§ 7. Канонические преобразования в теории возмущений

186. Предварительные замечания. Точное интегрирование дифференциальных уравнений движения реальной механической системы возможно только в очень редких случаях. Эти случаи являются скорее исключением, чем правилом. Поэтому разработано много методов, позволяющих проводить приближенное исследование систем, уравнения движения которых не могут быть решены точно, но в то же время некоторая упрощенная задача, называемая невозмущенной задачей, допускает точное решение. Совокупность этих методов образует теорию возмущений, которая находит самое широкое применение во всех областях науки и техники, где рассматриваются процессы, описываемые дифференциальными уравнениями.

В теории возмущений предполагается, что различие между реальной (возмущенной) системой и ее упрощенной (невозмущенной) моделью можно рассматривать как малые возмущения. Возмущения появляются, например, за счет того, что к основным силам, приложенным к точкам механической системы, добавляются некоторые другие силы, являющиеся в определенном смысле малыми по сравнению с основными силами. Например, если пренебречь влиянием Солнца и считать Землю и Луну материальными точками, то невозмущенной задачей о движении Луны вокруг Земли будет задача двух тел (материальных точек). Влияние притяжения Солнца и отличие Земли и Луны от точечных масс можно считать малыми и отнести к возмущающим воздействиям, которые можно учесть методами теории возмущений.

Бывает и так, что уравнения движения механической системы очень сложны и получить их точное решение нельзя, но можно подобрать другую систему, которая в определенном смысле почти такая же, как и исходная, но ее уравнения движения могут быть проинтегрированы точно. Различие между исходной и таким образом подобранной системой приводит к появлению малых возмущений.

В механике тщательно изучаются системы, уравнения движения которых точно интегрируются. Это связано с тем, что интегрируемые задачи часто используются в качестве невозмущенных в более сложных, но реальных и нужных задачах.

Методы теории возмущений позволяют исследовать движение механических систем, как правило, на конечном (хотя иногда и очень большом) интервале времени.

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые вопросы применения канонических преобразований в теории возмущений систем, движение которых описывается дифференциальными уравнениями Гамильтона.

187. Вариация постоянных в задачах механики. Предположим, что в уравнениях движения механической системы

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n) \tag{1}$$

функция Гамильтона $H(q_i,\ p_i,\ t)$ может быть представлена в виде суммы

$$H = H_0 + H_1, \tag{2}$$

причем дифференциальные уравнения (1) с функцией $H = H_0$

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H_0}{\partial q_i} \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n) \tag{3}$$

могут быть проинтегрированы в замкнутой форме. Пусть решение системы (3) записано в виде

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(q_{10}, \ldots,\ q_{n0},\ p_{10}, \ldots,\ p_{n0},\ t), \\ p_i &= p_i(q_{10}, \ldots,\ q_{n0},\ p_{10}, \ldots,\ p_{n0},\ t), \end{aligned} \tag{4}$$

где q_{i0} и p_{i0} — значения величин q_i, p_i в начальный момент $t = 0$. Для интегрирования уравнений (1) сделаем в них замену переменных по формулам (4), принимая величины q_{i0}, p_{i0} за новые переменные. Так мы приходим к проблеме вариации произвольных постоянных в задачах механики, описываемых каноническими уравнениями Гамильтона (1).

Формулы (4) задают (см. п. 171) унивалентное каноническое преобразование. Это преобразование имеет обратное:

$$\begin{aligned} q_{i0} &= q_{i0}(q_1, \ldots,\ q_n,\ p_1, \ldots,\ p_n,\ t), \\ p_{i0} &= p_{i0}(q_1, \ldots,\ q_n,\ p_1, \ldots,\ p_n,\ t), \end{aligned} \tag{5}$$

которое также является унивалентным каноническим преобразованием. Следовательно, скобки Пуассона функций (5) удовлетворяют равенствам (см. п. 169)

$$(q_{i0},\ q_{k0}) = 0, \quad (p_{i0},\ p_{k0}) = 0, \quad (q_{i0},\ p_{k0}) = \delta_{ik}. \tag{6}$$

Кроме того, функции (5), являясь интегралами системы (3), удовлетворяют, согласно п. 167, равенствам

$$\frac{\partial q_{i0}}{\partial t} + (q_{i0},\ H_0) = 0, \quad \frac{\partial p_{i0}}{\partial t} + (p_{i0},\ H_0) = 0. \tag{7}$$

Найдем производные по времени новых переменных q_{i0}, p_{i0} в силу уравнений движения (1). Дифференцируя выражения (5) и учитывая равенства (7) и (2), получаем

$$\begin{aligned}\frac{dq_{i0}}{dt} &= \frac{\partial q_{i0}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial q_{i0}}{\partial q_k}\frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial q_{i0}}{\partial p_k}\frac{dp_k}{dt}\right) = \frac{\partial q_{i0}}{\partial t} + (q_{i0},\ H) = \\ &= -(q_{i0},\ H_0) + (q_{i0},\ H) = (q_{i0},\ H - H_0) = (q_{i0},\ H_1),\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\frac{dp_{i0}}{dt} &= \frac{\partial p_{i0}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial p_{i0}}{\partial q_k}\frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial p_{i0}}{\partial p_k}\frac{dp_k}{dt}\right) = \frac{\partial p_{i0}}{\partial t} + (p_{i0},\ H) = \\ &= -(p_{i0},\ H_0) + (p_{i0},\ H) = (p_{i0},\ H - H_0) = (p_{i0},\ H_1).\end{aligned} \tag{9}$$

