§ 6. Переменные действие–угол

181. Случай одной степени свободы. Продолжим начатое в п. п. 177–179 изучение некоторых вопросов, связанных с интегрированием консервативных и обобщенно консервативных систем. Будем изучать системы, движения которых обладают описанным ниже свойством периодичности. Для таких систем Делонэ предложил специальный выбор постоянных импульсов α_i^* $(i = 1,\ 2, \ldots,\ n)$ в характеристической функции Гамильтона п. 178. Эти новые импульсы представляют собой n независимых функций от набора величин α_i, появляющихся при нахождении полного интеграла уравнения Гамильтона–Якоби. Они называются *действиями* (точные определения см. далее) и ниже чаще всего будут обозначаться I_i. Канонически сопряженные к ним координаты w_i называются *угловыми переменными.* Переменные действие–угол I_i, w_i весьма удобны для описания движений, обладающих свойством периодичности. Они находят широкое применение в теории возмущений.

Чтобы понять сущность метода Делонэ, целесообразно сначала рассмотреть случай системы с одной степенью свободы. Фазовое пространство такой системы является двумерной плоскостью q, p, и периодические движения могут быть двух различных типов.

В движениях первого типа функции $q(t)$, $p(t)$ являются периодическими функциями с одним и тем же периодом. Точка, изображающая движение в фазовой плоскости, описывает замкнутую кривую. В этом случае говорят, что имеет место случай колебаний. Примером могут служить колебания маятника, рассмотренные в п. п. 93–96. На рис. 94 им отвечают замкнутые фазовые кривые, окружающие особые точки типа центр.

В движениях второго типа сама величина $q(t)$ не является периодической функцией, но когда она увеличивается или уменьшается на величину q_0, конфигурация системы не меняется. Здесь фазовые кривые $p = p(q)$ незамкнуты и имеют период q_0 по q. Периодические движения второго типа называют вращениями. Простейшим примером может служить движение твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Координата q здесь является углом поворота тела, и ее изменение на величину $q_0 = 2\pi$ не изменяет положения тела. На рис. 94 случаю вращений отвечают незамкнутые фазовые кривые, заполняющие части плоскости, лежащие выше и ниже сепаратрис.

Пусть $H = H(q, p)$ — функция Гамильтона системы с одной степенью свободы, причем $\dfrac{\partial H}{\partial p} \neq 0$. Тогда, согласно п. 177–179, характеристическая функция Гамильтона $V = V(q,\ \alpha)$, где $\alpha = h$ — постоянная интеграла $H = h$. Из формул (17) п. 178 имеем

$$p = \frac{\partial V}{\partial q}. \tag{1}$$

Вместо α введем величину I по формуле

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p\, dq, \tag{2}$$

где интеграл берется по полному циклу изменения q (цикла колебания или вращения, смотря по тому, какому случаю отвечает фазовая кривая, определяемая уравнением $H(q,\ p) = h$). Величина I называется ***переменной действие***. Из (2) видно, что I — это поделенная на 2π площадь, ограниченная замкнутой фазовой кривой, в случае колебаний или площадь, заключенная между фазовой кривой и отрезком оси q длины q_0, в случае вращений.

Подставив (1) в (2), получим

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial V(q,\ \alpha)}{\partial q} dq, \tag{3}$$

т. е. $I = I(\alpha)$. При условии $\dfrac{dI}{d\alpha} \neq 0$ из (3) находим $\alpha = \alpha(I)$. И тогда (см. п. 178) получаем новую функцию Гамильтона $H = \alpha(I)$. Производящая функция унивалентного канонического преобразования $q, p \to w, I$, вводящего переменные действие–угол, будет функцией $q,\ I$: $V = V(q,\ \alpha(I))$. ***Угловая переменная*** w определяется равенством

$$w = \frac{\partial V}{\partial I}. \tag{4}$$

Таким образом, алгоритм введения переменных действие–угол в гамильтоновой системе с одной степенью свободы выглядит так. Из уравнения $H(q,\ p) = h$ находим функцию $p = p(q,\ h)$, а затем вычисляем переменную I как функцию h:

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p(q,\ h)\, dq. \tag{5}$$

Обращение функции $I = I(h)$ дает $h = h(I)$. Производящая функция $V(q,\ I)$, задающая замену $q, p \to w, I$, определяется равенством

$$V(q,\ I) = \int p(q,\ h(I))\, dq. \tag{6}$$

Неявно замена $q, p \to w, I$ задается формулами

$$p = \frac{\partial V}{\partial q}, \quad w = \frac{\partial V}{\partial I}. \tag{7}$$

Новая функция Гамильтона

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(I) = h(I). \tag{8}$$

В переменных действие–угол уравнения движения будут такими:

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial w} = 0, \quad \frac{dw}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} = \omega(I). \tag{9}$$

Отсюда следует, что

$$I = I_0 = \text{ const}, \quad w = \omega(I_0)t + w_0. \tag{10}$$

Величина ω называется частотой рассматриваемого периодического движения. Существенно то, что процедура получения величины ω не потребовала ничего, кроме квадратур и разрешения уравнений относительно некоторых переменных.

