Пример 1. *Найдем изменение кинетической энергии стержня в примерах 2 и 3 предыдущего параграфа.*

Учитывая, что в твердом теле внутренние силы не совершают работы и что перед ударом стержень покоился, из (10) *получаем* $T^+ = \frac{1}{2}Iv$, *где* v *— величина послеударной скорости той точки стержня, к которой приложена ударная сила.*

В примере 2 *получаем* $v = v_0 + \omega\frac{l}{2} = \frac{I}{m} + \frac{6I}{ml}\frac{l}{2} = \frac{4I}{m}$ *и* $T^+ = \frac{2I^2}{m}$. *В примере же* 3 *имеем* $v = \omega l = \frac{3I}{ml}l = \frac{3I}{m}$ *и* $T^+ = \frac{3I^2}{2m}$.

Замечание 1. *Равенства* (11) *и* (12) *по существу представляют собой еще две различные формы теоремы об изменении кинетической энергии при импульсивном движении.*

Дадим их словесное выражение.

Векторы $\boldsymbol{v}_\nu^- - \boldsymbol{v}_\nu^+$ и $\boldsymbol{v}_\nu^+ - \boldsymbol{v}_\nu^-$ называют соответственно *потерянной* и *приобретенной скоростями*, а величину

$$T_* = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\boldsymbol{v}_\nu^- - \boldsymbol{v}_\nu^+)^2 = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\boldsymbol{v}_\nu^+ - \boldsymbol{v}_\nu^-)^2 \qquad (13)$$

— кинетической энергией потерянных (или приобретенных) скоростей. Приращение $T^+ - T^-$ называют еще приобретенной, а величину $T^- - T^+$ — потерянной кинетической энергией при импульсивном движении. Используя эту терминологию, соотношение (11) можно прочитать следующим образом: *потеря кинетической энергии равна кинетической энергии потерянных скоростей, уменьшенной на сумму работ внешних и внутренних ударных сил, если считать, что точки их приложения имеют в течение всего времени удара постоянные скорости, равные их послеударным скоростям.*

А соотношение (12) означает, что *приобретенная кинетическая энергия равна кинетической энергии приобретенных скоростей, увеличенной на сумму работ внешних и внутренних ударных сил, если считать, что точки их приложения имеют в течение всего времени удара постоянные скорости, равные их доударным скоростям.*

§ 3. Импульсивное движение твердого тела

198. Удар по свободному твердому телу. Изучим влияние заданных ударных импульсов на движение твердого тела. Так как кинематическое состояние тела вполне определяется вектором скорости какой-либо его точки и вектором угловой скорости, то задача об импульсивном движении свободного твердого тела сводится к нахождению изменений этих двух векторов за время удара.

Чтобы сделать вычисления наиболее простыми, возьмем за начало координат центр масс G тела, а за оси координат примем главные центральные оси инерции тела. Введем обозначения: S_x, S_y, S_z, L_x, L_y, L_z и p, q, r — проекции главного вектора $\boldsymbol{S}^{(e)}$, главного момента $\boldsymbol{L}_G^{(e)}$ внешних ударных импульсов относительно центра масс и вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ тела на указанные оси; m — масса; A, B, C — главные центральные моменты инерции тела; величины Ap, Bq, Cr будут проекциями вектора $\boldsymbol{K}_G$ кинетического момента тела относительно центра масс.

