Для того чтобы можно было надеяться получить из двух первых интегралов много или даже все первые интегралы, недостающие для построения общего интеграла, надо, чтобы хотя бы один из двух известных исходных первых интегралов был характерен для рассматриваемой частной задачи, чтобы он как можно полнее отражал физическую сущность именно данной задачи. Если за исходные первые интегралы брать интегралы, вытекающие из основных, общих для всех систем теорем динамики, то вряд ли в общем случае можно надеяться на эффективное применение теоремы Якоби–Пуассона.

§4. Канонические преобразования

168. Понятие канонического преобразования. Рассмотрим гамильтонову систему дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме

$$\frac{d\boldsymbol{z}}{dt} = \mathbf{J}H'_{\boldsymbol{z}} \tag{1}$$

Здесь $\boldsymbol{z}$ — $2n$-мерный вектор-столбец, $\boldsymbol{z}' = (\boldsymbol{q}', \boldsymbol{p}')$, $\boldsymbol{q}' = (q_1, \ldots, q_n)$, $\boldsymbol{p}' = (p_1, \ldots, p_n)$,

$$\mathbf{J} = \begin{Vmatrix} 0 & \mathbf{E}_n \\ -\mathbf{E}_n & 0 \end{Vmatrix}, \tag{2}$$

$\mathbf{E}_n$ — единичная матрица n-го порядка. $H = H(\boldsymbol{z}, t)$ — функция Гамильтона, $H_{\boldsymbol{z}}$ — матрица-строка размером $1 \times 2n$,

$$H_{\boldsymbol{z}} = (H_{\boldsymbol{q}}, H_{\boldsymbol{p}}) = (H_{q_1}, \ldots, H_{q_n}, H_{p_1}, \ldots, H_{p_n}).$$

Легко видеть, что

$$\mathbf{J}' = \mathbf{J}^{-1} = -\mathbf{J}, \quad \mathbf{J}^2 = -\mathbf{E}_{2n}, \quad \det \mathbf{J} = 1. \tag{3}$$

Получение решений системы уравнений (1) часто оказывается очень сложным делом. Поэтому надо искать какие-то пути, упрощающие исследование движения. Например, в §2 показано, что наличие одной циклической координаты позволяет понизить порядок системы (1) на две единицы. Это указывает на то, что удачный выбор обобщенных координат может существенно облегчить исследование движения, а иногда позволяет провести его во всей необходимой полноте. С такой ситуацией мы встретились в п. 165 при анализе движения сферического маятника.

В некоторой области фазового пространства $q_1, q_2, \ldots, q_n$, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ рассмотрим обратимую, дважды непрерывно дифференцируемую замену переменных $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p} \to \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}$, содержащую время t в качестве параметра:

$$Q_i = Q_i(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t), \quad P_i = P_i(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t), \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

или, если ввести обозначение $\boldsymbol{\zeta}' = (\boldsymbol{Q}', \boldsymbol{P}')$, $\boldsymbol{Q}' = (Q_1, \ldots, Q_n)$, $\boldsymbol{P}' = (P_1, \ldots, P_n)$,

$$\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{z}, t). \tag{5}$$

Может случиться, что в новых переменных система уравнений (1) будет иметь более простую структуру и ее интегрирование будет проще интегрирования исходной системы. В новых переменных уравнения движения могут уже не быть гамильтоновыми. Мы, однако, будем далее рассматривать только такие преобразования (4), которые не нарушают гамильтововой формы уравнений движения. Это будут канонические преобразования. Ниже мы дадим определение канонических преобразований, получим критерии каноничности и укажем способ нахождения функции Гамильтона, отвечающей преобразованным уравнениям.

Практический смысл канонических преобразований состоит в упрощении уравнений движения, в выборе таких новых координат в фазовом пространстве, которые более удобны для решения задачи о движении системы, нежели исходные старые координаты. Метод канонических преобразований является широко распространенным и эффективным методом исследования гамильтоновых уравнений.

Пусть $\mathbf{M}$ — матрица Якоби преобразования (4),

$$\mathbf{M} = \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial \boldsymbol{z}} = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{q}} & \dfrac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{p}} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{q}} & \dfrac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{p}} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \ldots & \dfrac{\partial Q_1}{\partial q_n} & \dfrac{\partial Q_1}{\partial p_1} & \ldots & \dfrac{\partial Q_1}{\partial p_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial Q_n}{\partial q_1} & \ldots & \dfrac{\partial Q_n}{\partial q_n} & \dfrac{\partial Q_n}{\partial p_1} & \ldots & \dfrac{\partial Q_n}{\partial p_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial P_1}{\partial q_1} & \ldots & \dfrac{\partial P_1}{\partial q_n} & \dfrac{\partial P_1}{\partial p_1} & \ldots & \dfrac{\partial P_1}{\partial p_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial P_n}{\partial q_1} & \ldots & \dfrac{\partial P_n}{\partial q_n} & \dfrac{\partial P_n}{\partial p_1} & \ldots & \dfrac{\partial P_n}{\partial p_n} \end{Vmatrix}. \tag{6}$$

Преобразование (4) называется *каноническим*, если существует такое постоянное число $c \neq 0$, что матрица Якоби (6) удовлетворяет тождеству

$$\mathbf{M}'\mathbf{J}\mathbf{M} = c\mathbf{J}, \tag{7}$$

где матрица $\mathbf{J}$ определена равенством (2). Число с называется *валентностью канонического преобразования*; если $c = 1$, то преобразование называется *унивалентным.*

Замечание 1. *Матрицы* $\mathbf{M}$*, удовлетворяющие тождеству* (7) *при* $c = 1$*, называются симплектическими; если же в* (7) $c \neq 1$*, то матрица* $\mathbf{M}$ *называется обобщенно симплектической* (*с валентностью* c)*. Так как, согласно* (3)*,* $\det \mathbf{J} = 1$*, то из равенства* (7) *на основании теоремы об умножении определителей получаем*

$$\det \mathbf{M} = \pm c^n,$$

т. е. обобщенно симплектические матрицы являются невырожденными.