Отметим, что когда координата q совершает полный цикл изменения (в случае колебаний или вращений), то угловая переменная w возрастает на 2π. В самом деле, обозначая через Δw приращение w за цикл изменения q, имеем, с учетом (4),

$$\Delta w = \oint \frac{\partial w}{\partial q}\, dq = \oint \frac{\partial^2 V}{\partial I \partial q}.$$

Вынеся производную по I за знак интеграла и приняв во внимание формулу (3), получим

$$\Delta w = \frac{\partial}{\partial I} \oint \frac{\partial V}{\partial q} dq = \frac{\partial}{\partial I}(2\pi I) = 2\pi.$$

Это поясняет название величины w угловой переменной. За один цикл величина w изменяется на 2π, и налицо полная аналогия с вращением тела вокруг оси (частота ω — аналог угловой скорости тела, w — аналог угла его поворота вокруг оси).

Пример 1 (Твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси). *Будем считать, что моменты внешних сил отсутствуют. Тогда, если A — момент инерции тела относительно оси вращения, а φ — угол его поворота вокруг оси, то*

$$T = \frac{1}{2} A \dot{\varphi}^2, \quad \Pi = 0; \quad p_\varphi = A\dot{\varphi}, \quad H = \frac{p_\varphi^2}{2A}.$$

Считая, что $\dot{\varphi} > 0$, *из уравнения* $H = h$ *находим* $p_\varphi = \sqrt{2Ah}$ *и, следовательно,*

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p_\varphi \, d\varphi = \frac{\sqrt{2Ah}}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \sqrt{2Ah};$$

$$V = \int p_\varphi \, d\varphi = I\varphi, \quad w = \frac{\partial V}{\partial I} = \varphi, \quad p_\varphi = \frac{\partial V}{\partial \varphi} = I;$$

$$\mathcal{H} = \frac{I^2}{2A}, \quad \omega = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} = \frac{I}{A}.$$

Пример 2 (Гармонический осциллятор частоты ω). *Функцию Гамильтона возьмем в виде*

$$H = \frac{1}{2}\omega \left(q^2 + p^2\right).$$

Из уравнения $H = h$ *имеем* $p = \pm\sqrt{\dfrac{2h}{\omega} - q^2}$. *Если в правой части равенства*

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p \, dq$$

сделать замену $q = \sqrt{\dfrac{2h}{\omega}} \sin x$, *то получим*

$$I = \frac{h}{\pi\omega} \int\limits_0^{2\pi} \cos^2 x \, dx = \frac{h}{\omega},$$

то есть

$$\mathcal{H} = \omega I.$$

Для производящей функции замены $q, p \to w, I$ *имеем выражение*

$$V = \pm \int \sqrt{\frac{2h}{\omega} - q^2} \, dq = \pm \int \sqrt{2I - q^2} \, dq.$$

Из формул (7) *находим замену, вводящую переменные действие–угол, в виде*

$$q = \sqrt{2I} \sin w, \quad p = \sqrt{2I} \cos w. \tag{11}$$

С заменой (11) *мы уже встречались ранее в примере* 6 *п.* 170.

182. Переменные действие–угол в задаче о движении маятника. Задача о движении маятника подробно исследована в п. п. 93–96. Несколько изменяя принятые там обозначения, напишем дифференциальное уравнение, описыващее движения маятника, в виде

$$\ddot{q} + \omega_0^2 \sin q = 0. \tag{12}$$

Это уравнение второго порядка может быть представлено в виде системы двух гамильтоновых дифференциальных уравнений первого порядка с функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}p^2 - \omega_0^2 \cos q. \tag{13}$$

Для введения переменных действие–угол случай колебаний и вращений маятника надо рассмотреть отдельно.

