q_1p_2 - q_2p_1.$$

Полученный интеграл есть проекция момента количества движения на ось Oq_3.

Может показаться, что теорема Якоби–Пуассона всегда позволяет по двум известным первым интегралам найти еще один первый интеграл, затем еще один и так далее до тех пор, пока не будет получено количество первых интегралов, необходимое для построения общего интеграла системы (2). Это далеко не так. На практике скобка Пуассона часто может быть либо константой, либо функцией известных первых интегралов.

Для того чтобы можно было надеяться получить из двух первых интегралов много или даже все первые интегралы, недостающие для построения общего интеграла, надо, чтобы хотя бы один из двух известных исходных первых интегралов был характерен для рассматриваемой частной задачи, чтобы он как можно полнее отражал физическую сущность именно данной задачи. Если за исходные первые интегралы брать интегралы, вытекающие из основных, общих для всех систем теорем динамики, то вряд ли в общем случае можно надеяться на эффективное применение теоремы Якоби–Пуассона.

§ 4. Канонические преобразования

168. Понятие канонического преобразования. Рассмотрим гамильтонову систему дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме

$$\frac{d\boldsymbol{z}}{dt} = \mathbf{J}H'_{\boldsymbol{z}} \tag{1}$$

Здесь $\boldsymbol{z}$ — $2n$-мерный вектор-столбец, $\boldsymbol{z}' = (\boldsymbol{q}', \boldsymbol{p}')$, $\boldsymbol{q}' = (q_1, \ldots, q_n)$, $\boldsymbol{p}' = (p_1, \ldots, p_n)$,

$$\mathbf{J} = \left\| \begin{matrix} 0 & \mathbf{E}_n \\ -\mathbf{E}_n & 0 \end{matrix} \right\|, \tag{2}$$

$\mathbf{E}_n$ — единичная матрица n-го порядка. $H = H(\boldsymbol{z}, t)$ — функция Гамильтона, $H_{\boldsymbol{z}}$ — матрица-строка размером $1 \times 2n$,

$$H_{\boldsymbol{z}} = (H_{\boldsymbol{q}}, H_{\boldsymbol{p}}) = (H_{q_1}, \ldots, H_{q_n}, H_{p_1}, \ldots, H_{p_n}).$$

Легко видеть, что

$$\mathbf{J}' = \mathbf{J}^{-1} = -\mathbf{J}, \quad \mathbf{J}^2 = -\mathbf{E}_{2n}, \quad \det \mathbf{J} = 1. \tag{3}$$

Получение решений системы уравнений (1) часто оказывается очень сложным делом. Поэтому надо искать какие-то пути, упрощающие исследование движения. Например, в §2 показано, что наличие одной циклической координаты позволяет понизить порядок системы (1) на две единицы. Это указывает на то, что удачный выбор обобщенных координат может существенно облегчить исследование движения, а иногда позволяет провести его во всей необходимой полноте. С такой ситуацией мы встретились в п. 165 при анализе движения сферического маятника.