Теоремы об изменении количества движения и кинетического момента, согласно равенствам (2) и (3) предыдушего параграфа, дают два векторных уравнения

$$m\Delta \boldsymbol{v}_G = \boldsymbol{S}^{(e)}, \quad \Delta \boldsymbol{K}_G = \boldsymbol{L}_G^{(e)}. \tag{1}$$

Отсюда получаем выражения для проекций приращений вектора скорости центра масс $\Delta \boldsymbol{v}_G$ и вектора угловой скорости $\Delta\boldsymbol{\omega}$:

$$v_{Gx}{}^{+} - v_{Gx}{}^{-} = \frac{S_x}{m}, \quad v_{Gy}{}^{+} - v_{Gy}{}^{-} = \frac{S_y}{m}, \quad v_{Gz}{}^{+} - v_{Gz}{}^{-} = \frac{S_z}{m}, \tag{2}$$

$$p^{+} - p^{-} = \frac{L_x}{A}, \quad q^{+} - q^{-} = \frac{L_y}{B}, \quad r^{+} - r^{-} = \frac{L_z}{C}. \tag{3}$$

Если тело совершает плоское движение, например, параллельно плоскости Oxy, то из шести соотношений (2), (3) остаются только три:

$$v_{Gx}{}^{+} - v_{Gx}{}^{-} = \frac{S_x}{m}, \quad v_{Gy}{}^{+} - v_{Gy}{}^{-} = \frac{S_y}{m}, \quad r^{+} - r^{-} = \frac{L_z}{C}. \tag{4}$$

Упражнение 1. *Показать, что первоначально покоящееся тело в его импульсивном движении относительно центра масс начнет вращаться вокруг радиуса-вектора той точки центрального эллипсоида инерции, в которой плоскость, касательная к поверхности эллипсоида, перпендикулярна главному моменту ударных импульсов относительно центра масс.*

Найдем изменение кинетической энергии твердого тела под действием заданных ударных импульсов. Согласно теореме Кёнига (см. п. 83, 84), имеем такое выражение для кинетической энергии:

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2).$$

Подставив в это выражение сначала значения $\boldsymbol{v}_G^+$, $\boldsymbol{\omega}^+$ векторов скорости центра масс и угловой скорости тела после удара, а затем их значения $\boldsymbol{v}_G^-$, $\boldsymbol{\omega}^-$ до удара и вычтя почленно полученные равенства, найдем, на основании уравнений (2), (3)

$$T^+ - T^- = \boldsymbol{S}^{(e)} \cdot \frac{\boldsymbol{v}_G^+ + \boldsymbol{v}_G^-}{2} + \boldsymbol{L}^{(e)} \cdot \frac{\boldsymbol{\omega}^+ + \boldsymbol{\omega}^-}{2}. \tag{5}$$

Величины $\boldsymbol{v}_G^+$ и $\boldsymbol{\omega}^+$ можно отсюда исключить опять же при помощи уравнений (2), (3). В результате получим следующее выражение для изменения кинетической энергии тела через главный вектор $\boldsymbol{S}^{(e)}$ и главный момент $\boldsymbol{L}_G^{(e)}$ заданных ударных импульсов и через величины $\boldsymbol{v}_G^-$, $\boldsymbol{\omega}^-$, которые определяют доударное кинематическое состояние твердого тела:

$$T^+ - T^- = \frac{1}{2}\left(\frac{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}{m} + \frac{L_x^2}{A} + \frac{L_y^2}{B} + \frac{L_z^2}{C}\right) + \boldsymbol{S}^{(e)} \cdot \boldsymbol{v}_G^- + \boldsymbol{L}_G^{(e)} \cdot \boldsymbol{\omega}^-. \tag{6}$$

Упражнение 2. *Неподвижное свободное твердое тело приводят к вращению относительно центра масс при помощи пары ударных сил. Величина импульсивного момента пары равна L. Главные центральные моменты инерции тела удовлетворяют неравенствам $A > B > C$. Показать, что максимально возможное значение приобретаемой телом кинетической энергии равно $\frac{L^2}{2C}$, а вектор момента пары должен быть при этом коллинеарен наибольшей оси центрального эллипсоида инерции тела.*

Пример 1. *Горизонтальным кием ударяют бильярдный шар в его меридианной плоскости* (рис. 148). *На какой высоте h над центром шара следует сообщить удар, чтобы после удара шар двигался без скольжения?*

