Эти соотношения представляют собой линейную неоднородную систему уравнений относительно $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Определитель системы — это транспонированный якобиан из (88). *Так как он отличен от нуля, то система уравнений* (90) *однозначно определяет величины $q_1, q_2, \ldots, q_n$ как функции $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{P}$ и t:*

$$q_i = h_i(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P_1, P_2, \ldots, P_n, t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (91)$$

Формулы (88) *и* (91) *задают унивалентное каноническое преобразование.*

§ 5. Метод Якоби интегрирования уравнений движения

175. Уравнение Гамильтона–Якоби. Теория канонических преобразований приводит нас к методу Якоби интегрирования канонической системы уравнений движения

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (1)$$

Если эту систему подвергнуть свободному унивалентному каноническому преобразованию, определяемому уравнениями

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial S}{\partial Q_i} = -P_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (2)$$

где производящая функция S имеет в качестве аргументов величины $q_1, \ldots, q_n$, $Q_1, \ldots, Q_n$, t, то, согласно п. 173, система уравнений (1) примет вид

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i}, \quad \frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (3)$$

где новая функция Гамильтона $\mathcal{H}$ определяется равенством

$$\mathcal{H} = H(q_i, p_i, t) + \frac{\partial S(q_i, Q_i, t)}{\partial t}, \qquad (4)$$

в правой части которого величины q_i, p_i (после вычисления частной производной $\partial S/\partial t$) должны быть выражены через Q_j, P_j на основании уравнений (2).

Если функция S выбрана так, что $\mathcal{H} \equiv 0$, то уравнения (3) сразу интегрируются:

$$Q_i = \alpha_i \quad P_i = \beta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (5)$$

где α_i, β_i — произвольные постоянные. Если функция S удовлетворяет условию (49) п. 173, то из (2) находится зависимость исходных переменных от времени t и $2n$ произвольных постоянных α_i, β_i:

$$q_i = q_i(t,\ \alpha_j,\ \beta_j), \quad p_i = p_i(t,\ \alpha_j,\ \beta_j). \tag{6}$$

Функция S, согласно (2) и (4), должна при этом удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_i,\ \frac{\partial S}{\partial q_i},\ t\right) = 0. \tag{7}$$

Это уравнение в частных производных называется *уравнением Гамильтона–Якоби.* В нем S есть функция $q_1,\ q_2, \ldots,\ q_n$ и t; величины $Q_1,\ Q_2, \ldots,\ Q_n$ рассматриваются как параметры.

Общее решение уравнения в частных производных зависит от произвольных функций. Такое решение называется *общим интегралом* этого уравнения. Однако в приложениях к решению задач механики главную роль играет не общий, а полный интеграл уравнения (7). *Полным интегралом* уравнения (7) называется его решение $S(q_i,\ \alpha_i,\ t)$, зависящее от n произвольных постоянных $\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots,\ \alpha_n$ и удовлетворяющее условию

$$\det\left\|\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_k}\right\|_{i,\ k=1}^{n} \neq 0. \tag{8}$$

Таким образом, мы получаем следующий способ интегрирования уравнений движения (1), основанный на рассмотрении уравнения (7).

Теорема (Якоби). *Если $S(q_i,\ \alpha_i,\ t)$ — полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби* (7), *содержащий n произвольных постоянных $\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots,\ \alpha_n$, то решение* (6) *уравнений* (1) *находится из соотношений*

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = -\beta_i \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n), \tag{9}$$

где β_i — произвольные постоянные.

Теорема Якоби позволяет свести интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1) к нахождению полного интеграла уравнения (7) в частных производных. Вторая задача, конечно, не проще первой, а даже более сложна. Но оказывается, что метод Якоби является весьма эффективным среди существующих методов нахождения точных решений системы (1). Он также является одним из наиболее мощных методов приближенного интегрирования канонических уравнений.

Общего метода нахождения полного интеграла уравнения Гамильтона–Якоби (7) при произвольной функции H не существует. Остановимся только на некоторых частных способах нахождения полного интеграла.