Замечание 2. *Пусть в фазовом пространстве последовательно выполнены два канонических преобразования:* $\boldsymbol{\zeta}_1 = \boldsymbol{\zeta}_1(\boldsymbol{z},\ t)$ *с валентностью* c_1 *и* $\boldsymbol{\zeta}_2 = \boldsymbol{\zeta}_2(\boldsymbol{\zeta}_1,\ t)$ *с валентностью* c_2*. Тогда результирующее преобразование* $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{z},\ t) \equiv \boldsymbol{\zeta}_2(\boldsymbol{\zeta}_1(\boldsymbol{z},\ t),\ t)$ *тоже будет каноническим, и его валентность с равна произведению* $c_1 c_2$*.*

В самом деле, по условию

$$\mathbf{M}_1'\mathbf{J}\mathbf{M}_1 = c_1\mathbf{J}, \quad \mathbf{M}_1 = \partial\boldsymbol{\zeta}_1/\partial\boldsymbol{z}$$

и

$$\mathbf{M}_2'\mathbf{J}\mathbf{M}_2 = c_2\mathbf{J}, \quad \mathbf{M}_2 = \partial\boldsymbol{\zeta}_2/\partial\boldsymbol{\zeta}_1.$$

Поэтому

$$\mathbf{M} = \frac{\partial\boldsymbol{\zeta}}{\partial\boldsymbol{z}} = \frac{\partial\boldsymbol{\zeta}_2}{\partial\boldsymbol{\zeta}_1}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\zeta}_1}{\partial\boldsymbol{z}} = \mathbf{M}_2\mathbf{M}_1,$$

а следовательно,

$$\mathbf{M}'\mathbf{J}\mathbf{M} = (\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1)'\mathbf{J}(\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1) = \mathbf{M}_1'\mathbf{M}_2'\mathbf{J}\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1 =$$
$$= \mathbf{M}_1'c_2\mathbf{J}\mathbf{M}_1 = c_2\mathbf{M}_1'\mathbf{J}\mathbf{M}_1 = c_2c_1\mathbf{J}.$$

Отсюда, согласно определению (7) канонического преобразования, следует доказываемое утверждение.

Пусть, далее, задано каноническое преобразование $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{z},\ t)$ с валентностью c. Тогда обратное преобразование $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}(\boldsymbol{\zeta},\ t)$ также будет каноническим, а его валентность равна $1/c$.

Действительно, умножив обе части тождества (7) слева на матрицу $(\mathbf{M}')^{-1}$, а справа — на матрицу $\mathbf{M}^{-1}$, получим

$$\frac{1}{c}\mathbf{J} = (\mathbf{M}')^{-1}\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}. \tag{8}$$

Учитывая перестановочность операций транспонирования и взятия обратной матрицы, приходим к равенству

$$(\mathbf{M}^{-1})'\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{c}\mathbf{J}. \tag{9}$$

Так как матрицей Якоби обратного преобразования $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}(\boldsymbol{\zeta},\ t)$ является матрица $\mathbf{M}^{-1}$, то отсюда следует, что это преобразование каноническое и имеет валентность $1/c$.

Отметив еще, что тождественное преобразование $Q_i = q_i, P_i = p_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, очевидно, будет каноническим, приходим к выводу, что совокупность всех канонических преобразований образует группу. Унивалентные преобразования составляют ее подгруппу.

169. Критерии каноничности преобразования. Равенство (7) позволяет легко проверить, является преобразование (4) каноническим или нет. Приведем еще некоторые критерии каноничности. Они эквивалентны условию (7) и могли бы быть приняты за определение каноничности преобразования (4).

Сначала введем понятие скобки Лагранжа и дадим критерий каноничности в терминах этих скобок. Пусть заданы $2n$ функций φ_j, ψ_j $(j = 1,\ 2, \ldots,\ n)$ от двух переменных x, y и еще, может быть, от некоторых других переменных. Тогда *скобкой Лагранжа* для этих функций называется величина

$$[x,\ y] = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}\frac{\partial \psi_j}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}\frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right). \tag{10}$$

Теорема. *Если в качестве φ_j, ψ_j принять функции Q_j, P_j из* (4)*, то необходимое и достаточное условие каноничности преобразования* (4) *запишется в виде*

$$[q_i,\ q_k] = 0, \quad [p_i,\ p_k] = 0, \quad [q_i,\ p_k] = c\delta_{ik} \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{11}$$

Здесь δ_{ik} — символ Кронекера ($\delta_{ik} = 1$ при $i = k$ и $\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$), а c — валентность канонического преобразования.

Доказательство.

Доказательство получается при помощи непосредственной проверки. В самом деле, левая часть равенства (7) может быть записана в виде следующей блочной матрицы:

$$\mathbf{M}'\mathbf{J}\mathbf{M} = \left\| \begin{matrix} \left(\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)' \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{q}} - \left(\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)' \frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{q}} & \left(\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)' \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{p}} - \left(\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)' \frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{p}} \\ \left(\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{p}}\right)' \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{q}} - \left(\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{p}}\right)' \frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{q}} & \left(\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{p}}\right)' \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{p}} - \left(\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{p}}\right)' \frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{p}} \end{matrix} \right\|. \tag{12}$$

Вычисления, проведенные для левого верхнего блока этой матрицы с учетом обозначения (10), дают

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)' \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{q}} - \left(\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)' \frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{q}} = \left\| \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\frac{\partial P_j}{\partial q_k} - \frac{\partial Q_j}{\partial q_k}\frac{\partial P_j}{\partial q_i} \right) \right\|_{i,\,k=1}^{n} =$$
$$= \left\| [q_i,\, q_k] \right\|_{i,\,k=1}^{n}.$$

Проведя аналогичные вычисления для остальных блоков матрицы (12), убеждаемся, что равенство (7) может быть записано в виде

$$\left\| \begin{matrix} \left\|[q_i,\, q_k]\right\|_{i,\,k=1}^{n} & \left\|[q_i,\, p_k]\right\|_{i,\,k=1}^{n} \\ -\left\|[q_i,\, p_k]\right\|_{i,\,k=1}^{n} & \left\|[p_i,\, p_k]\right\|_{i,\,k=1}^{n} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 & c\mathbf{E} \\ -c\mathbf{E} & 0 \end{matrix} \right\|. \tag{13}$$

Для доказательства теоремы теперь достаточно заметить, что равенства (11) и (13) эквивалентны.

Получим теперь критерий каноничности преобразования (4), использующий скобки Пуассона.

Теорема. *Для того чтобы преобразование* (4) *было каноническим, необходимо и достаточно, чтобы скобки Пуассона функций* Q_j, P_j *от переменных* $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t$ *удовлетворяли равенствам*

$$(Q_i,\, Q_k) = 0, \quad (P_i,\, P_k) = 0, \quad (Q_i,\, P_k) = c\delta_{ik} \quad (i,\, k = 1,\, 2, \ldots,\, n). \tag{14}$$

Доказательство.