В случае колебний константа интеграла энергии $H = h$ удовлетворяет неравенствам $-\omega_0^2 < h < \omega_0^2$. Пусть β — амплитуда колебаний. Тогда, если $k_1 = \sin\dfrac{\beta}{2}$, то

$$h = 2\omega_0^2 k_1^2 - \omega_0^2, \tag{14}$$

а действие I вычисляется по формуле

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint p\,dq = 4\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\beta p\,dq, \tag{15}$$

причем в последнем интеграле

$$p = 2\omega_0\sqrt{k_1^2 - \sin^2\frac{q}{2}}. \tag{16}$$

Введя вместо q переменную ψ по формуле

$$\psi = \arcsin\left(\frac{1}{k_1}\sin\frac{q}{2}\right), \tag{17}$$

выражение (15) можно переписать в виде

$$I = \frac{8\omega_0}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k_1^2\cos^2\psi}{\sqrt{1 - k_1^2\sin^2\psi}}\,d\psi = \frac{8\omega_0}{\pi}\left[\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1 - k_1^2\sin^2\psi}\,d\psi - \right.$$
$$\left. - (1 - k_1^2)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\sqrt{1 - k_1^2\sin^2\psi}}\right], \tag{18}$$

т. е.

$$I = \frac{8\omega_0}{\pi}\left[E(k_1) - (1-k_1^2)K(k_1)\right], \tag{19}$$

где K и E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

Равенство (19) определяет I как функцию k_1. Продифференцировав обе его части по k_1, получим, при учете формул (21) п. 95,

$$\frac{\partial I}{\partial k_1} = \frac{8\omega_0}{\pi} k_1 K(k_1). \tag{20}$$

Отсюда видно, что $\dfrac{\partial I}{\partial k_1} \neq 0$ и, следовательно, на основании теоремы о неявной функции, равенство (19) разрешимо относительно k_1, причем для производной функции k_1 по I имеем выражение

$$\frac{\partial k_1}{\partial I} = \frac{\pi}{8\omega_0 k_1 K(k_1)}. \tag{21}$$

Новая функция Гамильтона $\mathcal{H}$ зависит только от I, она определяется из (14) и (19). Отбросив несущественную постоянную $-\omega_0^2$, получим, что

$$\mathcal{H} = 2\omega_0^2 k_1^2, \tag{22}$$

где $k_1 = k_1(I)$ — обратная к $I(k_1)$ функция, определяемая из (19).

Из (21), (22) находится частота колебаний

$$\omega_1 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k_1} \cdot \frac{\partial k_1}{\partial I} = \frac{\pi\omega_0}{2K(k_1)}. \tag{23}$$

Для периода колебаний $\tau = \dfrac{2\pi}{\omega_1}$ получаем выражение $\tau = \dfrac{4K(k_1)}{\omega_0}$, совпадающее с выражением, полученным в п. 96.

Для производящей функции (6) канонического преобразования $q,\ p \to w,\ I$ после замены переменных (17) получаем выражение

$$V(q, I) = 4\omega_0\left[E(\psi, k_1) - (1-k_1^2)F(\psi, k_1)\right], \tag{24}$$

где F и E — эллиптические интегралы первого и второго рода (см. п. 95), ψ определена равенством (17), а $k_1 = k_1(I)$ — равенством (19).

Для угловой переменной w, согласно второй формуле из (7), имеем выражение

$$\omega = \frac{\partial V}{\partial I} = \frac{\partial V}{\partial k_1}\frac{\partial k_1}{\partial I}. \tag{25}$$

Дифференцирование обеих частей формулы (24) по k_1 дает равенство

$$\frac{\partial V}{\partial k_1} = 4\omega_0 \left[\frac{\partial E}{\partial k_1} + \frac{\partial E}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial k_1} + 2k_1 F - (1-k_1^2)\left(\frac{\partial F}{\partial k_1} + \frac{\partial F}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial k_1}\right)\right]. \quad (26)$$

Но из (17) следует, что

$$\frac{\partial \psi}{\partial k_1} = -\frac{\sin\psi}{k_1\cos\psi}. \quad (27)$$

Используя эту формулу и соотношения (13), (14), (19) и (20) из п. 95, равенство (26) можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial V}{\partial k_1} = 4\omega_0 k_1 F(\psi, k_1). \quad (28)$$

Учитывая (21) и (28), из формулы (25) находим, что

$$\frac{2K(k_1)w}{\pi} = F(\psi, k_1) = \int_0^{\psi} \frac{dx}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2 x}},$$

т. е.

$$\psi = \operatorname{am}\frac{2K(k_1)w}{\pi}. \quad (29)$$

Теперь из (16), (17) и (29) получаем каноническое преобразование $q,\ p, \to w,\ I$, вводящее переменные действие–угол в случае колебаний маятника

$$\begin{aligned} q &= 2\arcsin\left[k_1 \operatorname{sn}\left(\frac{2K(k_1)}{\pi}w,\ k_1\right)\right], \\ p &= 2\omega_0 k_1 \operatorname{cn}\left(\frac{2K(k_1)}{\pi}w,\ k_1\right). \end{aligned} \quad (30)$$

Это каноническое преобразование унивалентно и 2π-периодично по w. Оно преобразует функцию Гамильтона (13) к виду (22).