176. Уравнение Гамильтона–Якоби для систем с циклическими координатами. Пусть координаты $q_{k+1}, \ldots, q_n$ — циклические. Тогда

$$H = H(q_1, \ldots, q_k, p_1, \ldots, p_k, p_{k+1}, \ldots, p_n, t).$$

Полный интеграл уравнения (7) ищем в виде

$$S = \alpha_{k+1} q_{k+1} + \ldots + \alpha_n q_n + S^*(q_1, \ldots, q_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, t). \tag{10}$$

Подставив (10) в (7), получим уравнение для S^*

$$\frac{\partial S^*}{\partial t} + H(q_1, \ldots, q_k, \frac{\partial S^*}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S^*}{\partial q_k}, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n, t) = 0. \tag{11}$$

Таким образом, нахождение полного интеграла уравнения (7) приводит к рассмотрению уравнения (11), в котором S^* зависит уже не от $(n+1)$-й переменной, а от $(n-k+1)$-й, т. е. число независимых переменных уменьшилось на число циклических координат.

177. Уравнение Гамильтона–Якоби для консервативных и обобщенно консервативных систем. Пусть функция Гамильтона не зависит явно от времени:

$$H = H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n).$$

Тогда существует обобщенный интеграл энергии $H = h$, где h — произвольная постоянная. В уравнении (7) положим

$$S = -ht + V, \tag{12}$$

где функция V не зависит от t. Для нее получаем уравнение

$$H(q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial q_n}) = h. \tag{13}$$

Это уравнение и будет уравнением Гамильтона–Якоби для консервативных и обобщенно консервативных систем. Из (13) находим $V = V(q_1, \ldots, q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, h)$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ — произвольные постоянные, не зависящие от h. Из (12) имеем выражение для S:

$$S = -ht + V(q_1, \ldots, q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, h). \tag{14}$$

Если функция S удовлетворяет условию (8) ($\alpha_n = h$), то (14) — полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби (7) и равенства (9) дают соотношения

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i \; (i = 1,\ 2, \ldots ,\ n), \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = -\beta_i \; (i = 1,\ 2, \ldots ,\ n-1), \tag{15}$$

$$\frac{\partial V}{\partial h} = t - \beta_n, \tag{16}$$

где $\beta_1, \ldots , \beta_n$ — произвольные постоянные.

Последние $n-1$ соотношений в (15) — геометрические: они дают траектории в n-мерном координатном пространстве $q_1, \ldots , q_n$. Вместе с равенством (16) эти соотношения дают и закон движения по траекториям. Первые n соотношений в (15) служат для определения импульсов p_i $(i = 1,\ 2, \ldots ,\ n)$.

178. Характеристическая функция Гамильтона. Функцию V, входящую в правую часть равенства (14), называют *характеристической функцией Гамильтона.* Она удовлетворяет уравнению (13) и была введена в п. 177 как не зависящая от времени часть производящей функции S, задающей свободное каноническое преобразование, приводящее функцию Гамильтона $H(q_1, \ldots,\ q_n,\ p_1, \ldots,\ p_n)$ консервативной или обобщенно консервативной системы к функции $\mathcal{H} \equiv 0$.

Но функцию $V(q_1, \ldots,\ q_n,\ \alpha_1, \ldots,\ \alpha_{n-1},\ h)$ можно рассмотреть как производящую функцию некоторого канонического преобразования, свойства которого отличны от свойств преобразования, осуществляемого функцией S. Рассмотрим унивалентное каноническое преобразование, при котором новые импульсы P_i будут постоянными α_i $(i = 1,\ 2, \ldots,\ n)$, причем $\alpha_n = h$. Пусть соответствующей производящей функцией будет $V(q_1, \ldots,\ q_n,\ P_1, \ldots,\ P_{n-1},\ P_n)$. Согласно п. 174, старые и новые переменные связаны соотношениями вида (62):

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial V}{\partial P_i} = \frac{\partial V}{\partial \alpha_i}. \tag{17}$$

Так как $H = h = \alpha_n$, то отсюда следует уравнение

$$H(q_1, \ldots,\ q_n,\ \frac{\partial V}{\partial q_1}, \ldots,\ \frac{\partial V}{\partial q_n}) = h,$$

которое совпадает с уравнением (13). Но функция V не зависит от t, поэтому из равенства (63) п. 174 имеем такое выражение для новой функции Гамильтона

$$\mathcal{H} = P_n. \tag{18}$$

Таким образом, характеристическая функция Гамильтона задает каноническое преобразование, приводящее функцию $H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ к такой форме, когда все новые обобщенные координаты Q_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ являются циклическими.

В новых переменных

$$\frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_i} = 0 \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n), \tag{19}$$

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i} = \delta_{in}, \tag{20}$$

где δ_{in} — символ Кронекера.

Поэтому

$$P_i = \alpha_i = \text{const}, \quad Q_i = -\beta_i = \text{const} \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n-1),$$

$$P_n = h = \text{const}, \quad Q_n - t = -\beta_n = \text{const},$$

что, в силу (17), находится в соответствии с формулами (15), (16).