Доказательство проводится при помощи непосредственной проверки эквивалентности равенств (14) и равенства (7), положенного в основу определения каноничности преобразования (4). Возьмем от обеих частей равенства (8) обратные матрицы и учтем, что, согласно (3), $\mathbf{J}^{-1} = -\mathbf{J}$. Тогда придем к равенству

$$\mathbf{MJM}' = c\mathbf{J}, \tag{15}$$

которое эквивалентно равенству (7). Левая часть последнего равенства может быть представлена в виде блочной матрицы

$$\mathbf{MJM}' = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{q}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{p}}\right)' - \frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{p}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)' & \frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{q}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{p}}\right)' - \frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{p}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)' \\ \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{q}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{p}}\right)' - \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{p}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)' & \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{q}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{p}}\right)' - \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{p}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)' \end{matrix} \right\|. \tag{16}$$

Непосредственные вычисления показывают, что левый верхний блок этой матрицы может быть представлен в виде

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{q}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{p}}\right)' - \frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{p}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)' = \left\| \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\frac{\partial Q_k}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\frac{\partial Q_k}{\partial q_j}\right)\right\|_{i,\,k=1}^{n} = \\ = \|(Q_i,\ Q_k)\|_{i,\,k=1}^{n}\,.$$

Аналогичные вычисления для остальных блоков матрицы (16) позволяют записать равенство (15) в следующей форме:

$$\left\| \begin{matrix} \|(Q_i,\ Q_k)\|_{i,\,k=1}^{n} & \|(Q_i,\ P_k)\|_{i,\,k=1}^{n} \\ -\|(Q_i,\ P_k)\|_{i,\,k=1}^{n} & \|(P_i,\ P_k)\|_{i,\,k=1}^{n} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 & c\mathbf{E} \\ -c\mathbf{E} & 0 \end{matrix} \right\|. \tag{17}$$

Отсюда следует, что равенства (14) и (7) эквивалентны, что и доказывает теорему.

Приведенные критерии каноничности, как и само определение (7), позволяют по явно заданному преобразованию (4) решить, является оно каноническим или нет. Для дальнейшего построения теории канонических преобразований очень важен следующий критерий каноничности.

Теорема. *Для каноничности преобразования* (4) *необходимо и достаточно, чтобы существовала отличная от нуля постоянная c такая, что выражение*

$$c\sum_{k=1}^{n} p_k\delta q_k - \sum_{k=1}^{n} P_k\delta Q_k \tag{18}$$

является полным дифференциалом некоторой функции $F(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{p},\ t)$.

При этом под полными дифференциалами δF и δQ_k $(k = 1,\ 2, \ldots, n)$ понимаются дифференциалы, соответствующие изменению переменных $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{p}$; величина t считается параметром.

Доказательство.

Для доказательства этой теоремы достаточно показать, что условия того, что выражение (18) есть полный дифференциал, эквивалентно равенствам (11). Из (4) имеем

$$\delta Q_k = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial Q_k}{\partial p_i}\delta p_i\right) \quad (k = 1,\ 2, \ldots,\ n).$$

Подставив эти дифференциалы в выражение (18) и изменив порядок суммирования, получим это выражение в виде

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i\delta q_i + Y_i\delta p_i), \tag{19}$$

где приняты обозначения

$$X_i = cp_i - \sum_{l=1}^{n} P_l \frac{\partial Q_l}{\partial q_i}, \quad Y_i = -\sum_{l=1}^{n} P_l \frac{\partial Q_l}{\partial p_i} \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{20}$$

Условие того, что выражение (19) есть полный дифференциал, записывается в виде совокупности равенств

$$\frac{\partial X_i}{\partial q_k} = \frac{\partial X_k}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial Y_i}{\partial p_k} = \frac{\partial Y_k}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial X_i}{\partial p_k} = \frac{\partial Y_k}{\partial q_i} \quad (i,\ k = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{21}$$

Непосредственное вычисление, использующее обозначения (20), показывает, что равенства (21) запишутся соответственно в виде

$$[q_i,\ q_k] = 0, \quad [p_i,\ p_k] = 0, \quad [q_i,\ p_k] = c\delta_{ik} \quad (i,\ k = 1,\ 2, \ldots,\ n).$$

Так как эти равенства совпадают с равенствами (11), то отсюда следует справедливость доказываемой теоремы.

170. Ковариантность уравнений Гамильтона при канонических преобразованиях. Если преобразование (4) является каноническим, то в новых переменных система уравнений (1) снова будет иметь гамильтонову форму. Более точно, имеет место следующее утверждение.

Теорема. *При каноническом преобразовании* (4) *любая гамильтонова система дифференциальных уравнений* (1) *переходит снова в гамильтонову систему* (*вообще говоря, с другой функцией Гамильтона* $\mathcal{H}(\boldsymbol{\zeta},\ t)$)

$$\frac{d\zeta}{dt} = \mathbf{J}\mathcal{H}'_{\zeta}. \tag{22}$$

Доказательство.

Действительно, из (5) и (1) имеем

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \mathbf{MJ}H'_z + \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \tag{23}$$

Но

$$H'_z = \left(H_\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)' = (H_\zeta \mathbf{M})' = \mathbf{M}'H'_\zeta.$$

Поэтому, учитывая тождество (15), равенство (23) можно записать в виде

$$\frac{d\zeta}{dt} = \mathbf{J}cH'_\zeta + \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \tag{24}$$

Покажем, что если преобразование (4) каноническое, то

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \mathbf{J}W'_{\zeta}, \tag{25}$$

где W — некоторая функция переменных $\boldsymbol{\zeta}$, t. В самом деле, опираясь на соотношения (3) и (6), получаем из (25) следующую цепочку равенств:

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)' = -W_{\zeta}\mathbf{J}, \quad \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)' \mathbf{J} = W_{\zeta}, \quad \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)' \mathbf{JM} = W_{\zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial \boldsymbol{z}} = W_{\boldsymbol{z}},$$

т. е. соотношение (25) эквивалентно равенству

$$W_{\boldsymbol{z}} = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)' \mathbf{JM}, \tag{26}$$

где W рассматривается как функция переменных $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{p}$, t. В скалярной форме равенство (26) запишется в виде $2n$ соотношений