Пусть H_1^* — это функция H_1, в которой сделана замена переменных (4). Тогда

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_1}{\partial q_k} &= \sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial H_1^*}{\partial q_{l0}}\frac{\partial q_{l0}}{\partial q_k} + \frac{\partial H_1^*}{\partial p_{l0}}\frac{\partial p_{l0}}{\partial q_k}\right),\\ \frac{\partial H_1}{\partial p_k} &= \sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial H_1^*}{\partial q_{l0}}\frac{\partial q_{l0}}{\partial p_k} + \frac{\partial H_1^*}{\partial p_{l0}}\frac{\partial p_{l0}}{\partial p_k}\right).\end{aligned} \tag{10}$$

Используя эти равенства и соотношения (6), имеем

$$\begin{aligned}(q_{i0},\ H_1) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial q_{i0}}{\partial q_k}\frac{\partial H_1}{\partial p_k} - \frac{\partial q_{i0}}{\partial p_k}\frac{\partial H_1}{\partial q_k}\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial q_{i0}}{\partial q_k}\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial H_1^*}{\partial q_{l0}}\frac{\partial q_{l0}}{\partial p_k} + \frac{\partial H_1^*}{\partial p_{l0}}\frac{\partial p_{l0}}{\partial p_k}\right) - \\ &\quad - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial q_{i0}}{\partial p_k}\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial H_1^*}{\partial q_{l0}}\frac{\partial q_{l0}}{\partial q_k} + \frac{\partial H_1^*}{\partial p_{l0}}\frac{\partial p_{l0}}{\partial q_k}\right) = \\ &= \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial H_1^*}{\partial q_{l0}}(q_{i0},\ q_{l0}) + \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial H_1^*}{\partial p_{l0}}(q_{i0},\ p_{l0}) = \frac{\partial H_1^*}{\partial p_{i0}}.\end{aligned} \tag{11}$$

Аналогично

$$(p_{i0},\ H_1) = \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial H_1^*}{\partial q_{l0}}(p_{i0},\ q_{l0}) + \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial H_1^*}{\partial p_{l0}}(p_{i0},\ p_{l0}) = -\frac{\partial H_1^*}{\partial q_{i0}}. \tag{12}$$

Соотношения (11), (12) позволяют записать уравнения (8), (9) в виде

$$\frac{dq_{i0}}{dt} = \frac{\partial H_1^*}{\partial p_{i0}}, \quad \frac{dp_{i0}}{dt} = -\frac{\partial H_1^*}{\partial q_{i0}} \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{13}$$

Таким образом, если $H = H_0$, то величины q_{i0}, p_{i0} постоянны, а уравнения, описывающие их изменение, в системе с функцией Гамильтона $H_0 + H_1$ имеют каноническую форму, причем соответствующая функция Гамильтона H_1^* получается подстановкой в «возмущающую» функцию H_1 величин q_i, p_i определяемых по формулам (4), отвечающим решению задачи Коши для «невозмущенной» задачи с функцией Гамильтона H_0.

Задачу о вариации произвольных постоянных для системы (1) можно рассмотреть и иначе. Пусть решение «невозмущенной» системы (3) найдено при помощи уравнения Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H_0\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) = 0. \tag{14}$$

Пусть $S = S(q_1, \ldots, q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, t)$ — полный интеграл этого уравнения. Сделаем в уравнениях (1) каноническую замену переменных по формулам (9) п. 175, принимая полный интеграл S за производящую функцию

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = -\beta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{15}$$

При такой замене переменных роль новых координат играют величины $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, а роль новых импульсов — величины $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Новая функция Гамильтона $\mathcal{H}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n, t)$ вычисляется по формуле (см. п. 173)

$$\mathcal{H} = H_0 + H_1 + \frac{\partial S}{\partial t}.$$

Принимая во внимание уравнение (14), имеем отсюда $\mathcal{H} = H_1^*$, где теперь H_1^* — это функция H_1, выраженная через переменные α_i, β_i, t согласно равенствам (15). Таким образом, новые переменные α_i, β_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, которые постоянны, если $H_1 \equiv 0$, в «возмущенной» системе удовлетворяют каноническим уравнениям

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{\partial H_1^*}{\partial \beta_i}, \quad \frac{d\beta_i}{dt} = -\frac{\partial H_1^*}{\partial \alpha_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{16}$$

Для получения решения системы (1) нужно из равенств (15) найти функции

$$q_i = q_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n, t), \quad p_i = p_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n, t)$$

и подставить в них величины α_i, β_i, являющиеся решениями дифференциальных уравнений (16).

Следует отметить, что при получении уравнений (13) и (16) нигде не предполагалась малость «возмущения» H_1. Однако изложенное выше решение задачи вариации произвольных постоянных наиболее полезно, когда величина H_1 мала по сравнению с H_0, например, если функция H_1 имеет порядок малости ε и требуется найти решение системы (1) при малых значениях ε.

188. Классическая теория возмущений. Пусть функция Гамильтона H в системе (1) может быть представлена в виде ряда по степеням малого параметра ε:

$$H = H_0 + \varepsilon H_1 + \ldots \tag{17}$$

Будем считать, что при $\varepsilon = 0$ система (1) интегрируема (т. е. мы можем получить ее общий интеграл), а канонически сопряженные переменные q_i, p_i выбраны так, что функция Гамильтона H_0, соответствующая невозмущенной задаче, зависит только от импульсов, т. е.

$$H_0 = H_0(p_1, \ldots , p_n).$$

Так будет, например, в случае, когда невозмушенная система (1) интегрируется методом Якоби при помощи разделения переменных, а ее движения обладают свойством периодичности. Тогда p_i это переменная действие (см. п. 183), а возмущение $H - H_0$, записанное в переменных действие–угол, будет 2π-периодическим по угловым переменным $q_1, \ldots , q_n$.