Теперь рассмотрим случай вращений, когда переменная h интеграла энергии удовлетворяет неравенству $h > \omega_0^2$. Так как при замене p на $-p$, а q на $-q$ функция Гамильтона (13) не изменяется, то будем рассматривать только случай вращений при положительных p. Пусть при $t = 0$ имеем $q = 0,\ p = p_0 > 0$. Тогда

$$h = \frac{1}{2}p_0^2 - \omega_0^2 = \frac{2\omega_0^2}{k_2^2} - \omega_0^2, \quad (31)$$

где

$$k_2^2 = \frac{4\omega_0^2}{p_0^2} = \frac{2\omega_0^2}{\omega_0^2 + h} \quad (0 < k_2 < 1), \tag{32}$$

а фазовая кривая $p = p(q,\ h)$ задается уравнением

$$p = \frac{2\omega_0}{k_2}\sqrt{1 - k_2^2 \sin^2 \frac{q}{2}}. \tag{33}$$

Для действия I имеем такое выражение:

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint p\, dq = \frac{\omega_0}{\pi k_2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sqrt{1 - k_2^2 \sin^2 \frac{q}{2}}\, dq,$$

или, если воспользоваться четностью подынтегрального выражения и сделать замену $q = 2x$,

$$I = \frac{4\omega_0}{\pi k_2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1 - k_2^2 \sin^2 x}\, dx,$$

т. е.

$$I = \frac{4\omega_0 E(k_2)}{\pi k_2}. \tag{34}$$

Принимая во внимание формулы (21) п. 95, из (34) находим

$$\frac{\partial I}{\partial k_2} = -\frac{4\omega_0 K(k_2)}{\pi k_2^2}.$$

Так как $\dfrac{\partial I}{\partial k_2} \neq 0$, то равенство (34) разрешимо относительно k_2, причем для производной функции k_2 по I имеем выражение

$$\frac{\partial k_2}{\partial I} = -\frac{\pi k_2^2}{4\omega_0 K(k_2)}. \tag{35}$$

Новая функция Гамильтона определяется из (31) и (34). Отбросив несущественную постоянную $-\omega_0^2$, получим

$$\mathcal{H} = \frac{2\omega_0^2}{k_2^2}, \tag{36}$$

где $k_2 = k_2(I)$ — функция, обратная функции $I(k_2)$ из (34).

Учитывая (35), для частоты ω_2 вращений получим такое же выражение:

$$\omega_2 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k_2}\frac{\partial k_2}{\partial I} = \frac{\pi\omega_0}{k_2 K(k_2)}. \tag{37}$$

За промежуток времени, равный $\frac{2\pi}{\omega_2}$, величина q получает приращение 2π.

Для производящей функции (6) получаем выражение

$$V(q,\ I) = \frac{4\omega_0}{k_2} E\left(\frac{q}{2},\ k_2\right). \tag{38}$$

Угловая переменная w вводится при помощи равенства

$$w = \frac{\partial V}{\partial I} = \frac{\partial V}{\partial k_2}\frac{\partial k_2}{\partial I},$$

которое, при учете формул (35) и выражения (20) п. 95, преобразуется к виду

$$\frac{K(k_2)w}{\pi} = F\left(\frac{q}{2},\ k_2\right).$$

Отсюда и из (33) находим

$$q = 2\,\mathrm{am}\left(\frac{K(k_2)w}{\pi}\right), \quad p = \frac{2\omega_0}{k_2}\,\mathrm{dn}\left(\frac{K(k_2)w}{\pi}\right). \tag{39}$$

Здесь $k_2 = k_2(I)$ из (34). Формулы (39) задают унивалентное каноническое преобразование $q,\ p \to w,\ I$, приводящее функцию Гамильтона (13) к виду (36).