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_j}{\partial t}\frac{\partial P_j}{\partial q_k} - \frac{\partial Q_j}{\partial q_k}\frac{\partial P_j}{\partial t}\right) \equiv \Phi_k \quad (k = 1,\ 2,\ldots,\ n),$$

$$\frac{\partial W}{\partial p_l} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial P_j}{\partial p_l}\frac{\partial Q_j}{\partial t} - \frac{\partial P_j}{\partial t}\frac{\partial Q_j}{\partial p_l}\right) \equiv \Psi_l \quad (l = 1,\ 2,\ldots,\ n),$$

где обозначения Φ_k, Ψ_l для производных функции W введены для краткости записи. Величины Φ_k и Ψ_l являются производными по q_k и p_l от некоторой функции W в том и только в том случае, когда выполнены условия

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial \Psi_k}{\partial p_i} = \frac{\partial \Psi_i}{\partial p_k}, \quad \frac{\partial \Phi_k}{\partial p_i} = \frac{\partial \Psi_i}{\partial q_k} \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ldots,\ n).$$

Эти условия, как показывают непосредственные вычисления, могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}[q_i,\ q_k] = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}[p_i,\ p_k] = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}[q_i,\ p_k] = 0 \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ldots,\ n). \tag{27}$$

Так как преобразование (4) каноническое, то имеют место равенства (11), откуда вытекает справедливость равенств (27), а следовательно, и равенства (25).

Таким образом, уравнение (24) может быть записано в виде

$$\frac{d\zeta}{dt} = \mathbf{J}(cH'_\zeta + W'_\zeta).$$

Если обозначить $\mathcal{H}$ функцию $cH + W$, то последнее уравнение примет гамильтонову форму

$$\frac{d\zeta}{dt} = \mathbf{J}\mathcal{H}'_\zeta.$$

Роль новой функции Гамильтона играет функция $\mathcal{H}$. Теорема доказана.

Приведем некоторые простые, по практически важные примеры канонических преобразований. Старую и новую функции Гамильтона обозначим соответственно $H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$ и $\mathcal{H}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}, t)$.

Пример 1. *Тождественное преобразование*

$$Q_j = q_j, \quad P_j = p_j \quad (j = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{28}$$

Это унивалентное каноническое преобразование; при этом $\mathcal{H} = H(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}, t)$.

Пример 2. *Преобразование*

$$Q_j = p_j, \quad P_j = q_j \quad (j = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{29}$$

Это каноническое преобразование с валентностью $c = -1$. *Оно меняет ролями обобщенные координаты и обобщенные импульсы. При этом*

$$\mathcal{H} = -H(\boldsymbol{P},\ \boldsymbol{Q}, t).$$

Пример 3. *Преобразование*

$$Q_j = \alpha q_j, \quad P_j = \beta p_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n; \alpha = \mathrm{const}, \beta = \mathrm{const}, \alpha\beta \neq 0). \tag{30}$$

Это преобразование каноническое, и

$$\mathcal{H} = \alpha\beta H\left(\frac{1}{\alpha}\boldsymbol{Q},\ \frac{1}{\beta}\boldsymbol{P},\ t\right).$$

Пример 4. *Преобразование*

$$Q_j = \alpha p_j, \quad P_j = \beta q_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n; \alpha = \mathrm{const}, \beta = \mathrm{const}, \alpha\beta \neq 0). \tag{31}$$

Это преобразование также каноническое, а

$$\mathcal{H} = -\alpha\beta H\left(\frac{1}{\beta}\boldsymbol{P}, \frac{1}{\alpha}\boldsymbol{Q},\ t\right).$$

Примеры 2 и 4 показывают, что при канонических преобразованиях может исчезнуть различие между координатами и импульсами. Применение названий «импульс» и «координата» может стать чисто условным. Поэтому для пары переменных Q_i и P_i, очень удобно название «канонически сопряженные переменные».

Пример 5. *Перенос начала координат в фазовом пространстве*

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{f}(t), \quad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{g}(t) \tag{32}$$

представляет собой унивалентное каноническое преобразование. При этом новые переменные $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{P}$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений с функцией Гамильтона

$$\mathcal{H} = H(\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{f}(t),\ \boldsymbol{P} + \boldsymbol{g}(t),\ t) + \frac{d\boldsymbol{g}}{dt} \cdot \boldsymbol{Q} - \frac{d\boldsymbol{f}}{dt} \cdot \boldsymbol{P}, \tag{33}$$

где точкой обозначено скалярное произведение векторов.

Пример 6. *Преобразование*

$$q_j = \sqrt{2r_j}\sin\varphi_j, \quad p_j = \sqrt{2r_j}\cos\varphi_j \quad (j = 1,\ 2, \ldots,\ n) \tag{34}$$

является унивалентным каноническим преобразованием. Оно осуществляет переход от пары канонически сопряженных переменных q_j, p_j, играющих роль декартовых координат на плоскости, к паре канонически сопряженных переменных φ_j, r_j (φ_j — «координата», r_j — «импульс»), имеющих характер полярных координат.

Если старая функция Гамильтона имела вид

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(q_j^2 + p_j^2), \tag{35}$$

то уравнениям для переменных φ_j, r_j соответствует функция Гамильтона

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j r_j. \tag{36}$$

Пример 7. *Преобразование*

$$Q_j = q_j - ip_j, \quad P_j = q_j + ip_j \quad (j = 1,\ 2, \ldots,\ n), \tag{37}$$

где i — мнимая единица ($i^2 = -1$), осуществляет переход к комплексно сопряженным переменным. Оно является каноническим с валентностью $2i$ и

$$\mathcal{H} = 2iH\left(\frac{\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q}}{2},\ \frac{\boldsymbol{P} - \boldsymbol{Q}}{2i},\ t\right). \tag{38}$$

Если, например, старая функция Гамильтона имеет вид (35), *то*

$$\mathcal{H} = i\sum_{j=1}^{n}\lambda_j Q_j P_j. \tag{39}$$

171. Канонические преобразования и процесс движения. Очень важным примером канонического преобразования служит процесс движения, описываемого гамильтоновой системой дифференциальных уравнений.

Пусть для гамильтоновой системы (1) при $t = 0$ $\boldsymbol{z}' = \boldsymbol{z}_0' = (\boldsymbol{q}_0', \boldsymbol{p}_0')$. Тогда вектор-функция $\boldsymbol{\zeta}' = \boldsymbol{\zeta}'(\boldsymbol{z}_0, t) = (\boldsymbol{q}'(\boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{p}_0, t), \boldsymbol{p}'(\boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{p}_0, t))$ удовлетворяет тождеству

$$\frac{d\zeta}{dt} = \mathbf{J}H_\zeta'. \tag{40}$$

Она задает преобразование фазового пространства $\boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{p}_0 \to \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}$.