Невозмущенная система (1)

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial p_i} = \omega_i(p_1, \ldots , p_n), \quad \frac{dp_i}{dt} = 0 \tag{18}$$

сразу интегрируется:

$$p_i = p_{i0} = \mathrm{const}, \quad q_i = \omega_i(p_{10}, \ldots , p_{n0})t + q_{i0}. \tag{19}$$

Для приближенного исследования движения при малых, но отличных от нуля значениях ε в механике разработан специальный аппарат теории возмущений, основанный на применении канонических преобразований. Для простоты ограничимся здесь случаем консервативной или обобщенно консервативной системы с одной степенью свободы ($n = 1$) [1]. Функция Гамильтона (17) имеет вид

$$H = H_0(p) + \varepsilon H_1(q, p) + \ldots , \tag{20}$$

[1]Следует, однако, иметь в виду, что при $n \geqslant 2$ в теории возмущений возникают принципиальные трудности, которых нет в случае одной степени свободы. См.: Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // УМН, 1963, Т. 18, вып. 6, С. 91-192.

где H_1 можно представить в виде ряда Фурье

$$H_1 = \overline{H}_1(p) + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(p)\cos kq + b_k(p)\sin kq). \tag{21}$$

Здесь $\overline{H}_1(p)$ — среднее значение функции H_1:

$$\overline{H}_1(p) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_1(q,\, p)\, dq.$$

Будем искать каноническое преобразование $q,\, p \to q^*,\, p^*$, приводящее функцию Гамильтона (20) к виду

$$\mathcal{H} = H_0^*(p^*) + \varepsilon^2 H_2^*(q^*,\, p^*) + \ldots\,. \tag{22}$$

Искомое преобразование близко к тождественному и задается формулами (см. п. 174)

$$q^* = \frac{\partial S_1}{\partial p^*}, \quad p = \frac{\partial S_1}{\partial q}, \tag{23}$$

где

$$S_1(q,\, p^*) = qp^* + \varepsilon S_1^{(1)}(q,\, p^*). \tag{24}$$

Неизвестную пока функцию $S_1^{(1)}$ подберем так, чтобы в новых переменных функция Гамильтона имела вид (22).

Подставив (24) в (23), получим соотношения

$$q^* = q + \varepsilon\frac{\partial S_1^{(1)}(q,\, p^*)}{\partial p^*}, \quad p = p^* + \varepsilon\frac{\partial S_1^{(1)}(q,\, p^*)}{\partial q}.$$

Отсюда с точностью до членов порядка ε включительно находим замену переменных $q,\, p \to q^*,\, p^*$ в явной форме:

$$q = q^* - \varepsilon\frac{\partial S_1^{(1)}(q^*,\, p^*)}{\partial p^*}, \quad p = p^* + \varepsilon\frac{\partial S_1^{(1)}(q^*,\, p^*)}{\partial q^*}. \tag{25}$$

Так как валентность преобразования равна единице, а функция S_1 не зависит явно от t, то, согласно формуле (63) п. 174, новая функция

Гамильтона $\mathcal{H}$ получается из старой функции H, если в последней величины q, p заменить их выражениями через новые переменные. Подставив q, p из (25) в функцию (20), получим

$$\mathcal{H} = H_0(p^*) + \varepsilon \overline{H}_1(p^*) +$$
$$+ \varepsilon \left[\omega(p^*) \frac{\partial S_1^{(1)}(q^*,\, p^*)}{\partial q^*} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(p^*) \cos kq^* + b_k(p^*) \sin kq^*) \right] + \ldots \tag{26}$$

Здесь

$$\omega(p) = \frac{\partial H_0(p)}{\partial p}. \tag{27}$$

Чтобы $\mathcal{H}$ имела вид (22), нужно в функции (26) уничтожить зависимые от q^* члены порядка ε. Для этого надо положить

$$S_1^{(1)}(q^*,\, p^*) = \frac{1}{\omega(p^*)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k(p^*) \cos kq^* - a_k(p^*) \sin kq^*}{k}. \tag{28}$$

При таком выборе функции $S_1^{(1)}$ выражение, заключенное в квадратные скобки в формуле (26), тождественно равно нулю и новая функция Гамильтона будет иметь вид (22), причем

$$H_0^*(p^*) = H_0(p^*) + \varepsilon \overline{H}_1(p^*). \tag{29}$$

Если теперь в функции (22) отбросить члены выше первого порядка малости по ε, то соответствующая система уравнений

$$\frac{dq^*}{dt} = \frac{\partial H_0^*(p^*)}{\partial p^*}, \quad \frac{dp^*}{dt} = 0$$

сразу же интегрируется. Подставив ее решение в формулы преобразования (25), получим приближенное решение возмущенной системы исходных переменных q, p.

Мы рассмотрели теорию возмущений в первом приближении по ε. Аналогично можно рассмотреть и более высокие приближения.

189. О линейных гамильтоновых системах дифференциальных уравнений. Пусть в системе (1) функция Гамильтона не зависит от времени и система допускает решение, для которого величины q_i, $p_i (i = 1,\ 2, \ldots,\ n)$ постоянны. Это решение отвечает положению равновесия механической системы, имеющей уравнения движения (1).

Так как перенос начала координат является каноническим преобразованием (см. пример 5 п. 170), то, не ограничивая общности, можно считать, что это положение равновесия отвечает началу координат в фазовом пространстве $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$.

В следующем пункте мы покажем, как, используя канонические преобразования, можно получить приближенное описание движения рассматриваемой системы вблизи ее положения равновесия. Для этого предварительно рассмотрим некоторые вопросы, связанные с линейными дифференциальными уравнениями Гамильтона с постоянными коэффициентами.

