§ 2. Теоремы об изменении основных динамических величин при импульсивном движении

195. Теорема об изменении количества движения. Сложив уравнения (3) п. 193 и учтя постоянство масс m_ν, получим равенство

$$\Delta\left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{I}_\nu^{(e)} + \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{I}_\nu^{(i)}$$

или

$$\Delta \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{S}^{(e)}, \tag{1}$$

т. е. *изменение количества движения системы при ударе равно главному вектору внешних ударных импульсов.*

Так как $\boldsymbol{Q} = M\boldsymbol{v}_C$, где M — масса системы, $M = \sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu = \text{const}$, а $\boldsymbol{v}_C$ — скорость центра инерции, то равенство (1) можно переписать в таком виде:

$$M\Delta \boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{S}^{(e)}, \tag{2}$$

т. е. *импульсивное движение центра инерции системы происходит так же, как импульсивное движение материальной точки, масса которой равна массе системы и к которой приложены все внешние ударные импульсы, действующие на систему.*

Пример 1. *Снаряд, летевший со скоростью v, разорвался в воздухе на два осколка равных масс. Скорость первого осколка направлена под углом α к направлению первоначального движения и имеет величину $2v$. Найти скорость второго осколка.*

Так как внешних ударных импульсов нет, то вектор первоначального количества движения снаряда равен сумме векторов количеств движения осколков. Пусть m — масса снаряда, а β — угол между вектором $\boldsymbol{v}_2$ скорости второго осколка и направлением движения снаряда. Из рис. 144 легко получить, что $v_2 = 4v\sin\frac{\alpha}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$.

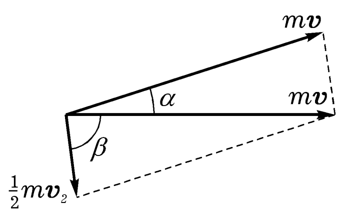

Рис. 144

Заметим, что при решении не потребовалось предположения об отсутствии аэродинамических сил и силы тяжести, потому что эти силы не являются ударными.

196. Теорема об изменении кинетического момента. Пусть A — произвольная точка пространства, подвижная или неподвижная, а $\boldsymbol{\rho}_\nu$ — радиус-вектор точки P_ν системы относительно A. Умножим обе части равенства (3) п. 193 слева векторно на $\boldsymbol{\rho}_\nu$ и результаты просуммируем. Тогда, учитывая постоянство m_ν и тот факт, что $\boldsymbol{\rho}_\nu$ не меняется во время удара, получаем соотношение

$$\Delta\left(\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_\nu \times m_\nu \boldsymbol{v}_\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_\nu \times \boldsymbol{I}_\nu^{(e)} + \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_\nu \times \boldsymbol{I}_\nu^{(i)}.$$

Сумма в левой части представляет собой абсолютный кинетический момент $\boldsymbol{K}_A$ системы относительно центра A. Поэтому, учитывая равенства (5) и (6) из п. 193, последнее соотношение можно записать в виде

$$\Delta \boldsymbol{K}_A = \boldsymbol{L}_A^{(e)}, \tag{3}$$

т. е. *изменение кинетического момента системы относительно любого центра равно главному моменту внешних ударных импульсов относительно этого центра.*

Пример 1. *Два шкива радиусов r_1 и r_2 вращаются вокруг параллельных осей с угловыми скоростями ω_1 и ω_2* (рис. 145), *причем $\omega_1 r_1 > \omega_2 r_2$. На шкивы намотана ненатянутая лента. В некоторый момент лента натягивается, вследствие чего происходит удар. Требуется определить послеударные угловые скорости Ω_1 и Ω_2 шкивов и величину I ударного импульса силы натяжения ленты, считая, что после удара лента остается натянутой. Моменты инерции шкивов относительно их осей вращения равны J_1 и J_2.*