Теорема. *Преобразование фазового пространства, задаваемое движениями гамильтоновой системы, является унивалентным каноническим преобразованием.*

Доказательство.

Надо убедиться в том, что матрица Якоби $\mathbf{M} = \partial\boldsymbol{\zeta}/\partial\boldsymbol{z}_0$ удовлетворяет тождеству (7) при $c = 1$, т. е.

$$\mathbf{M}'\mathbf{J}\mathbf{M} = \mathbf{J}. \tag{41}$$

Для этого найдем дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют матрицы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}'$. Продифференцировав обе части тождества (40) по $\boldsymbol{z}_0$, получим

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\zeta}{\partial\boldsymbol{z}_0} = \mathbf{J}H_{\zeta\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial\boldsymbol{z}_0},$$

или

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{J}H_{\zeta\zeta}\mathbf{M}. \tag{42}$$

Транспонируя обе части этого равенства и учитывая соотношения (3) и симметричность матрицы $H_{\zeta\zeta}$, получим

$$\frac{d\mathbf{M}'}{dt} = \mathbf{M}'H_{\zeta\zeta}'\mathbf{J}' = -\mathbf{M}'H_{\zeta\zeta}\mathbf{J}. \tag{43}$$

Учитывая (42) и (43), вычислим теперь производную по времени от матрицы $\mathbf{M}'\mathbf{J}\mathbf{M}$. Имеем

$$\frac{d(\mathbf{M}'\mathbf{J}\mathbf{M})}{dt} = \frac{d\mathbf{M}'}{dt}\mathbf{J}\mathbf{M} + \mathbf{M}'\mathbf{J}\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\mathbf{M}'H_{\zeta\zeta}\mathbf{J}\mathbf{J}\mathbf{M} + \mathbf{M}'\mathbf{J}\mathbf{J}H_{\zeta\zeta}\mathbf{M}.$$

Если теперь заметить, что, согласно равенствам (3), $\mathbf{J}^2 = -\mathbf{E}_{2n}$, то это выражение можно представить и виде

$$\frac{d(\mathbf{M}'\mathbf{J}\mathbf{M})}{dt} = \mathbf{M}'H_{\zeta\zeta}\mathbf{M} - \mathbf{M}'H_{\zeta\zeta}\mathbf{M} \equiv 0.$$

Отсюда следует, что матрица $\mathbf{M}'\mathbf{J}\mathbf{M}$ постоянна. Но при $t = 0$ она, очевидно, равна $\mathbf{J}$. Поэтому при всех t имеет место равенство (41). Теорема доказана.

172. Теорема Лиувилля о сохранении фазового объема. Пусть G_0 — некоторая область фазового пространства $q_1, \ldots, q_n$, $p_1, \ldots, p_n$. Из каждой ее точки $q_{10}, \ldots, q_{n0}$, $p_{10}, \ldots, p_{n0}$ как из начальной «выпустим» траекторию системы уравнений (1). Пусть G_t — совокупность точек $\boldsymbol{q} = q(q_0, p_0, t)$, $\boldsymbol{p} = p(q_0, p_0, t)$ в момент времени t, V_0 — объем области G_0, а V_t — объем области G_t.

Теорема (Лиувилля). *При движении гамильтоновой системы фазовый объем остается постоянным, т. е. $V_t = V_0$ при любом t.*

Доказательство.

Имеем равенства

$$\begin{aligned} V_0 &= \int\limits_{G_0}\!\!\ldots\!\int dq_{10}\ldots dq_{n0}dp_{10}\ldots dp_{n0}, \\ V_t &= \int\limits_{G_t}\!\!\ldots\!\int dq_1\ldots dq_n dp_1\ldots dp_n. \end{aligned} \tag{44}$$

В интеграле, входящем во второе из этих равенств, перейдем от переменных $q_1, \ldots, q_n$, $p_1, \ldots, p_n$ к переменным $q_{10}, \ldots, q_{n0}$, $p_{10}, \ldots, p_{n0}$. Тогда, как известно из курса математического анализа,

$$V_t = \int\limits_{G_0}\!\!\ldots\!\int |\det\mathbf{M}|\, dq_{10}\ldots dq_{n0}dp_{10}\ldots dp_{n0}, \tag{45}$$

где (в обозначениях предыдущего пункта) $\mathbf{M} = \partial\zeta/\partial\boldsymbol{z}_0$. Матрица $\mathbf{M}$ удовлетворяет равенству (41). Так как $\det\mathbf{J} = 1$, то из него следует, что $\det\mathbf{M} = \pm 1$. Но при $t = 0$, очевидно, $\mathbf{M} = \mathbf{E}_{2n}$ и $\det\mathbf{M} = \det\mathbf{E}_{2n} = +1$. Отсюда, ввиду непрерывности $\mathbf{M}$, получаем, что и при любых t $\det\mathbf{M} = +1$. Поэтому из (44) и (45) следует, что $V_t = V_0$. Теорема доказана.

173. Свободное каноническое преобразование и его производящая функция. Пусть преобразование (4) каноническое и в некоторой области фазового пространства удовлетворяет условию

$$\det\frac{\partial\boldsymbol{Q}}{\partial\boldsymbol{p}} \neq 0. \tag{46}$$

Тогда преобразование (4) называется *свободным каноническим преобразованием.*

При выполнении условия (46) из первых n равенств (4) можно выразить $\boldsymbol{p}$ через $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{Q}$ и t. Тогда выражение (18) может быть записано в виде

$$c\sum_{k=1}^{n} p_k\delta q_k - \sum_{k=1}^{n} P_k\delta Q_k = \delta F(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{p}(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{Q},\ t),\ t) = \delta S(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{Q},\ t), \qquad (47)$$

где S — функция F, в которой $\boldsymbol{p}$ заменено на $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{Q},\ t)$.

Из равенства (47) вытекают соотношения

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = cp_i, \quad \frac{\partial S}{\partial Q_i} = -P_i \quad (i = 1,\ 2, \ldots ,\ n). \qquad (48)$$

Функция S называется *производящей функцией свободного канонического преобразования* (4).