Замечание 3. *Выбор величин α_i, входящих в характеристическую функцию Гамильтона, в качестве новых импульсов является в некоторой степени произвольным. Постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ не имеют, вообще говоря, определенного физического смысла, а просто представляют собой набор постоянных, появляющихся в процессе нахождения полного интеграла уравнения Гамильтона–Якоби.*

Применим к импульсам $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ произвольное дифференцируемое обратимое преобразование $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \to \alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*$:

$$\alpha_1 = g_1(\alpha_1^*, \ldots,\ \alpha_n^*), \ldots, \alpha_n = g_n(\alpha_1^*, \ldots,\ \alpha_n^*). \tag{21}$$

Замене импульсов (21) *можно поставить в соответствие унивалентное каноническое преобразование Q_i, $\alpha_i \to Q_i^*$, α_i^* всех канонически сопряженных переменных $(i = 1,\ 2, \ldots,\ n)$. Для этого (см. пример* 8 *п.* 174) *достаточно взять производящую функцию в виде*

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} Q_k g_k(\alpha_1^*, \ldots,\ \alpha_n^*).$$

В новых переменных функция Гамильтона будет иметь вид

$$\mathcal{H} = g_n(\alpha_1^*, \ldots,\ \alpha_n^*). \tag{22}$$

Преимущество новых импульсов α_i^* состоит в том, что они могут быть увязаны с физической сущностью задачи. Один частный случай выбора новых импульсов вместо величин α_i рассмотрен далее в §6.

179. Разделение переменных. Известны замечательные случаи, когда полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби (7) может быть найден при помощи разделения переменных. Метод разделения переменных состоит в том, что решение уравнения (7) ищется в виде суммы функций, каждая из которых зависит только от одной из переменных $q_1, \ldots, q_n$ и времени (и, конечно, произвольных постоянных):

$$S = S_0(t) + S_1(q_1,\ t) + S_2(q_2,\ t) + \ldots + S_n(q_n,\ t). \tag{23}$$

К сожалению, не существует простого критерия, позволяющего в общем случае по структуре функции Гамильтона судить о возможности разделения переменных в уравнении (7) [1]. Мы укажем только два простейших случая разделения переменных для консервативной или обобщенно консервативной системы.

1°. Пусть

$$H = H(f_1(q_1,\ p_1), \ldots, f_n(q_n,\ p_n)), \tag{24}$$

т. е. функция Гамильтона зависит от n функций f_i, каждая из которых зависит только от одной пары «своих» канонически сопряженных переменных q_i, p_i. Будем предполагать, что

$$\frac{\partial f_i}{\partial p_i} \neq 0 \quad (i = 1,\ 2, \ldots, n). \tag{25}$$

Уравнение Гамильтона–Якоби (13) имеет вид

$$H\left(f_1\Big(q_1,\ \frac{\partial V}{\partial q_1}\Big), \ldots, f_n\Big(q_n,\ \frac{\partial V}{\partial q_n}\Big)\right) = h. \tag{26}$$

Положим

$$f_i\Big(q_i,\ \frac{\partial V}{\partial q_i}\Big) = \alpha_i \quad (i = 1,\ 2, \ldots, n). \tag{27}$$

При условии (25) равенства (27) можно разрешить относительно $\partial V/\partial q_i$:

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = g_i(q_i,\ \alpha_i). \tag{28}$$

Тогда

$$V = \sum_{i=1}^{n} \int g_i(q_i,\ \alpha_i)\, dq_i,$$

[1]Исследование этого вопроса содержится в работе: Яров-Яровой М. С. Об интегрировании уравнения Гамильтона–Якоби методом разделения переменных // ПММ, 1963, Т. 27, вып. 6, С. 973-987.

а функция

$$S = -ht + \sum_{i=1}^{n} \int g_i(q_i,\ \alpha_i)\ dq_i \tag{29}$$

является решением уравнения Гамильтона–Якоби (7). Величина h в (29) есть функции произвольных постоянных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$:

$$h = H(\alpha_1, \ldots, \alpha_n). \tag{30}$$

Так как

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_k} = \frac{\partial g_i}{\partial \alpha_k} \quad (i,\ k = 1,\ 2, \ldots, n),$$

а согласно (27) и (28)

$$\frac{\partial g_i}{\partial \alpha_k} = \frac{1}{\partial f_i / \partial p_i} \delta_{ik}, \tag{31}$$

то условие (8), записываемое в рассматриваемом случае в виде неравенства

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial \alpha_i} \neq 0,$$

очевидно, удовлетворяется. Следовательно, функция (29) будет полным интегралом уравнения (7).