Линейную гамильтонову систему дифференциальных уравнений можно записать в виде

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \mathbf{JH}\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}' = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2n}), \tag{30}$$

где x_k, x_{n+k}, $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — канонически сопряженные переменные (x_k — координаты, x_{n+k} — импульсы). Как и в п. 168, здесь принято обозначение

$$\boldsymbol{J} = \begin{Vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E}_n \\ -\mathbf{E}_n & \mathbf{0} \end{Vmatrix} \quad (\mathbf{J}' = \mathbf{J}^{-1} = -\mathbf{J},\ \mathbf{J}^2 = -\mathbf{E}_{2n},\ \det\mathbf{J} = 1).$$

В системе (30) $\mathbf{H}$ — вещественная симметрическая матрица порядка $2n$. Будем предполагать ее постоянной.

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{JH} - \lambda\mathbf{E}_{2n}) = 0. \tag{31}$$

Теорема. *Характеристический многочлен $p(\lambda)$ — четная функция λ.*

Доказательство.

Доказательство вытекает из цепочки равенств:

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{JH} - \lambda\mathbf{E}_{2n}) = \det(\mathbf{JH} - \lambda\mathbf{E}_{2n})' = \det(\mathbf{H}'\mathbf{J}' - \lambda\mathbf{E}_{2n}) =$$

$$= \det(-\mathbf{HJ} - \lambda\mathbf{E}_{2n}) = \det(\mathbf{J}^2\mathbf{HJ} + \lambda\mathbf{J}\mathbf{E}_{2n}\mathbf{J}) = \det\mathbf{J}(\mathbf{JH} + \lambda\mathbf{E}_{2n})\mathbf{J} =$$

$$= \det\mathbf{J}\cdot\det(\mathbf{JH} + \lambda\mathbf{E}_{2n})\det\mathbf{J} = \det(\mathbf{JH} + \lambda\mathbf{E}_{2n}) = p(-\lambda).$$

Таким образом, уравнение (31) содержит только четные степени λ. Поэтому если у него есть корень $\lambda = a$, то обязательно будет и корень $\lambda = -a$. Будем рассматривать только тот случай, когда уравнение (31) имеет только простые чисто мнимые корни. Обозначим их $\lambda_k = i\sigma_k$, $\lambda_{n+k} = -i\sigma_k$ (i — мнимая единица, $k = 1, 2, \ldots, n$). Назовем *нормальной формой* системы уравнений (30) такую систему канонических дифференциальных уравнений, которой соответствует функция Гамильтона[1]

$$H = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \sigma_k (y_k^2 + y_{n+k}^2). \tag{32}$$

Найдем вещественное линейное унивалентное каноническое преобразование $x_j \to y_j$ ($j = 1, 2, \ldots, 2n$), приводящее систему (30) к ее нормальной форме:

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = \mathbf{J}\mathbf{H}^*\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y}' = (y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{2n}), \tag{33}$$

где, в соответствии с (32), $\mathbf{H}^*$ — вещественная диагональная матрица, элементы которой определены равенствами $h_{kk}^* = h_{n+k,\, n+k}^* = \sigma_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) Пусть

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{A}\boldsymbol{y} \tag{34}$$

— искомое преобразование. Из (30), (33) и (34) следует, что постоянная матрица $\mathbf{A}$ должна удовлетворять матричному уравнению

$$\mathbf{AJH}^* = \mathbf{JHA}. \tag{35}$$

Ввиду каноничности преобразования (34) матрица $\mathbf{A}$ должна быть симплектической, т. е. она должна удовлетворять также и такому матричному уравнению:

$$\mathbf{A}'\mathbf{JA} = \mathbf{J}. \tag{36}$$

Чтобы найти нормализующее преобразование (34), надо из бесчисленного множества решений уравнения (35) выбрать хотя бы одно вещественное, удовлетворяющее уравнению (36).

Решение уравнения (35) будем искать в виде $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$, где

$$\mathbf{C} = \begin{Vmatrix} i\mathbf{E}_n & \mathbf{E}_n \\ -i\mathbf{E}_n & \mathbf{E}_n \end{Vmatrix}. \tag{37}$$

Тогда из (35) получаем уравнение для матрицы $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{BD} = \mathbf{JHB}, \tag{38}$$

[1] Функция Гамильтона (32) отвечает механической системе, образованной n не связанными один с другим гармоническими осцилляторами; их частоты равны $|\sigma_k|$ ($k = 1, 2, \ldots, n$).

где $\mathbf{D}$ — диагональная форма матрицы $\mathbf{JH}$. Для ее диагональных элементов имеют место равенства $d_{kk} = -d_{n+k,\,n+k} = i\sigma_k$ $(k = 1,\ 2,\dots,\ n)$. Таким образом, матрица $\mathbf{B}$ приводит матрицу $\mathbf{JH}$ к диагональной форме. Она строится следующим образом[1]. Ее столбцами служат собственные векторы матрицы $\mathbf{JH}$. Именно, пусть k-й столбец матрицы $\mathbf{B}$ есть собственный нектор $\boldsymbol{e}_k$, соответствующий собственному числу $\lambda_k = i\sigma_k$, а $(n+k)$-й столбец есть собственный вектор $\boldsymbol{e}_{n+k}$, соответствующий собственному числу $\lambda_{n+k} = -i\sigma_k$ $(k = 1,\ 2,\dots,\ n)$.

Собственные векторы определяются с точностью до множителя. Примем этот множитель вещественным и одинаковым для векторов $\boldsymbol{e}_k$ и $\boldsymbol{e}_{n+k}$. Кроме того, соответствующие компоненты этих векторов выберем комплексно сопряженными. Такой выбор собственных векторов обеспечивает вещественность матрицы $\mathbf{A}$. Произвольные множители собственных векторов определяются из условия их нормировки, которое получим из условия (36) каноничности преобразования (34).