Очевидно, что верно и обратное утверждение: если заданы дважды непрерывно дифференцируемая функция $S(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{Q},\ t)$ и число $c \neq 0$, то при условии

$$\det\left\| \frac{\partial^2 S}{\partial Q_i \partial q_k} \right\|_{i,\ k=1}^{n} \neq 0 \qquad (49)$$

формулы (48) задают свободное каноническое преобразование с валентностью c.

При условии (49) формулы (48) можно представить в виде (4). В самом деле, условие (49) означает, что первые n равенств из соотношений (48) можно разрешить относительно Q_i. Сделав это, получим $Q_i = Q_i(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{p},\ t)$. Подставив эти функции в левые части последних n равенств из (48), получим $P_i = P_i(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{p},\ t)$.

В п. 170 мы получили уравнение (24) и показали, что его можно записать в гамильтоновой форме. Осуществим эту запись, используя производящую функцию S. В (24) H представляет собой старую функцию Гамильтона, выраженную через новые переменные, а

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)' = \left(\frac{\partial \boldsymbol{Q}'(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{p},\ t)}{\partial t},\ \frac{\partial \boldsymbol{P}'(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{p},\ t)}{\partial t}\right). \qquad (50)$$

В первых n равенствах соотношений (48) величину $\boldsymbol{Q}$ заменим на ее выражение $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{p},\ t)$. В результате эти равенства станут тождествами относительно старых переменных $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{p}$, t. Продифференцировав их по t, получим

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial Q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial t} + \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial t} = 0 \quad (i = 1,\ 2, \ldots ,\ n).$$

Меняя здесь порядок дифференцирования и пользуясь последними n равенствами из (48), имеем

$$-\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial Q_k}{\partial t} \frac{\partial P_k}{\partial q_i} + \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_i} = 0 \quad (i = 1,\ 2, \dots ,\ n).$$

Применяя векторно-матричные обозначения, запишем эти равенства в виде

$$-\frac{\partial \boldsymbol{Q}'}{\partial t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{q}} + \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \boldsymbol{q}} = 0,$$

или

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}'}{\partial t} = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \boldsymbol{q}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \boldsymbol{P}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{P}} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right). \tag{51}$$

Далее, последние n равенств из (48) дают

$$\frac{\partial \boldsymbol{P}'}{\partial t} = -\frac{\partial^2 S}{\partial \boldsymbol{Q} \partial t} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{Q}} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right). \tag{52}$$

Из (50) и (51), (52) получаем

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \mathbf{J} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial S}{\partial t} \right)'.$$

Следовательно, уравнение (24) имеет вид

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \mathbf{J} \left(cH + \frac{\partial S}{\partial t} \right)'_{\zeta}, \tag{53}$$

и новая функция Гамильтона

$$\mathcal{H} = cH + \frac{\partial S}{\partial t}, \tag{54}$$

где H и S должны быть выражены через $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{P}$, t.

Таким образом, если заданы производящая функция $S(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{Q}, t)$ и валентность c канонического преобразования, то связь старых и новых переменных определяется из равенств (48), а функция Гамильтона, отвечающая преобразованной к новым переменным $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{P}$ системе (1), вычисляется по формуле (54). Мы видим, что при преобразовании системы (1) к новым переменным нужно все вычисления проводить не с $2n$ функциями (4), а с двумя функциями S и H. Ясно, насколько это важно при рассмотрении конкретных задач, особенно при большом числе степеней свободы n.

Можно заранее задать структуру новой функции Гамильтона $\mathcal{H}(\boldsymbol{Q},\ \boldsymbol{P},\ t)$ и пытаться так подобрать производящую функцию S, чтобы удовлетворялось равенство (54), которое, с учетом формул (48), записывается в виде

$$\frac{\partial S(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{Q},\ t)}{\partial t} + cH\left(\boldsymbol{q},\ \frac{1}{c}\left(\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{q}}\right)',\ t\right) = \mathcal{H}\left(\boldsymbol{Q},\ -\left(\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{q}}\right)',\ t\right). \tag{55}$$

Можно, например, потребовать, чтобы какие-то (или даже все) «координаты» Q_i $(i = 1,\ 2, \ldots ,\ n)$ не входили в новую функцию Гамильтона. И если удастся так подобрать S, чтобы удовлетворялось уравнение (55), то среди новых переменных в рассматриваемой задаче будут циклические «координаты», что позволяет (см. п. 164) понизить порядок системы дифференциальных уравнений движения на величину $2k$ (k — число циклических координат). А если все координаты циклические, то задача сводится к элементарным квадратурам, так как тогда $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\boldsymbol{P},\ t)$, и уравнения движения в новых переменных имеют вид

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i} = f_i(\boldsymbol{P},\ t), \qquad \frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_i} = 0 \quad (i = 1,\ 2, \ldots ,\ n),$$

и, если Q_{i0}, P_{i0} — начальные значения величин Q_i, P_i, отсюда следует, что

$$Q_i = \int\limits_0^t f_i(\boldsymbol{P}_0,\ t)\, dt + Q_{i0}, \qquad P_i = P_{i0} \quad (i = 1,\ 2, \ldots ,\ n).$$

Таким образом, мы имеем вполне определенный метод упрощения уравнений движения, который приводит к новой постановке задачи интегрирования уравнений динамики (1) — поиску функции S, удовлетворяющей уравнению в частных производных (55).

Пример 1. *Канонические преобразования примеров* 1, 3, 5 *п.* 170 *не являются свободными. В них переменные* $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{Q}$ *зависимы и свободно задаваться не могут.*

Пример 2. *Остальные канонические преобразования, рассмотренные в примерах п.* 170, *являются свободными, причем для преобразования* (29)

$$c = -1, \quad S = -\sum_{j=1}^{n} q_j Q_j, \tag{56}$$

для преобразования (31)

$$c = -\alpha\beta, \quad S = -\beta\sum_{j=1}^{n} q_j Q_j, \tag{57}$$

для преобразования (34)

$$c = 1, \quad S = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} q_j^2 \operatorname{ctg}\varphi_j \tag{58}$$

и для преобразования (37)

$$c = 2i, \quad S = \sum_{j=1}^{n}(q_j^2 - 2q_jQ_j + \frac{1}{2}Q_j^2). \tag{59}$$

174. О других типах производящих функций. Мы видели, что не все канонические преобразования являются свободными, и поэтому не каждое каноническое преобразование можно задать при помощи производящей функции вида $S(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{Q},\ t)$. Однако можно перейти к иным типам производящих функций. Пусть, например, преобразование (4) таково, что

$$\det\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{p}} \neq 0. \tag{60}$$