183. О переменных действие–угол для системы с n степенями свободы. Ограничимся лишь случаем, когда уравнение (13) п. 177, определяющее характеристическую функцию Гамильтона V, является уравнением с разделяющимися переменными. Тогда

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i(q_i,\ \alpha_1,\ \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1},\ h). \tag{40}$$

Отсюда и из формул (17) п. 178 получим

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i} = \frac{\partial V_i}{\partial q_i} = p_i(q_i,\ \alpha_1,\ \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1},\ h) \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{41}$$

Эти уравнения задают проекции траектории в $2n$-мерном фазовом пространстве $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ на плоскости q_i, p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Будем предполагать, что движение в каждой из плоскостей обладает свойством периодичности, т. е. в плоскости q_i, p_i кривая (41) замкнута или периодична по q_i с некоторым периодом q_{i0}.

Так как в случае (40) происходит полное разделение переменных, то при фиксированных величинах $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}, h$ движения в плоскостях q_i, p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ независимы и каждое из них можно исследовать, как это было сделано в п. 181 в случае одной степени свободы. Имеем

$$I_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i \, dq_i = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial V}{\partial q_i} \, dq_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{42}$$

где интеграл берется по полному циклу периодического движения (колебания или вращения, смотря по тому, какой случай имеет место). Равенства (42) определяют n функций $I_i = I_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}, h)$. Эти функции независимы в силу независимости пар q_i, p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Величины $I_1, I_2, \ldots, I_n$ можно принять за новые импульсы (вместо $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}, h$). Тогда

$$\alpha_1 = f_1(I_1, I_2, \ldots, I_n), \qquad \alpha_2 = f_2(I_1, I_2, \ldots, I_n), \ldots,$$
$$\alpha_{n-1} = f_{n-1}(I_1, I_2, \ldots, I_n), \quad \alpha_n = f_n(I_1, I_2, \ldots, I_n).$$

Если эти величины подставить в (40), то получим

$$V = V(q_1, \ldots, q_n, I_1, \ldots, I_n).$$

Соотношения

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}, \; w_i = \frac{\partial V}{\partial I_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{43}$$

неявно задают унивалентное каноническое преобразование от исходных переменных q_i, p_i к переменным действие–угол I_i, w_i. Новая функция Гамильтона имеет вид

$$\mathcal{H} = f_n(I_1, I_2, \ldots, I_n). \tag{44}$$

Все новые координаты (углы w_i) являются циклическими.

В новых переменных уравнения движения будут такими:

$$\frac{dI_i}{dt} = 0, \; \frac{dw_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_i} = \omega_i(I_1, I_2, \ldots, I_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где ω_i — частота периодического движения (в плоскости q_i, p_i).

Как видим, метод Делонэ позволяет получить все частоты движения путем изучения функций H и V, при этом не требуется полное исследование движения системы.

Покажем, что i-я угловая переменная w_i за полный цикл изменения j-й координаты q_j получает приращение

$$\Delta w_i = 2\pi\delta_{ij},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Действительно, используя формулы (42) и (43), находим

$$\Delta w_i = \oint \frac{\partial w_i}{\partial q_j}\, dq_j = \oint \frac{\partial^2 V}{\partial I_i \partial q_j}\, dq_j = \frac{\partial}{\partial I_i} \oint \frac{\partial V}{\partial q_j}\, dq_j = \frac{\partial}{\partial I_i}(2\pi I_j) = 2\pi\delta_{ij}.$$

Замечание 4. *Если координата q_i циклическая, то соответствующий ей импульс p_i постоянен, и траектория в плоскости q_i, p_i будет прямой линией. Тогда движение в плоскости q_i, p_i можно считать периодическим (вращательного типа) с любым периодом q_{i0}. Удобно принять $q_{i0} = 2\pi$. Тогда*

$$I_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i\, dq_i = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} p_i\, dq_i = \frac{1}{2\pi} p_i \int\limits_0^{2\pi} dq_i = p_i,$$

т. е. переменная действие I_i в случае циклической координаты q_i совпадает с импульсом p_i.

184. Переменные действие–угол в задаче двух тел. Задача двух тел изучалась в §1 гл. 8. Здесь будут рассмотрены переменные действие–угол в этой задаче. Будем использовать обозначения из §1 гл. 8. Орбиту считаем эллиптической (или, в частности, круговой). Расстояние r точки P от притягивающего центра O удовлетворяет неравенствам $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, где $r_1 = a(1-e)$, $r_2 = a(1+e)$ (a — большая полуось орбиты, e — ее эксцентриситет). Отсюда и из формул §1 гл. 8 следует, что

$$r_1 + r_2 = 2a, \quad r_1 r_2 = a^2(1-e^2) = ap = \frac{ac^2}{k}, \tag{45}$$

где p — параметр орбиты, c — константа интеграла площадей, величина k определена в п. 115.