Подставив $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$ в уравнение (36), получим

$$\mathbf{C'B'JBC} = \mathbf{J}. \tag{39}$$

Обозначим матрицу $\mathbf{B'JB}$ через $\mathbf{F}$, ее элемент f_{ml} равен скалярному произведению векторов $\boldsymbol{e}_m$ и $\mathbf{J}\boldsymbol{e}_l$:

$$f_{ml} = (\boldsymbol{e}_m \cdot \mathbf{J}\boldsymbol{e}_l).$$

Так как для любых двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ справедливо равенство $(\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{J}\boldsymbol{b}) = -(\mathbf{J}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$, то матрица $\mathbf{F}$ кососимметрическая. Покажем еще, что $f_{ml} = 0$, если $|m-l| \neq n$. Для этого рассмотрим очевидное равенство

$$(\boldsymbol{e}_m \cdot \mathbf{J}^2\mathbf{H}\boldsymbol{e}_l) = (\boldsymbol{e}_m \cdot \mathbf{HJ}^2\boldsymbol{e}_l).$$

Преобразуя его левую и правую части, имеем последовательно

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{e}_m \cdot \mathbf{J}^2\boldsymbol{H}e_l) &= (\mathbf{J'H'}\boldsymbol{e}_m \cdot \mathbf{J}\boldsymbol{e}_l),\\
(\boldsymbol{e}_m \cdot \mathbf{JJH}\boldsymbol{e}_l) &= -(\mathbf{JH}\boldsymbol{e}_m \cdot \mathbf{J}\boldsymbol{e}_l),\\
(\boldsymbol{e}_m \cdot \mathbf{J}\lambda_l\boldsymbol{e}_l) &= -(\lambda_m\boldsymbol{e}_m \cdot \mathbf{J}\boldsymbol{e}_l).
\end{aligned}$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$(\lambda_m + \lambda_l)f_{ml} = 0. \tag{40}$$

Так как, согласно упорядочению собственных чисел, введенному при построении матрицы $\mathbf{B}$, $\lambda_m + \lambda_l = 0$ только в случае $|m-l| = n$, то из

[1]См., например: Гантмахер Ф. Р. Теория матриц, М,: Наука, 1967.

равенства (40) следует, что $f_{ml} = 0$, если $|m-l| \neq n$. Таким образом, матрица $\mathbf{B}'\mathbf{J}\mathbf{B}$ имеет такую структуру:

$$\mathbf{B}'\mathbf{J}\mathbf{B} = \left\| \begin{matrix} \mathbf{0} & \mathbf{G} \\ -\mathbf{G} & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|, \tag{41}$$

где $\mathbf{G}$ — диагональная матрица порядка n с элементами $g_{kk} = (\boldsymbol{e}_k \cdot \mathbf{J}\boldsymbol{e}_{n+k})$. Ни один из элементов g_{kk} не равняется нулю, так как в противном случае определитель матрицы (41) равнялся бы нулю, а

$$\det\ \mathbf{B}'\mathbf{J}\mathbf{B} = \det\mathbf{B}'\ \det\mathbf{J}\ \det\mathbf{B} = (\det\mathbf{B})^2 \neq 0,$$

так как матрица $\mathbf{B}$ составлена из собственных векторов, соответствующих различным собственным числам матрицы $\mathbf{J}\mathbf{H}$.

Пусть $\boldsymbol{r}_k$ и $\boldsymbol{s}_k$ — действительная и мнимая части собственного вектора, соответствующего собственному числу λ_k. Тогда, учитывая комплексную сопряженность соответствующих компонент векторов $\boldsymbol{e}_k$ и $\boldsymbol{e}_{n+k}$, получим для элементов матрицы $\mathbf{G}$ выражения

$$g_{kk} = -2i(\boldsymbol{r}_k \cdot \mathbf{J}\boldsymbol{s}_k) \quad (k = 1,\ 2, \ldots ,\ n). \tag{42}$$

Из равенств (37), (39) и (41) следует такое условие, обеспечивающее симплектичность матрицы $\mathbf{A}$:

$$4(\boldsymbol{r}_k \cdot \mathbf{J}\boldsymbol{s}_k) = 1. \tag{43}$$

Это равенство является, с одной стороны, условием нормировки собственного вектора $\boldsymbol{e}_k$, а с другой — условием выбора знака σ_k в функции Гамильтона (32), который до сих пор был не определен. Действительно, приравняв в обеих частях уравнения $\mathbf{J}\mathbf{H}\boldsymbol{e}_k = i\sigma_k\boldsymbol{e}_k$ $(\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{r}_k + i\boldsymbol{s}_k)$ действительную и мнимую части, получим систему уравнений для $\boldsymbol{r}_k$ и $\boldsymbol{s}_k$:

$$\mathbf{J}\mathbf{H}\boldsymbol{r}_k = -\sigma_k\boldsymbol{s}_k, \quad \mathbf{J}\mathbf{H}\boldsymbol{s}_k = \sigma_k\boldsymbol{r}_k.$$

При одновременном изменении знаков σ_k и компонент вектора $\boldsymbol{r}_k$ эта система уравнений не изменяется. Знак же скалярного произведения $(\boldsymbol{r}_k \cdot \mathbf{J}\boldsymbol{s}_k)$ изменяется на противоположный. Поэтому равенству (43) можно всегда удовлетворить выбором знака σ_k в функции Гамильтона (32) и соответствующей нормировкой собственного вектора $\boldsymbol{e}_k$.

Произведя некоторые вычисления, получим, что k-м столбцом искомой матрицы $\mathbf{A}$ будет вектор $-2\boldsymbol{s}_k$, а $(n+k)$-м — вектор $2\boldsymbol{r}_k$.