2°. Пусть функция H выражается последовательно «функцией от функции», где каждая функция f_i зависит от предыдущей функции f_{i-1} и «своей» пары канонически сопряженных переменных $q_i,\ p_i$:

$$H = f_n(f_{n-1},\ q_n,\ p_n), \quad f_{n-1} = f_{n-1}(f_{n-2},\ q_{n-1},\ p_{n-1})$$

и т. д., т. е. функция Гамильтона имеет такую структуру:

$$H = f_n\{\ldots f_3\{f_2[f_1(q_1,\ p_1),\ q_2,\ p_2],\ q_3,\ p_3\}, \ldots, q_n,\ p_n\}. \tag{32}$$

Будем считать, что

$$\frac{\partial f_i}{\partial p_i} \neq 0 \quad (i = 1,\ 2, \ldots, n). \tag{33}$$

Для получения решения уравнения (13) положим

$$f_1\left(q_1,\ \frac{\partial V}{\partial q_1}\right) = \alpha_1,\ f_2\left(\alpha_1,\ q_2,\ \frac{\partial V}{\partial q_2}\right) = \alpha_2,\ \ldots,$$

$$f_n\left(\alpha_{n-1},\ q_n,\ \frac{\partial V}{\partial q_n}\right) = \alpha_n = h.$$

При условии (33) эти равенства можно разрешить относительно производных $\partial V/\partial q_i$ $(i = 1,\ 2, \ldots,\ n)$. Получим

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = g_1(q_1,\ \alpha_1),\ \frac{\partial V}{\partial q_2} = g_2(q_2,\ \alpha_1,\ \alpha_2), \ldots,\ \frac{\partial V}{\partial q_n} = g_n(q_n,\ \alpha_{n-1},\ \alpha_n).$$

Функция

$$S = -\alpha_n t + \sum_{i=1}^{n} \int g_i(q_i,\ \alpha_{i-1},\ \alpha_i)\, dq_i \tag{34}$$

будет решением уравнения (7). Легко проверить, что неравенство (8) при условии (33) выполнено, поэтому функция (34) будет полным интегралом уравнения (7).

Мы рассмотрели весьма частные случаи, когда специальная структура функции Гамильтона позволяет дать общий конструктивный способ построения общего интеграла уравнения Гамильтона–Якоби. Следует, однако, отметить, что указанные способы разделения переменных применимы к таким важным задачам механики, как задача о гармоническом осцилляторе, задача о движении физического маятника, задача двух тел, задача о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае Лагранжа и др.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1 (Свободное вертикальное падение материальной точки у поверхности Земли). *Пусть ось Oq направлена вертикально вниз. Если m — масса точки, то*

$$H = \frac{1}{2m} p^2 - mgq,$$

где p — импульс, соответствующий обобщенной координате q, g — ускорение свободного падения.

Если

$$\frac{1}{2m} p^2 - mgq = h = \alpha,$$

то

$$p = \sqrt{2m(\alpha + mgq)} \tag{35}$$

и полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 - mgq = 0$$

запишется в виде

$$S = -\alpha t + \int \sqrt{2m(\alpha + mgq)}\, dq.$$

В соответствии с формулами (9) *имеем*

$$\frac{\partial S}{\partial q} = p, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha} = -\beta.$$

Первое из этих соотношений дает равенство (35)*, а из второго получаем*

$$-t + \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dq}{\sqrt{\alpha + mgq}} = -\beta,$$

или

$$-t + \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{\sqrt{\alpha + mgq}}{g} = -\beta. \tag{36}$$

Произвольные постоянные α *и* β *находятся из начальных условий. Пусть при* $t = 0$ *имеем* $q = 0$, $\dot{q} = 0$*. Тогда из* (35), (36) *и равенства* $p = m\dot{q}$ *следует, что* $\alpha = \beta = 0$ *и*

$$q = \frac{gt^2}{2}, \quad p = mgt.$$

Пример 2 (Движение стержня, опирающегося на горизонтальную плоскость и вертикальную ось). *Пусть в однородном поле тяжести движется бесконечно тонкий однородный стержень длиной* $2l$ *и массой* m*. Нижний конец стержня перемещается по гладкой горизонтальной плоскости, а верхний его конец на рассматриваемой стадии движения опирается на гладкую вертикальную ось* OZ (рис. 143)*. Найдем полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби в этой задаче.*