Уравнению (1) п. 115 задачи двух тел соответствуют уравнения Лагранжа второго рода с функцией Лагранжа $L = T - \Pi$, где $T = \dfrac{1}{2}v^2$,

$\Pi = -\frac{k}{r}$. Для квадрата v^2 скорости точки P имеем в сферических координатах (см. рис. 9) выражение (30) п. 9. Поэтому

$$L = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{k}{r},$$

обобщенные импульсом вычисляются по формулам

$$p_r = \dot{r}, \quad p_\varphi = r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}, \quad p_\theta = r^2\dot{\theta}, \tag{46}$$

а функция Гамильтона $H = T + \Pi$ имеет вид

$$H = \frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta} + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) - \frac{k}{r}. \tag{47}$$

Координата φ циклическая. Поэтому $p_\varphi = \alpha_\varphi = \text{const}$, а характеристическая функция Гамильтона имеет вид

$$V = \alpha_\varphi\varphi + \int p_\theta\, d\theta + \int p_r\, dr, \tag{48}$$

причем

$$p_\theta^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta} = \alpha_\theta^2 = \text{const}, \quad p_r^2 + \frac{\alpha_\theta^2}{r^2} - \frac{2k}{r} = 2\alpha_3 = \text{const}. \tag{49}$$

Постоянная $2\alpha_3$ равна константе h интеграла энергии (7) из п. 117 и для эллиптической орбиты отрицательна.

Из (49) получаем выражение для величины p_r^2:

$$p_r^2 = 2\alpha_3 + \frac{2k}{r} - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2} \equiv -\frac{2\alpha_3(r - r_1)(r_2 - r)}{r^2}. \tag{50}$$

Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях r в обеих частях последнего тождества дает соотношения между постоянными α_θ, α_3 и величинами r_1, r_2:

$$r_1 + r_2 = -\frac{k}{\alpha_3}, \quad r_1 r_2 = -\frac{\alpha_\theta^2}{2\alpha_3}. \tag{51}$$

Сравнивая первые формулы из (45) и (51), получаем соотношение

$$a = -\frac{k}{2\alpha_3}. \tag{52}$$

Сравнение же вторых формул из (45) и (51) при учете соотношения (52) приводит к равенству

$$\alpha_\theta = c, \tag{53}$$

т. е. постоянная α_θ в (49) равна константе интеграла площадей.

Введем переменные действие I_r, I_φ, I_θ. Так как φ циклическая координата, то, согласно замечанию предыдущего пункта, имеем

$$I_\varphi = p_\varphi = \alpha_\varphi. \tag{54}$$

Величины I_θ I_r определяются равенствами:

$$I_\theta = \frac{1}{2\pi}\oint p_\theta\, d\theta, \quad I_r = \frac{1}{2\pi}\oint p_r\, dr. \tag{55}$$

Для вычисления первого из интегралов (55) заметим[1], что в сферических координатах справедливо соотношение

$$2T = p_r\dot r + p_\varphi\dot\varphi + p_\theta\dot\theta. \tag{56}$$

Если же в плоскости орбиты ввести полярные координаты r, ν (ν — истинная аномалия), то $2T = \dot r^2 + r^2\dot\nu^2$, $p_r = \dot r$, $p_\nu = r^2\dot\nu$. Для импульса p_ν, при учете интеграла площадей $r^2\dot\nu = c$ и формулы (53), имеем равенства $p_\nu = c = \alpha_\theta$. Принимая это во внимание, выражение для удвоенной кинетической энергии $2T = p_r\dot r + p_\nu\dot\nu$ можно записать в виде

$$2T = p_r\dot r + \alpha_\theta\dot\nu. \tag{57}$$

Из сравнения правых частей формул (56) и (57), при учете равенств (54), следует, что

$$p_\theta d\theta = \alpha_\theta d\nu - I_\varphi d\varphi. \tag{58}$$

За один оборот точки P по орбите угол θ совершает полный цикл его колебания, а углы ν и φ изменяются на 2π. Поэтому, принимая в расчет формулу (58), для первого из интегралов (55) получаем выражение $I_\theta = \alpha_\theta - I_\varphi$, т. е.

$$\alpha_\theta = I_\varphi + I_\theta. \tag{59}$$

Величина p_r во втором из интегралов (55) положительна, когда r увеличивается от r_1 до r_2, и отрицательна при уменьшении r от r_2 до r_1.

[1]См.: Голдстейн Г. Классическая механика. М.: Наука, 1975.