190. Преобразование Биркгофа. Приближенное интегрирование гамильтоновой системы уравнений вблизи положения равновесия. Пусть начало координат фазового пространства отвечает положению равновесия консервативной или обобщенно консервативной системы с n степенями свободы. Предположим, что функция Гамильтона является аналитической в некоторой окрестности начала координат и ее разложение в ряд начинается с квадратичных членов:

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots , \tag{44}$$

где H_m — однородный многочлен (форма) степени m относительно координат и импульсов. Аддитивная постоянная (равная значению функции Гамильтона в положении равновесия) не влияет на уравнения движения и в разложении (44) отброшена.

Пусть характеристическое уравнение, соответствующее линеаризованной системе уравнений движения, задаваемой функцией Гамильтона H_2, имеет только простые чисто мнимые корни $\pm i\sigma_k$, ($k = 1,\ 2,\dots ,\ n$). Тогда, как показано в предыдущем пункте, подходящим выбором канонически сопряженных переменных функцию H_2 можно представить в виде правой части равенства (32). Если еще сделать каноническую замену переменных[1]

$$q_k = y_k - iy_{n+k}, \quad p_k = y_k + iy_{n+k} \quad (k = 1,\ 2,\dots ,\ n), \tag{45}$$

то квадратичная часть ряда (44) будет иметь вид

$$H_2 = i\sum_{k=1}^{n} \sigma_k q_k p_k. \tag{46}$$

Движение линеаризованной системы представляет собой суперпозицию колебаний n гармонических осцилляторов с частотами $|\sigma_k|$, ($k = 1,\ 2,\dots ,\ n$). Если в разложении (44) формы H_m при $m \geqslant 3$ не равны тождественно нулю, то уравнения движения нелинейны. Чтобы исследовать движение в этом случае, упростим функцию Гамильтона (44) при помощи канонической замены переменных, носящей название *преобразования Биркгофа.*

Сделаем каноническую замену переменных $q_k,\ p_k \to q'_k,\ p'_k$, задаваемую формулами

$$q'_k = q_k + \frac{\partial S_3}{\partial p'_k}, \quad p_k = p'_k + \frac{\partial S_3}{\partial q_k} \quad (k = 1,\ 2,\dots ,\ n), \tag{47}$$

где форму третьей степени $S_3(q_k,\ p'_k)$ попытаемся подобрать так, чтобы в новых переменных функция Гамильтона не содержала членов третьей степени относительно $q'_k,\ p'_k$, ($k = 1,\ 2,\dots ,\ n$).

[1]Сравните с примером 7 п. 170.

Функция $H_3(q_k,\ p_k)$ в (44) может быть записана в виде

$$H_3 = \sum_{\nu_1+\ldots+\mu_n=3} h_{\nu_1,\ldots,\,\mu_n} q_1^{\nu_1}\ldots q_n^{\nu_n} p_1^{\mu_1}\ldots p_n^{\mu_n}, \tag{48}$$

где коэффициенты $h_{\nu_1,\ldots,\,\mu_n}$ постоянны. Величины $\nu_1,\ldots,\ \mu_n$ — целые неотрицательные числа. Функцию S_3 ищем в виде, аналогичном (48):

$$S_3 = \sum_{\nu_1+\ldots+\mu_n=3} s_{\nu_1,\ldots,\,\mu_n} q_1^{\nu_1}\ldots q_n^{\nu_n} p_1'^{\mu_1}\ldots p_n'^{\mu_n}, \tag{49}$$

где постоянные коэффициенты $s_{\nu_1,\ldots,\,\mu_n}$ подлежат выбору из условия обращения в нуль членов третьей степени в новой функции Гамильтона.

Из (47) следует, что старые переменные $q_k,\ p_k$ являются аналитическими функциями в окрестности начала координат $q_k'=0,\ p_k'=0$ и представляются рядами

$$q_k = q_k' - \frac{\partial S_3(q_k',\ p_k')}{\partial p_k'} + \ldots, \quad p_k = p_k' + \frac{\partial S_3(q_k',\ p_k')}{\partial q_k'} + \ldots, \tag{50}$$

где обозначенные многоточием члены имеют степени выше второй относительно $q_k',\ p_k',\ (k=1,\ 2,\ldots,\ n)$. Подставив эти выражения в функцию (44), получим новую функцию Гамильтона в виде

$$H' = i\sum_{k=1}^{n}\sigma_k q_k' p_k' + i\sum_{k=1}^{n}\sigma_k\left(q_k'\frac{\partial S_3}{\partial q_k'} - p_k'\frac{\partial S_3}{\partial p_k'}\right) + H_3(q_k',\ p_k') + \ldots,$$

где многоточием обозначены члены выше третьей степени относительно $q_k',\ p_k'$.

Таким образом, квадратичная часть функции Гамильтона сохранила свою форму, а члены третьей степени H_3' приняли вид

$$H_3' = i\sum_{k=1}^{n}\sigma_k\left(q_k'\frac{\partial S_3}{\partial q_k'} - p_k'\frac{\partial S_3}{\partial p_k'}\right) + H_3(q_k',\ p_k').$$

Положим $H_3'\equiv 0$. Принимая во внимание формулы (48), (49) и приравнивая в этом тождестве нулю коэффициент при $q_1'^{\nu_1}\ldots q_n'^{\nu_n}\times$ $\times\, p_1'^{\mu_1}\ldots p_n'^{\mu_n}$, получим уравнения для нахождения $s_{\nu_1,\ldots,\,\mu_n}$:

$$[\sigma_1(\nu_1-\mu_1)+\ldots+\sigma_n(\nu_n-\mu_n)]s_{\nu_1,\ldots,\,\mu_n} = ih_{\nu_1,\ldots,\,\mu_n}. \tag{51}$$

Справедливо соотношение

$$|\nu_1-\mu_1|+\ldots+|\nu_n-\mu_n| \leqslant \nu_1+\mu_1+\ldots+\nu_n+\mu_n = 3.$$

Отсюда и из (51) следует, что если величины $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ таковы, что для целых чисел $k_1, \ldots, k_n$, удовлетворяющих условию $0 < |k_1| + \ldots + |k_n| \leqslant 3$, выполняется неравенство[1]

$$k_1\sigma_1 + \ldots + k_n\sigma_n \neq 0, \tag{52}$$

то выбрав величины $s_{\nu_1, \ldots, \mu_n}$ согласно формулам

$$s_{\nu_1, \ldots, \mu_n} = \frac{ih_{\nu_1, \ldots, \mu_n}}{\sigma_1(\nu_1 - \mu_1) + \ldots + \sigma_n(\nu_n - \mu_n)},$$

получим новую функцию Гамильтона H' такой, что в ней будут отсутствовать члены третьей степени по q'_k, p'_k.