Пусть q_1 *— угол между проекцией стержня на плоскость* OXY *и осью* OX*, а* q_2 *— угол, который образует стержень с вертикалью. Со стержнем жестко свяжем систему координат* $Gxyz$*, оси которой направлены по его главным центральным осям инерции, причем ось* Gy *лежит в плоскости, проходящей через стержень и вертикаль* OZ*. Для кинетической и потенциальной энергии имеем выражения*

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + \frac{1}{2}mv_G^2,$$
$$\Pi = mgl\cos q_2,$$

где A, B, C *— моменты инерции стержня относительно осей* Gx, Gy, Gz*, а* p, q, r *— проекции его угловой скорости на эти оси,* v_G *— скорость центра масс стержня,* g *— ускорение свободного падения.*

Имеем $A = B = \frac{1}{3}ml^2$, *а* $C = 0$ *ввиду того, что стержень бесконечно тонкий. Далее,*

$$p = \dot{q}_2, \quad q = \dot{q}_1 \sin q_2,$$

$$v_G^2 = l^2(\sin^2 q_2 \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2),$$

поэтому

$$T = \frac{2}{3}ml^2(\sin^2 q_2 \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2).$$

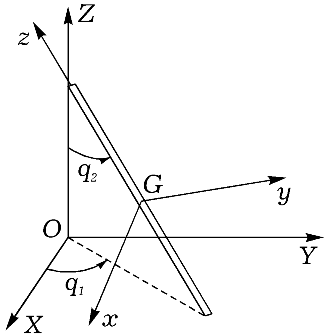

Рис. 143

При помощи функции Лагранжа $L = T - \Pi$ *находим обобщенные импульсы*

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{4}{3}ml^2 \sin^2 q_2 \dot{q}_1, \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \frac{4}{3}ml^2 \dot{q}_2.$$

Так как рассматриваемая система консервативна, то функция Гамильтона имеет вид $H = T + \Pi$ *и для нее получаем следующее выражение:*

$$H = \frac{3}{8ml^2}\left(\frac{p_1^2}{\sin^2 q_2} + p_2^2\right) + mgl\cos q_2.$$

Положим

$$p_1 = \alpha_1, \quad \frac{3}{8ml^2}\left(\frac{\alpha_1^2}{\sin^2 q_2} + p_2^2\right) + mgl\cos q_2 = \alpha_2.$$

Тогда полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби будет иметь вид

$$S = -\alpha_2 t + \alpha_1 q_1 + \int \sqrt{\frac{8ml^2}{3}(\alpha_2 - mgl\cos q_2) - \frac{\alpha_1^2}{\sin^2 q_2}}\, dq_2.$$

180. Теорема Лиувилля об интегрируемости гамильтоновой системы в квадратурах. В п. 163 при помощи теории множителя показано, что для построения общего интеграла системы

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n), \tag{37}$$

где $H = H(q_i,\ p_i,\ t)$, достаточно найти $2n - 1$ первых интегралов. Построение же $2n$-го интеграла сводится к квадратурам. Изложенный в п.п. 175–179 метод Якоби интегрирования системы (37) позволяет получить существенно более сильный результат: во многих случаях для сведения интегрирования системы (37) к квадратурам достаточно знать только n ее первых интегралов.

Говорят, что функции $u_1, u_2, \ldots, u_l$ от $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t$ находятся в инволюции друг к другу или что они образуют систему в инволюции, если все скобки Пуассона (u_i, u_k) $(i, k = 1, 2, \ldots, l)$ тождественно равны нулю.

Теорема (Лиувилля). *Пусть система уравнений* (37) *имеет n первых интегралов*

$$f_i(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t) = \alpha_i = \text{const} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{38}$$

находящихся в инволюции, т. е.

$$(f_r, f_s) = 0 \quad (r, s = 1, 2, \ldots, n), \tag{39}$$

причем

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(p_1, \ldots, p_n)} \neq 0. \tag{40}$$

Тогда интегрирование системы (37) *сводится к квадратурам.*

Доказательство.