Принимая это во внимание и учитывая соотношения (50), выражение для I_r можно записать в виде

$$I_r = \frac{\sqrt{-2\alpha_3}}{\pi} \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{\sqrt{(r-r_1)(r_2-r)}}{r}\, dr. \tag{60}$$

Для вычисления интеграла в правой части этой формулы введем вместо r новую переменную $x(r)$ по формуле

$$r = \frac{r_1 + r_2 x^2}{1+x^2}.$$

Тогда

$$r - r_1 = \frac{(r_2-r_1)x^2}{1+x^2}, \quad r_2 - r = \frac{r_2-r_1}{1+x^2}, \quad dr = \frac{2(r_2-r_1)x}{(1+x^2)^2}dx,$$
$$x(r_1) = 0, \quad x(r_2) = +\infty.$$

Поэтому

$$I_r = \frac{2\sqrt{-2\alpha_3}(r_2-r_1)^2}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{x^2}{(r_1+r_2x^2)(1+x^2)^2}\, dx. \tag{61}$$

Подынтегральное выражение в (61) можно представить в виде

$$\frac{x^2}{(r_1+r_2x^2)(1+x^2)^2} =$$
$$= \frac{1}{r_2-r_1}\left[\frac{r_1}{r_2-r_1}\cdot\frac{1}{1+x^2} - \frac{r_1r_2}{r_2-r_1}\cdot\frac{1}{r_1+r_2x^2} + \frac{1}{(1+x^2)^2}\right].$$

Но

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}, \quad \int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{r_1+r_2x^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{r_1r_2}}, \quad \int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{4},$$

поэтому после интегрирования и несложных преобразований формулу (61) можно записать в виде

$$I_r = \frac{\sqrt{-2\alpha_3}}{2}(r_1 + r_2 - 2\sqrt{r_1r_2}). \tag{62}$$

Принимая во внимание выражения (51) для $r_1 + r_2$ и $r_1 r_2$ и учитывая равенство (59), формуле (62) можно придать следующую форму:

$$I_r = \frac{k}{\sqrt{-2\alpha_3}} - (I_\varphi + I_\theta). \tag{63}$$

Но, согласно (47) и (49), $H = \alpha_3$. Поэтому, учитывая унивалентность канонического преобразования, вводящего переменные действие–угол, из (63) получаем следующее выражение для функции Гамильтона, записанной в переменных I_r, I_φ, I_θ:

$$\mathcal{H} = -\frac{k^2}{2(I_r + I_\varphi + I_\theta)^2}. \tag{64}$$

Угловые переменные, отвечающие переменным действие I_r, I_φ, I_θ, обозначим через w_r, w_φ, w_θ. Так как $\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial I_r} = \dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial I_\varphi} = \dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial I_\theta}$, то соответствующие им частоты ω_r, ω_φ, ω_θ равны. Этого и следовало ожидать, так как изучаемое движение материальной точки по эллиптической орбите является периодическим (см. п. 121).

185. Элементы Делонэ. Введем новые переменные I_i, w_i ($i = 1,\ 2,\ 3$), имеющие более ясный геометрический и механический смысл, нежели переменные I_r, I_φ, I_θ, w_r, w_φ, w_θ. Для этого сделаем замену переменных по формулам:

$$w_1 = w_\varphi - w_\theta, \quad w_2 = w_\theta - w_r, \quad w_3 = w_r, \tag{65}$$

$$I_1 = I_\varphi, \quad I_2 = I_\varphi + I_\theta, \quad I_3 = I_r + I_\varphi + I_\theta. \tag{66}$$

При помощи какого-либо из критериев п. 169 можно проверить, что равенства (65), (66) задают унивалентное каноническое преобразование. В новых переменных функция Гамильтона принимает вид:

$$\mathcal{H} = -\frac{k^2}{2I_3^2}. \tag{67}$$

Выясним смысл переменных I_i, w_i ($i = 1,\ 2,\ 3$). Из (52) и (67) с учетом того, что $H = \alpha_3$, находим

$$I_3 = \sqrt{ka}. \tag{68}$$

Далее имеем

$$\frac{dw_3}{dt} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial I_3} = \frac{k^2}{I_3^3} = \frac{k^2}{(ka)^{3/2}} = \frac{\sqrt{k}}{a^{3/2}} = n,$$

где n — среднее движение (см. формулу (20) п. 121). То есть w_3 — это, с точностью до константы, средняя аномалия $n(t-\tau)$ (см. п. 122; τ — это время прохождения точки P через перицентр). Полагая эту константу равной нулю, получаем, что

$$w_3 = n(t-\tau). \tag{69}$$

Теперь рассмотрим пару канонически сопряженных переменных I_2, w_2. Из (53), (59) и (66) следут, что $I_2 = c$, т. е. I_2 — это величина кинетического момента точки P относительно притягивающего центра. Но из (45) видно, что $c = \sqrt{ka(1-e^2)}$. Поэтому

$$I_2 = \sqrt{ka(1-e^2)}. \tag{70}$$

Так как $\dfrac{dw_2}{dt} = \dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial I_2} = 0$, то w_2 представляет собой некоторый постоянный угол, отсчитываемый в плоскости орбиты. Положим

$$w_2 = \omega, \tag{71}$$

где (см. п. 123) ω — угловое расстояние перицентра от узла.