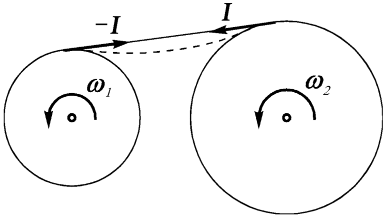

Рис. 145

Применяя формулу (3) *к вращению первого шкива и учитывая, что ударный импульс реакции оси вращения не создает момента относительно этой оси, имеем*

$$J_1(\Omega_1 - \omega_1) = -I r_1. \tag{4}$$

Для второго шкива получим

$$J_2(\Omega_2 - \omega_2) = I r_2. \tag{5}$$

Но так как лента остается натянутой, то

$$\Omega_1 r_1 = \Omega_2 r_2. \tag{6}$$

Из (4)–(6) *находим*

$$\frac{\Omega_1}{r_2} = \frac{J_1 r_2 \omega_1 + J_2 r_1 \omega_2}{J_1 r_2^2 + J_2 r_1^2} = \frac{\Omega_2}{r_1}, \quad I = \frac{J_1 J_2 (\omega_1 r_1 - \omega_2 r_2)}{J_1 r_2^2 + J_2 r_1^2}.$$

Если шкивы первоначально вращаются в противоположные стороны, то в результате натяжения ленты возможно прекращение их вращения, причем одновременное. Это произойдет, если выполнено равенство $J_1 r_2 \omega_1 + J_2 r_1 \omega_2 = 0$

Пример 2. *Находящемуся в покое тонкому однородному стержню массы m и длины l при помощи удара по одному из его концов сообщен импульс I в перпендикулярном к стержню направлении* (рис. 146)*. Найти послеударное кинематическое состояние стержня.*

Пусть v_0 — скорость центра масс стержня, а ω — его угловая скорость после удара. Из формул (2) *и* (3) *получаем два уравнения*

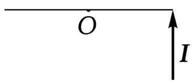

Рис. 146

$$mv_0 = I, \quad \frac{1}{12} ml^2 \omega = I \frac{l}{2},$$

отсюда находим

$$v_0 = \frac{I}{m}, \quad \omega = \frac{6I}{ml}. \tag{7}$$

Пример 3. *Найти послеударное кинематическое состояние стержня предыдущего примера, если один из его концов шарнирно закреплен* (рис. 147).

В этом случае после удара стержень вращается вокруг точки A. Из формулы (3) *получаем уравнение для нахождения угловой скорости вращения ω:*

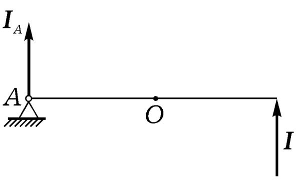

Рис. 147

$$\frac{1}{3} ml^2 \omega = Il,$$

отсюда

$$\omega = \frac{3I}{ml}. \tag{8}$$

Можно найти и неизвестный ударный импульс I_A шарнира. Из (2) *имеем*

$$mv_0 = I + I_A,$$

но $v_0 = \omega \dfrac{l}{2} = \dfrac{3I}{2m}$*. Поэтому* $I_A = mv_0 - I = \dfrac{1}{2} I$.

197. Теорема об изменении кинетической энергии. Пусть T^- и T^+ — величины кинетической энергии системы до и после удара:

$$T^- = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu^{-2}, \quad T^+ = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu^{+2}. \tag{9}$$

Имеет место следующая

Теорема. *Изменеие кинетической энергии при импульсивном движении равно сумме скалярных произведений каждого ударного импульса на полусумму скоростей точки его приложения непосредственно перед ударом и после него:*

$$T^+ - T^- = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{I}_\nu^{(e)} \cdot \frac{\boldsymbol{v}_\nu^- + \boldsymbol{v}_\nu^+}{2} + \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{I}_\nu^{(i)} \cdot \frac{\boldsymbol{v}_\nu^- + \boldsymbol{v}_\nu^+}{2}. \tag{10}$$

Доказательство.

Умножим каждое из уравнений (3) п. 193 скалярно на $\boldsymbol{v}_\nu^+$. Получим равенства

$$m_\nu(\boldsymbol{v}_\nu^+ - \boldsymbol{v}_\nu^-) \cdot \boldsymbol{v}_\nu^+ = \boldsymbol{I}_\nu^{(e)} \cdot \boldsymbol{v}_\nu^+ + \boldsymbol{I}_\nu^{(i)} \cdot \boldsymbol{v}_\nu^+ \quad (\nu = 1, 2, \ldots, N).$$

