Глава XII
Теория импульсивных движений

§ 1. Основные понятия и аксиомы

191. Ударные силы и импульсы. Рассмотрим механическую систему, состоящую из N материальных точек P_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, N$). До сих пор мы изучали такие движения, в которых скорости точек P_ν изменялись непрерывно как по величине, так и по направлению. Но на практике иногда приходится встречаться с явлениями, когда точки материальной системы, начиная с некоторого момента $t = t_0$, в течение очень малого промежутка времени τ скачком изменяют скорости, а система за тот же промежуток не меняет заметно своего положения. В таких случаях говорят, что *система испытывает удар.* Примером может служить движение брошенного в стену и отскочившего от нее упругого мяча.

Явление удара вызывается силами большой величины, действующими на систему в течение столь малого промежутка времени τ, что точки системы не успевают переместиться сколь-нибудь заметным образом. Такие силы называют *ударными.*

Движение системы под действием ударных сил называют *импульсивным движением.* При аналитическом представлении импульсивного движения промежуток времени τ, в течение которого оно происходит, считается бесконечно малым. При этом модуль импульса $\boldsymbol{I}_\nu$ ударной силы $\boldsymbol{F}_\nu$, приложенной к точке P_ν (он называется *ударным импульсом*),

$$\boldsymbol{I}_\nu = \int\limits_{t_0}^{t_0+\tau} \boldsymbol{F}_\nu\, dt \qquad (\nu = 1,\, 2,\, \ldots\,,\, N), \tag{1}$$

считается конечной величиной. Так как точки системы во все время удара τ имеют конечные скорости, то при $\tau \to 0$ их перемещениями можно пренебречь. Ускорение же $\boldsymbol{w}_\nu$ точки P_ν под действием ударной силы бесконечно велико, и поэтому оно не может служить кинематической характеристикой импульсивного движения. С кинематической точки зрения в импульсивных движениях, помимо момента t_0 и положения точек P_ν, нужно рассматривать лишь векторы скоростей точек в момент, непосредственно предшествующий, и в момент, непосредственно следующий за t_0. Эти скорости называют *скоростью до удара* и *скоростью после удара.* Примем для них обозначения $\boldsymbol{v}_\nu^-$ и $\boldsymbol{v}_\nu^+$.

192. Аксиомы. Пусть $\boldsymbol{F}_\nu$ — равнодействующая всех сил, действующих на точку P_ν, m_ν — масса этой точки, предполагаемая постоянной, а $\boldsymbol{w}_\nu$ — абсолютное ускорение точки. Из уравнения $m_\nu \boldsymbol{w}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu$ посредством интегрирования по времени от t_0 до $t_0 + \tau$ получим равенства

$$m_\nu(\boldsymbol{v}_\nu^+ - \boldsymbol{v}_\nu^-) = \boldsymbol{I}_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N). \tag{2}$$

В правых частях этих равенств содержатся только импульсы ударных сил, так как обычные силы, т. е. силы, имеющие конечную величину, дают при $\tau \to 0$ пренебрежимо малые импульсы. Следовательно, на скачкообразное изменение скоростей точек системы при ударах обычные силы не влияют. Например, при ударе мяча о стену влиянием силы тяжести на импульсивное движение мяча можно пренебречь.

Соотношения (2) утверждают, что приращение количества движения точки за время удара равно ударному импульсу.

При действии ударных сил на несвободную систему возникают, вообще говоря, ударные реакции связей. Поэтому изменение скорости каждой точки системы определяется не только импульсами приложенных к ней (активных) ударных сил, но также и ударными импульсами реакций связей.

Соотношение (2) является основным в теории импульсивных движений. Оно заменяет основную аксиому динамики (второй закон Ньютона). Роль ускорения в (2) играет приращение скорости $\Delta \boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{v}_\nu^+ - \boldsymbol{v}_\nu^-$, а роль силы — ударный импульс $\boldsymbol{I}_\nu$.

В теории импульсивных движений принимается еще ряд аксиом, аналогичных обычным аксиомам динамики: ударные импульсы, сообщаемые друг другу двумя материальными точками, равны по величине и направлены вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны; два ударных импульса, приложенных к точке, складываются по правилу параллелограмма; полный ударный импульс для каждой точки системы складывается из ударных импульсов активных сил и ударных импульсов реакций связей.

193. Главный вектор и главный момент ударных импульсов. При исследовании импульсивных движений системы материальных точек P_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, N)$ часто целесообразно подразделять ударные импульсы на внешние и внутренние. Внешние и внутренние ударные импульсы — это соответственно импульсы внешних и внутренних ударных сил системы. При таком подразделении импульсов основное уравнение (2) импульсивного движения системы можно записать в следующем виде:

$$m_\nu \Delta \boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{I}_\nu^{(e)} + \boldsymbol{I}_\nu^{(i)} \qquad (\nu = 1,\, 2,\, \ldots\,,\, N), \tag{3}$$

где $\boldsymbol{I}_\nu^{(e)}$ — сумма внешних ударных импульсов, а $\boldsymbol{I}_\nu^{(i)}$ — сумма внутренних ударных импульсов, действующих на точку P_ν системы.

Сумма всех ударных импульсов системы

$$\boldsymbol{S} = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{I}_\nu \tag{4}$$

называется *главным вектором ударных импульсов.*

Пусть $\boldsymbol{r}_\nu$ — радиус-вектор точки P_ν относительно точки O. Сумма моментов ударных импульсов относительно точки O

$$\boldsymbol{L}_0 = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{r}_\nu \times \boldsymbol{I}_\nu \tag{5}$$

называется *главным моментом ударных импульсов* относительно этой точки.

Слагаемые, содержащие внутренние импульсы, входят в правые части выражений (4), (5) попарно и взаимно уничтожаются. Поэтому

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}^{(e)} = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{I}_\nu^{(e)}, \quad \boldsymbol{L}_0 = \boldsymbol{L}_0^{(e)} = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{r}_\nu \times \boldsymbol{I}_\nu^{(e)}, \tag{6}$$

т. е. главный вектор и главный момент всех ударных импульсов системы равен соответственно главному вектору $\boldsymbol{S}^{(e)}$ и главному моменту $\boldsymbol{L}_0^{(e)}$ внешних ударных импульсов.

194. Задачи теории импульсивного движения. Цель исследования импульсивного движения состоит в определении кинематического состояния системы после удара, если известно ее состояние до удара. При этом иногда целесообразно различать две основные задачи: 1) по заданным ударным импульсам определить изменение скоростей точек системы; 2) по заданному изменению скоростей точек системы определить ударные импульсы. Иногда требуется также определить ударные импульсы реакций связей.