И, наконец, рассмотрим переменные I_1, w_1. Согласно (54) и (66), $I_1 = \alpha_\varphi$, т. е. I_1 — это проекция кинетического момента точки P на ось Oz (см. рис. 9 и 126). Учитывая еще, что $\dfrac{dw_1}{dt} = \dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial I_1} = 0$, получаем, что w_1 — это некоторый постоянный угол, отсчитываемый в плоскости Oxy. Примем, что w_1 совпадает с долготой восходящего узла Ω. Таким образом (см. рис. 126 и формулу (70)):

$$I_1 = c\cos i = I_2\cos i = \sqrt{ka(1-e^2)}\cos i, \quad w_1 = \Omega, \tag{72}$$

где i — наклонение орбиты.

Введенные канонически сопряженные переменные I_1, I_2, I_3, w_1, w_2, w_3 называются *каноническими переменными Делонэ* или, кратко, *элементами Делонэ*. Следуя Делонэ, для них часто используются обозначения H, G, L, h, g, l (не путать обозначения H, L, h элементов Делонэ с обозначениями функций Гамильтона, Лагранжа и константы интеграла энергии!). Элементы Делонэ связаны с обычными элементами орбиты Ω, i, a, e, ω, τ следующими получаемыми из (68)–(72) соотношениями:

$$\begin{aligned} &L = \sqrt{ka}, && l = n(t-\tau),\\ &G = \sqrt{ka(1-e^2)}, && g = \omega,\\ &H = \sqrt{ka(1-e^2)}\cos i, && h = \Omega. \end{aligned} \tag{73}$$

В переменных Делонэ функция Гамильтона задачи двух тел записывается в виде

$$\mathcal{H} = -\frac{k^2}{2L^2}. \tag{74}$$

Две системы канонических элементов Пуанкаре. Для многих приложений (например, связанных с исследованием движения планет) целесообразно иметь канонически сопряженные переменные, среди которых есть такие, которые малы для малых значений эксцентриситетов и наклонений орбит. Пуанкаре ввел две системы таких переменных. Их называют элементами Пуанкаре.

Первая система элементов Пуанкаре Λ, Γ, Z, λ, γ, z связана с элементами Делонэ при помощи унивалентного канонического преобразования вида:

$$\begin{aligned} &\Lambda = L, && \Gamma = L - G, && Z = G - H, \\ &\lambda = l + g + h, && \gamma = -g - h, && z = -h. \end{aligned} \tag{75}$$

Отсюда и из (73) получаем выражения элементов Λ, Γ, Z, λ, γ, z через обычные элементы кеплеровской орбиты:

$$\begin{aligned} &\Lambda = \sqrt{ka}, && \lambda = n(t-\tau) + \omega + \Omega, \\ &\Gamma = \sqrt{ka}(1 - \sqrt{1-e^2}), && \gamma = -\omega - \Omega, \\ &Z = \sqrt{ka(1-e^2)}(1 - \cos i), && z = -\Omega. \end{aligned} \tag{76}$$

Для орбиты малого эксцентриситета и наклонения элементы Γ и Z будут величинами порядка e^2 и i^2 соответственно.

Во *второй системе элементов Пуанкаре* величины Λ, λ — те же канонически сопряженные переменные, что и в первой системе, а остальные четыре элемента определяются формулами (ξ, p — импульсы, η, q — координаты):

$$\begin{aligned} &\xi = \sqrt{2\Gamma}\cos\gamma, && \eta = \sqrt{2\Gamma}\sin\gamma, \\ &p = \sqrt{2Z}\cos z, && q = \sqrt{2Z}\sin z. \end{aligned} \tag{77}$$

Для орбиты малого эксцентриситета и наклонения величины ξ, η и p, q имеет порядок e и i соответственно.

И для первой, и для второй систем канонических элементов Пуанкаре функция Гамильтона задачи двух тел имеет вид

$$\mathcal{H} = -\frac{k^2}{2\Lambda^2}. \tag{78}$$