Тогда из последних n равенств (4) можно выразить $\boldsymbol{p}$ через $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{P}$ и t и можно получить производящую функцию S_1 канонического преобразования (4), зависящую не от $(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{Q},\ t)$, как это было в случае свободного преобразования, а от переменных $(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{P},\ t)$ [1]. В самом деле, перепишем (18) в виде

$$c\sum_{k=1}^{n} p_k\delta q_k - \sum_{k=1}^{n} P_k\delta Q_k - \sum_{k=1}^{n} Q_k\delta P_k + \sum_{k=1}^{n} Q_k\delta P_k = \delta F(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{p},\ t)$$

или

$$c\sum_{k=1}^{n} p_k\delta q_k + \sum_{k=1}^{n} Q_k\delta P_k = \delta\left(F(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{p},\ t) + \sum_{k=1}^{n} Q_kP_k\right).$$

Последнее равенство можно окончательно записать в виде

$$c\sum_{k=1}^{n} p_k\delta q_k + \sum_{k=1}^{n} Q_k\delta P_k = \delta S_1(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{P},\ t), \tag{61}$$

[1] Следует иметь в виду, что если каноническое преобразование свободное, то для него производящая функция не обязательно есть функция S от $(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{Q},\ t)$. Неравенства (46) и (60) могут, например, выполняться одновременно, и тогда для свободного канонического преобразования в качестве производящей функции можно также взять функцию S_1 от $(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{P},\ t)$.

где через S_1 обозначена функция $F + \sum\limits_{k=1}^{n} Q_k P_k$, в которой величины Q_k заменены на их выражения из первых n равенств (4), а переменная $\boldsymbol{p}$ заменена затем на ее значение $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{P},\ t)$, получающееся из последних n равенств (4).

Из (61) следует, что

$$\frac{\partial S_1}{\partial q_i} = cp_i, \quad \frac{\partial S}{\partial P_i} = Q_i \quad (i = 1,\ 2, \ldots ,\ n). \tag{62}$$

И в точности так же, как и для свободного канонического преобразования, можно получить выражение для функции Гамильтона преобразованной системы (1)

$$\mathcal{H} = cH + \frac{\partial S_1}{\partial t}, \tag{63}$$

где H и $\partial S_1/\partial t$ должны быть записаны в новых переменных. Верно и обратное: если заданы число $c \neq 0$ и дважды непрерывно дифференцируемая функция $S_1(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{P},\ t)$, удовлетворяющая условию

$$\det \left\| \frac{\partial^2 S_1}{\partial q_i \partial P_k} \right\|_{i,\ k=1}^{n} \neq 0, \tag{64}$$

то формулы (62) задают каноническое преобразование с валентностью, равной c. При условии (64) формулы (62) можно записать в виде равенств (4).

Мы рассмотрели два типа производящих функций $S(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{Q},\ t)$ и $S_1(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{P},\ t)$. Эти функции наиболее часто применяются при интегрировании (точном или приближенном) уравнений динамики. Но $\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{P}$ тоже не всегда можно принять за независимые переменные. Однако[1] если заданы $2n$ независимых функций Q_i, P_i от $2n$ независимых переменных q_i, p_i, то из $4n$ величин Q_i, P_i, q_i, p_i $(i = 1,\ 2, \ldots ,\ n)$ всегда можно выбрать $2n$ независимых так, чтобы при соответствующей нумерации переменных производящая функция U зависела от величин

$$q_1, \ldots , q_l, \quad p_{l+1}, \ldots , p_n, \quad Q_1, \ldots , Q_k, \quad P_{k+1}, \ldots , P_n \quad (l \geqslant 0, k \leqslant n), \tag{65}$$

и, быть может, от времени (в наборе $2n$ переменных (65) отсутствуют пары канонически сопряженных переменных q_i, p_i или Q_j, P_j). При

[1] См. § 29 книги: Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике, М.: Наука, 1966.

этом каноническая замена переменных и новая функция Гамильтона определяются по формулам

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = cp_i, \quad \frac{\partial U}{\partial p_g} = -cq_g, \quad \frac{\partial U}{\partial Q_j} = -P_j, \quad \frac{\partial U}{\partial P_h} = Q_h, \tag{66}$$

$$\mathcal{H} = cH + \frac{\partial U}{\partial t} \quad (i = 1, \ldots, l;\ g = l+1, \ldots, n; \quad j = 1, \ldots, k;\ h = k+1, \ldots, n). \tag{67}$$

Пример 1. *Тождественное преобразование* (28)

$$Q_j = q_j, \quad P_j = p_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

задается производящей функцией

$$S_1 = \sum_{j=1}^{n} q_j P_j, \tag{68}$$

при этом $c = 1$.

Пример 2. *Для преобразования* (30)

$$c = \alpha\beta, \quad S_1 = \alpha \sum_{j=1}^{n} q_j P_j. \tag{69}$$

Пример 3. *Для канонического преобразования* (32), *определяющего перенос начала координат в фазовом пространстве,*

$$c = 1, \quad S_1 = \sum_{j=1}^{n} q_j P_j + \sum_{j=1}^{n} (g_j(t) q_j - f_j(t) P_j). \tag{70}$$

Пример 4. *Пусть задана произвольная дифференцируемая обратимая замена обобщенных координат* $\boldsymbol{q} \to \boldsymbol{Q}$, *определяемая формулами*

$$Q_i = f_i(q_1, \ldots, q_n, t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{71}$$

При этом преобразовании новые координаты выражаются только через старые координаты (*но не импульсы*). *Оно является частным случаем канонических преобразований. Действительно, если положить* $c = 1$ *и*

$$S_1 = \sum_{j=1}^{n} P_j f_j(q_1, \ldots, q_n, t), \tag{72}$$

то, согласно формулам (62), *новые и старые импульсы связаны соотношениями*

$$p_i = \sum_{j=1}^{n} P_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i} \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{73}$$

Пример 5. *Рассмотрим важный частный случай предыдущего примера: переход к вращающейся системе координат. Пусть*

$$\boldsymbol{Q} = \mathbf{A}\boldsymbol{q}, \tag{74}$$

где $\mathbf{A}$ — *ортогональная матрица* ($\mathbf{A}' = \mathbf{A}^{-1}$), *которая не обязательно постоянна. Непосредственным вычислением нетрудно показать, что формулы* (74) *вместе с заменой переменных*

$$\boldsymbol{P} = \mathbf{A}\boldsymbol{p} \tag{75}$$

определяют унивалентное каноническое преобразование. Согласно формуле (72), *этому преобразованию соответствует производящая функция*

$$S_1 = \boldsymbol{P} \cdot \mathbf{A}\boldsymbol{q}. \tag{76}$$

Примечательно, что обобщенные импульсы преобразуются по тем же формулам, что и обобщенные координаты.