Можно было бы попытаться аналогичным образом при помощи еще одного канонического преобразования q'_k, $p'_k \to q''_k$, p''_k уничтожить члены четвертой степени H''_4 в функции Гамильтона H''. Это, однако, не удастся сделать, и в новой функции Гамильтона останутся некоторые члены четвертой степени, имеющие вполне определенную структуру.

Если в системе нет резонанса до четвертого порядка включительно, т. е. неравенство (52) удовлетворяется при $0 < |k_1| + \ldots + |k_n| \leqslant 4$, то в функции Гамильтона H'' можно уничтожить все члены четвертой степени, кроме тех, которые содержат q''_k и p''_k в одинаковых степенях. Действительно, уравнение (51) неразрешимо, если $\nu_k = \mu_k$ при всех $k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда в H''_4 останется совокупность одночленов вида

$$\sum_{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n=2} h_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(q''_1 p''_1)^{\nu_1} \ldots (q''_n p''_n)^{\nu_n}.$$

И, вообще, методом математической индукции нетрудно показать, что если в системе нет резонансов до порядка l включительно, т. е.

$$k_1\sigma_1 + \ldots + k_n\sigma_n \neq 0, \quad 0 < |k_1| + \ldots + |k_n| \leqslant l,$$

то существует каноническое преобразование $q_k = q_k^* + \ldots$, $p_k = p_k^* + \ldots$, задаваемое сходящимися в окрестности начала координат степенными рядами, такое, что функция Гамильтона (44), выраженная через q_k^*, p_k^*, имеет вид

$$H^* = \overline{H} + \widetilde{H}(q_k^*, p_k^*), \tag{53}$$

где $\overline{H}$ — многочлен степени не большей $l/2$ от n произведений $q_1^* p_1^*, \ldots, q_n^* p_n^*$, а $\widetilde{H}$ — сходящийся ряд по степеням q_k^*, p_k^*, начинающийся с членов, степень которых не меньше $l + 1$. В этом случае говорят,

[1] В таких случаях говорят, что в системе нет резонансов до третьего порядка включительно.

что функция Гамильтона приведена к нормальной форме Биркгофа с точностью до членов степени l включительно.

Представление функции Гамильтона в виде (53) можно эффективно использовать для приближенного интегрирования канонических дифференциальных уравнений движения. Для этого пренебрежем в (53) членами $\widetilde{H}$, которые имеют более высокую степень относительно q_k^*, p_k^*, нежели функция $\overline{H}$. Тогда $H^* = \overline{H}$. Замечательно, что система канонических уравнений с функцией Гамильтона $H^* = \overline{H}(q_1^* p_1^*, \dots, q_n^* p_n^*)$ сразу интегрируется. Действительно, положим $\tau_k = q_k^* p_k^*$. Тогда уравнения с функцией Гамильтона $\overline{H}$ запишутся в виде

$$\frac{dq_k^*}{dt} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial \tau_k} q_k^*, \quad \frac{dp_k^*}{dt} = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial \tau_k} p_k^*, \quad (k = 1,\ 2, \dots,\ n). \tag{54}$$

Отсюда следует, что $d\tau_k/dt = 0$, т. е. $\tau_k = c_k = \text{const}$ $(k = 1,\ 2, \dots,\ n)$. Подставив эти значения τ_k в уравнения (54), получим

$$\frac{dq_k^*}{dt} = \Lambda_k q_k^*, \quad \frac{dp_k^*}{dt} = -\Lambda_k p_k^*, \tag{55}$$

где Λ_k есть значение производной $\partial\overline{H}/\partial\tau_k$ при $\tau_k = c_k$. Из (55) следует, что

$$\begin{gathered} q_k^*(t) = q_k^*(0) e^{\Lambda_k t}, \quad p_k^*(t) = p_k^*(0) e^{-\Lambda_k t}, \\ (q_k^*(0) p_k^*(0) = c_k;\ k = 1,\ 2, \dots,\ n). \end{gathered} \tag{56}$$

Приближенное решение исходных уравнений получится из равенств (56) при помощи формул указанного выше канонического преобразования Биркгофа, выражающих старые переменные через новые. Несложно проверить, что в рассматриваемом случае чисто мнимых корней характеристического уравнения линеаризованной системы уравнений движения величины Λ_k $(k = 1,\ 2, \dots,\ n)$ также будут чисто мнимыми, $\Lambda_k = i\Omega_k$ $(k = 1,\ 2, \dots,\ n)$, и, следовательно, старые переменные будут рядами синусов и косинусов аргументов, кратных $\Omega_k t$.