Если в левых частях этих равенств сомножитель $\boldsymbol{v}_\nu^+$ представить в виде

$$\boldsymbol{v}_\nu^+ = \frac{1}{2}\Big[(\boldsymbol{v}_\nu^+ + \boldsymbol{v}_\nu^-) + (\boldsymbol{v}_\nu^+ - \boldsymbol{v}_\nu^-)\Big],$$

а затем произвести суммирование равенств по ν, то после простых преобразований и учета обозначений (9) придем к соотношению

$$T^- - T^+ = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\boldsymbol{v}_\nu^- - \boldsymbol{v}_\nu^+)^2 - \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{I}_\nu^{(e)} \cdot \boldsymbol{v}_\nu^+ - \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{I}_\nu^{(i)} \cdot \boldsymbol{v}_\nu^+. \tag{11}$$

Теперь умножим уравнения (3) п. 193 на $\boldsymbol{v}_\nu^-$, в левых частях получающихся равенств представим сомножитель $\boldsymbol{v}_\nu^-$ в виде

$$\boldsymbol{v}_\nu^- = \frac{1}{2}\Big[(\boldsymbol{v}_\nu^+ + \boldsymbol{v}_\nu^-) - (\boldsymbol{v}_\nu^+ - \boldsymbol{v}_\nu^-)\Big]$$

и произведем суммирование по ν. Тогда получим такое соотношение:

$$T^+ - T^- = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\boldsymbol{v}_\nu^+ - \boldsymbol{v}_\nu^-)^2 + \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{I}_\nu^{(e)} \cdot \boldsymbol{v}_\nu^- + \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{I}_\nu^{(i)} \cdot \boldsymbol{v}_\nu^-. \tag{12}$$

После вычитания равенства (11) из равенства (12) и деления на 2 приходим к доказываемому соотношению (10).

Пример 1. *Найдем изменение кинетической энергии стержня в примерах 2 и 3 предыдущего параграфа.*

Учитывая, что в твердом теле внутренние силы не совершают работы и что перед ударом стержень покоился, из (10) *получаем* $T^+ = \frac{1}{2}Iv$, *где* v — *величина послеударной скорости той точки стержня, к которой приложена ударная сила.*

В примере 2 *получаем* $v = v_0 + \omega\frac{l}{2} = \frac{I}{m} + \frac{6I}{ml}\frac{l}{2} = \frac{4I}{m}$ *и* $T^+ = \frac{2I^2}{m}$. *В примере же* 3 *имеем* $v = \omega l = \frac{3I}{ml}l = \frac{3I}{m}$ *и* $T^+ = \frac{3I^2}{2m}$.

Замечание 1. *Равенства* (11) *и* (12) *по существу представляют собой еще две различные формы теоремы об изменении кинетической энергии при импульсивном движении.*

Дадим их словесное выражение.

Векторы $\boldsymbol{v}_\nu^- - \boldsymbol{v}_\nu^+$ и $\boldsymbol{v}_\nu^+ - \boldsymbol{v}_\nu^-$ называют соответственно *потерянной* и *приобретенной скоростями*, а величину

$$T_* = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\boldsymbol{v}_\nu^- - \boldsymbol{v}_\nu^+)^2 = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\boldsymbol{v}_\nu^+ - \boldsymbol{v}_\nu^-)^2 \tag{13}$$

— кинетической энергией потерянных (или приобретенных) скоростей. Приращение $T^+ - T^-$ называют еще приобретенной, а величину $T^- - T^+$ — потерянной кинетической энергией при импульсивном движении. Используя эту терминологию, соотношение (11) можно прочитать следующим образом: *потеря кинетической энергии равна кинетической энергии потерянных скоростей, уменьшенной на сумму работ внешних и внутренних ударных сил, если считать, что точки их приложения имеют в течение всего времени удара постоянные скорости, равные их послеударным скоростям.*

А соотношение (12) означает, что *приобретенная кинетическая энергия равна кинетической энергии приобретенных скоростей, увеличенной на сумму работ внешних и внутренних ударных сил, если считать, что точки их приложения имеют в течение всего времени удара постоянные скорости, равные их доударным скоростям.*

§ 3. Импульсивное движение твердого тела

198. Удар по свободному твердому телу. Изучим влияние заданных ударных импульсов на движение твердого тела. Так как кинематическое состояние тела вполне определяется вектором скорости