Новая функция Гамильтона $\mathcal{H}(\boldsymbol{Q},\ \boldsymbol{P}, t)$ *вычисляется по старой* $H(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{p},\ t)$ *в соответствии с равенством* (63):

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{Q},\ \boldsymbol{P}, t) = H(\mathbf{A}'\boldsymbol{Q},\ \mathbf{A}'\boldsymbol{P},\ t) + \frac{\partial S_1}{\partial t}. \tag{77}$$

Если матрица $\mathbf{A}$ *постоянна, то* $\partial S_1/\partial t \equiv 0$. *Если же* $\mathbf{A}$ *не будет постоянной матрицей, то*

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} = \boldsymbol{P} \frac{d\mathbf{A}}{dt} \boldsymbol{q} = \boldsymbol{P} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Q}. \tag{78}$$

Так как $\mathbf{A}$ — *ортогональная матрица, то произведение* $\frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{A}^{-1}$ (см. п. 24) — *кососимметрическая матрица. Пусть*

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{A}^{-1} = \begin{Vmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Если ввести вектор $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, *то*

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{Q}$$

и формула (78) *может быть записана в виде*

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} = \boldsymbol{P} \cdot [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{Q}] = \boldsymbol{\omega} \cdot [\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{P}].$$

Таким образом, окончательно получаем функцию Гамильтона, соответствующую движению во вращающейся системе координат:

$$\mathcal{H} = H(\mathbf{A}'\boldsymbol{Q}, \mathbf{A}'\boldsymbol{P}, t) + \boldsymbol{\omega} \cdot [\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{P}]. \tag{79}$$

Пример 6 (Переход от декартовых координат к полярным). *Пусть*

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi. \tag{80}$$

Если взять $c = 1$, *а*

$$S_1 = p_x r\cos\varphi + p_y r\sin\varphi,$$

то из равенств

$$p_r = \frac{\partial S_1}{\partial r} = p_x\cos\varphi + p_y\sin\varphi, \quad p_\varphi = \frac{\partial S_1}{\partial\varphi} = -p_x r\sin\varphi + p_y r\cos\varphi$$

находим

$$p_x = p_r\cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{r}p_\varphi, \quad p_y = p_r\sin\varphi + \frac{\cos\varphi}{r}p_\varphi. \tag{81}$$

Формулы (80), (81) *задают унивалентное каноническое преобразование* $x, y, p_x, p_y \to r, \varphi, p_r, p_\varphi$. *Если, например,*

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \Pi(\sqrt{x^2 + y^2}), \tag{82}$$

то

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\varphi^2) + \Pi(r). \tag{83}$$

Пример 7 (Переход от декартовых координат к сферическим). *Если*

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta, \tag{84}$$

то, положив $c = 1$, *а*

$$S_1 = p_x r \sin\theta \cos\varphi + p_y r \sin\theta \sin\varphi + p_z r \cos\theta,$$

из соотношений

$$p_r = \frac{\partial S_1}{\partial r}, \quad p_\varphi = \frac{\partial S_1}{\partial \varphi}, \quad p_\theta = \frac{\partial S_1}{\partial \theta}$$

получим

$$\begin{aligned} p_x &= \sin\theta\cos\varphi p_r - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}p_\varphi + \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}p_\theta, \\ p_y &= \sin\theta\sin\varphi p_r + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}p_\varphi + \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}p_\theta, \\ p_z &= \cos\theta p_r - \frac{\sin\theta}{r}p_\theta. \end{aligned} \tag{85}$$

Равенства (84), (85) *задают унивалентное каноническое преобразование* $x,\ y,\ z,\ p_x,\ p_y,\ p_z \to r,\ \varphi,\ \theta,\ p_r,\ p_\varphi,\ p_\theta$. *Например, для*

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \Pi\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right), \tag{86}$$

имеем

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta} + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) + \Pi(r). \tag{87}$$

Пример 8. *Пусть задана некоторая дифференцируемая обратимая замена обобщенных импульсов:*

$$p_i = g_i(P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n,\ t) \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \quad \det\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{P}} \neq 0. \tag{88}$$

Формулы (88) *задают связь старых и новых импульсов* (*но не координат*).

Положим $c = 1$, *а*

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} q_k g_k(P_1,\ P_2, \ldots,\ P_n,\ t). \tag{89}$$

Тогда из формул (62) *находим соотношения*

$$Q_i = \frac{\partial S_1}{\partial P_i} = \sum_{k=1}^{n} q_k \frac{\partial g_k}{\partial P_i} \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{90}$$

Эти соотношения представляют собой линейную неоднородную систему уравнений относительно $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Определитель системы — это транспонированный якобиан из (88). *Так как он отличен от нуля, то система уравнений* (90) *однозначно определяет величины $q_1, q_2, \ldots, q_n$ как функции $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{P}$ и t:*

$$q_i = h_i(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P_1, P_2, \ldots, P_n, t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{91}$$

Формулы (88) *и* (91) *задают унивалентное каноническое преобразование.*

§ 5. Метод Якоби интегрирования уравнений движения

175. Уравнение Гамильтона–Якоби. Теория канонических преобразований приводит нас к методу Якоби интегрирования канонической системы уравнений движения

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Если эту систему подвергнуть свободному унивалентному каноническому преобразованию, определяемому уравнениями

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial S}{\partial Q_i} = -P_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

где производящая функция S имеет в качестве аргументов величины $q_1, \ldots, q_n$, $Q_1, \ldots, Q_n$, t, то, согласно п. 173, система уравнений (1) примет вид

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i}, \quad \frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

где новая функция Гамильтона $\mathcal{H}$ определяется равенством

$$\mathcal{H} = H(q_i, p_i, t) + \frac{\partial S(q_i, Q_i, t)}{\partial t}, \tag{4}$$

в правой части которого величины q_i, p_i (после вычисления частной производной $\partial S/\partial t$) должны быть выражены через Q_j, P_j на основании уравнений (2).

Если функция S выбрана так, что $\mathcal{H} \equiv 0$, то уравнения (3) сразу интегрируются:

$$Q_i = \alpha_i \quad P_i = \beta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$