Если в системе вообще нет резонансов, то преобразование Биркгофа можно применить для нормализации функции Гамильтона до сколь угодно высокой степени $(l \to \infty)$. Нормализованная во всех степенях функция Гамильтона зависит только от переменных $(q_k^* p_k^*)$ $(k = 1,\ 2, \dots,\ n)$. Тогда преобразованная система уравнений движения может быть проинтегрирована, причем для этого не надо пренебрегать в ее правых частях никакими членами. Казалось бы, что это должно означать локальную (в окрестности положения равновесия) интегрируемость уравнений движения. Однако это не так. Дело в том, что преобразование Биркгофа, нормализующее функцию Гамильтона во всех степенях, будет, как правило, расходящимся[1].

В последние десятилетия разработаны новые способы применения канонических преобразований в теории возмущений, например метод Деприи–Хори. С алгоритмической точки зрения он выгодно отличается от изложенных классических методов. Например, его применение не требует одной из самых громоздких процедур — обращения рядов, а формулы метода задаются рекуррентно, и необходимые преобразования могут быть достаточно просто реализованы на вычислительной машине[1].

Пример 1 (Колебания математического маятника). *Функция Гамильтона может быть (см. пример в п. 149) записана в виде*

$$H = \frac{1}{2ml^2}p_\varphi^2 - mgl\cos\varphi.$$

Для удобства введем безразмерные переменные φ', p'_φ, t' по формулам

$$\varphi' = \varphi, \quad p'_\varphi = \frac{p_\varphi}{ml\sqrt{gl}}, \quad t' = \sqrt{\frac{g}{l}}t. \tag{57}$$

Замена φ, $p_\varphi \to \varphi'$, p'_φ — каноническое преобразование с валентностью $c = \dfrac{1}{ml\sqrt{gl}}$ (см. пример 3 в п. 170). Учитывая еще, что введение вместо времени t новой независимой переменной t' приводит к делению функции Гамильтона на $\sqrt{g/l}$, получим, что уравнениям движения в безразмерных переменных (57) отвечает функция Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}{p_\varphi}'^2 - \cos\varphi'. \tag{58}$$

Рассмотрим движение маятника в окрестности его положения равновесия $\varphi = 0$. В этом случае φ' и p'_φ — малые величины. Разлагая функцию (58) в ряд по степеням φ', p'_φ и отбрасывая несущественный для уравнений движения постоянный член, получаем

$$H = \frac{1}{2}({p_\varphi}'^2 + \varphi'^2) - \frac{1}{24}\varphi'^4 + \dots, \tag{59}$$

[1]Изложение современного состояния задачи нормализации систем дифференциальных уравнений и подробную библиографию см. в исследовании: Брюно А. Д. Аналитическая форма дифференциальных уравнении // Труды Московского математического общества. 1971, Т. 25, С. 119–262; 1972, Т. 26, С. 199–239.

[1]См., например: Джакалья Г. Е. О. Методы теории возмущений для нелинейных систем, М.: Наука, 1979.

где многоточием обозначены члены выше четвертой степени относительно φ', ${p_\varphi}'$. *Если в разложении* (59) *пренебречь всеми неквадратичными членами, то уравнения движения станут линейными. В этом линейном приближении движение маятника представляет собой гармонические колебания. Чтобы выявить влияние нелинейностей в уравнениях движения, учтем в разложении* (59) *член* — $(1/24){\varphi'}^4$ *и для приближенного исследования нелинейных колебаний используем преобразование Биркгофа.*

Сделав замену переменных (каноническую, с валентностью $c = 2i$)

$$q = \varphi' - i{p_\varphi}', \quad p = \varphi' + ip'_\varphi, \tag{60}$$

получим

$$H = H_2 + H_4 + \dots ,$$

где

$$H_2 = iqp, \quad H_4 = -\frac{i}{192}(q^4 + 4q^3p + 6q^2p^2 + 4qp^3 + p^4).$$

Несложные вычисления показывают, что преобразование Биркгофа $q,\ p \to q^*,\ p^*$, *задаваемое производящей функцией* $qp^* + S_4(q,\ p^*)$, *где*

$$S_4 = \frac{1}{768}q^4 + \frac{1}{96}q^3p^* - \frac{1}{96}qp^{*3} - \frac{1}{768}p^{*4},$$

приводит функцию Гамильтона к виду

$$H^* = i(q^*p^*) - \frac{i}{32}(q^*p^*)^2, \tag{61}$$

причем переменные q, p *выражаются через* q^*, p* *по формулам*

$$q = q^* - \frac{1}{192}(2q^{*3} - 6q^*p^{*2} - p^{*3}), \quad p = p^* + \frac{1}{192}(q^{*3} + 6q^{*2}p^* - 2p^{*3}). \tag{62}$$

В формулах (61), (62) *отброшены члены, степень которых выше степени оставшихся членов.*

Канонические уравнения с функцией Гамильтона (61) *интегрируются. Если* q_0^*, p_0^* — *начальные значения величин* q^*, p^*, *то*

$$q^* = q_0^* e^{i\Omega t'}, \quad p^* = p_0^* e^{-i\Omega t'}, \tag{63}$$

где введено обозначение

$$\Omega = 1 - \frac{1}{16}(q_0^*\ p_0^*). \tag{64}$$

Приближенное решение задачи о нелинейных колебаниях маятника получается теперь из формул (57), (60), (62), *выражающих исходные величины* φ, p_φ *через новые переменные, в которых записано решение* (63).

Пусть момент $t = 0$ *соответствует максимальному углу отклонения* β *маятника от вертикали. Тогда из формул* (57), (60), (62) *следует, что с точностью до квадратов величины* β *включительно*

$$\Omega = 1 - \frac{1}{16}\beta^2.$$

С той же точностью для периода τ *нелинейных колебаний маятника получаем выражение*

$$\tau = \frac{2\pi}{\Omega}\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}\beta^2\right),$$

которое совпадает с выражением, полученным в п. 96 (*формула* (28)) *при помощи разложения в ряд точного значения периода колебаний маятника, записанного через полный эллиптический интеграл первого рода.*