Заметим сначала, что при условии (40) уравнения (38) можно разрешить относительно обобщенных импульсов. В результате получим

$$p_i = \varphi_i(q_1, \ldots, q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{41}$$

Покажем, что при выполнении условий теоремы имеют место равенства

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_i} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n). \tag{42}$$

Заменив в равенствах (38) величины p_i на их значения φ_i из (41) и продифференцировав затем r-ое из получившихся тождеств по q_i, получим

$$\frac{\partial f_r}{\partial q_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_r}{\partial p_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_i} = 0.$$

Умножив обе части этого тождества на производную $\partial f_s / \partial p_i$ и произведя затем суммирование по i, придем к соотношению

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_r}{\partial q_i} \frac{\partial f_s}{\partial p_i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_r}{\partial p_k} \frac{\partial f_s}{\partial p_i} \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_i} = 0 \quad (r, s = 1, 2, \ldots, n). \tag{43}$$

Аналогично, умножив на $\partial f_r/\partial p_k$ обе части тождества, получающегося в результате дифференцирования по q_k s-го из равенств (38) (при $p_i = \varphi_i$) и произведя затем суммирование по k, получим

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_r}{\partial p_k}\frac{\partial f_s}{\partial q_k} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_r}{\partial p_k}\frac{\partial f_s}{\partial p_i}\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k} = 0.$$

Если здесь в первой сумме изменить индекс суммирования k на индекс i и поменять порядок суммирования в двойной сумме, то придем к соотношению

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_r}{\partial p_i}\frac{\partial f_s}{\partial q_i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_r}{\partial p_k}\frac{\partial f_s}{\partial p_i}\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k} = 0 \quad (r,\ s = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{44}$$

Вычитая почленно равенства (43) и (44) и учитывая условия (39), получаем

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_r}{\partial p_k}\frac{\partial f_s}{\partial p_i}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_i}\right) = 0 \quad (r,\ s = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{45}$$

Возьмем n из этих соотношений, соответствующих какому-то фиксированному значению r, и запишем их в виде

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_s}{\partial p_i} x_i = 0 \quad (s = 1,\ 2, \ldots,\ n), \tag{46}$$

где

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_r}{\partial p_k}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_i}\right).$$

Система уравнений (46) при условии (40) имеет только тривиальное решение, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_r}{\partial p_k}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_i}\right) = 0 \quad (i,\ r = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{47}$$

Взяв теперь n из этих соотношений, соответствующих фиксированному значению i, совершенно аналогично покажем, что все выражения, заключенные в круглые скобки в (47), равны нулю, т. е. справедливы равенства (42).

Теперь обозначим H^* функцию Гамильтона H из (37), в которой величины p_i заменены их значениями φ_i из (41). Покажем, что

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = -\frac{\partial H^*}{\partial q_i} \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{48}$$

Имеем из (37),(41) и (42)

$$-\frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{dp_i}{dt} = \frac{d\varphi_i}{dt} = \frac{\partial\varphi_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\varphi_i}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial\varphi_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\varphi_j}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_j}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial\varphi_j}{\partial q_i} = -\frac{\partial H^*}{\partial q_i},$$

и справедливость равенства (48) доказана.

Равенства (42) и (48) являются необходимыми и достаточными условиями существования такой функции S от q_1, $q_2, \ldots$, q_n, t и от постоянных $\alpha_1, \ldots$, α_n, что

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = \varphi_i, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -H^*. \tag{49}$$

Из математического анализа известно, что нахождение такой функции S требует только квадратур, т. е. вычисления интегралов от известных функций.

Равенства (49) показывают, что функция S удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби, соответствующему системе (37). Покажем, что S будет полным интегралом этого уравнения. Для этого надо проверить выполнимость неравенства (8), которое, в силу первых n равенств (49), приводится к виду

$$\det \left\| \frac{\partial\varphi_i}{\partial\alpha_k} \right\|_{i,\, k=1}^{n} \neq 0. \tag{50}$$

Эти неравенства представляют собой необходимые и достаточные условия разрешимости уравнений (41) относительно $\alpha_1, \ldots$, α_n. Но уравнения (41) эквивалентны исходным интегралам (38), которые при получении уравнений (41) уже разрешены относительно $\alpha_1, \ldots$, α_n. Следовательно, неравенство (50) выполнено и S — полный интеграл.

При известном полном интеграле S интегрирование уравнений (37) завершается рассмотрением соотношений (9).

Следует отметить, что далеко не каждая система (37) приводится к квадратурам. Обычно нельзя найти необходимого количества первых интегралов. И не потому, что их нахождение технически сложно, а потому, что существуют причины принципиального характера, препятствующие интегрируемости[1].

[1]Подробное изложение этой проблемы можно найти в статье: Козлов В. В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // УМН, 1983, Т. 38, вып. 1, С. 3–67.