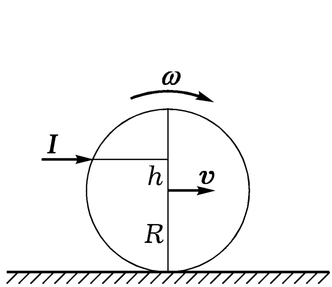

Рис. 148

Пусть m — масса шара, R — его радиус, I — величина ударного импульса. Если v — скорость центра, а ω — угловая скорость шара после удара, то справедливы уравнения

$$mv = I, \quad \frac{2}{5}mR^2\omega = Ih. \tag{7}$$

(*Реакция плоскости конечна и не дает вклада в ударный импульс*). *Из* (7) *и условия* $v = \omega R$ *отсутствия скольжения находим* $h = \frac{2}{5}R$.

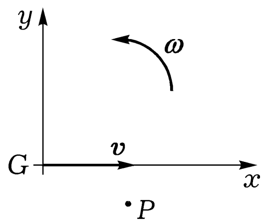

Рис. 149

Пример 2. *Твердое тело, имеющее форму пластинки, совершает произвольное движение в своей плоскости. Точку P пластинки внезапно останавливают* (*шарнирно закрепляют*). *Где должна находиться точка P, чтобы пластинка остановилась?*

Пусть $\boldsymbol{v}$ — скорость центра масс G, а $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость пластинки в момент, непосредственно предшествующий закреплению точки P. Для удобства вычислений ось Gx направим вдоль вектора $\boldsymbol{v}$, координаты точки P обозначим через x, y (рис. 149).

Так как Gz — главная центральная ось инерции, то для описания импульсивного движения применимы уравнения (4). *В этих уравнениях $L_z = xS_y - yS_x$, где S_x, S_y — компоненты ударного импульса, возникающего при закреплении точки P.*

Учитывая, что $v_{Gx}^- = v$, $v_{Gy}^- = v_{Gx}^+ = v_{Gy}^+ = 0$, $r^- = \omega$, $r^+ = 0$, из уравнений (4) *находим $S_x = -mv$, $S_y = 0$, x — произвольная величина, а $y = -\frac{C\omega}{mv}$. Следовательно, точка P должна лежать в полуплоскости $y < 0$ на прямой, параллельной направлению скорости центра масс и отстоящей от него на расстоянии $\frac{C\omega}{mv}$.*

Пусть в точке Q покоящегося тела приложен ударный импульс $\boldsymbol{I}$. Из уравнений (1), (2) тогда получаем $\boldsymbol{v}_G^+ = \frac{\boldsymbol{I}}{m}$, $\boldsymbol{K}_G^+ = \overline{GQ} \times \boldsymbol{I}$. Отсюда следует, что послеударное кинематическое состояние первоначально покоящегося тела не вполне произвольно: скорость центра масс и кинетический момент относительно центра масс должны быть ортогональными.

Упражнение 3. *Из сказанного выше сразу следует, что если свободное твердое тело движется так, что $\boldsymbol{K}_G \cdot \boldsymbol{v}_G \neq 0$, то его нельзя остановить одним импульсом. Показать, что если $\boldsymbol{K}_G \cdot \boldsymbol{v}_G = 0$ и $\boldsymbol{v}_G \neq 0$, то тело можно остановить, приложив к нему единственный импульс. Каковы будут его величина и линия действия?*

199. Удар по телу с одной неподвижной точкой. Неподвижную точку O примем за начало координат, а оси x, y, z совместим с главными осями инерции тела для точки O; через $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{L}$ обозначим главный вектор и главный момент ударных импульсов активных сил.

Задача состоит в нахождении приращения $\Delta\boldsymbol{\omega}$ вектора угловой скорости тела и ударного импульса реакции, который может возникнуть в точке O.

Проекции приращения вектора угловой скорости определяются уравнениями (3), в которых теперь A, B, C — главные моменты инерции тела относительно точки O.

Ударный импульс $\boldsymbol{I}'$ реакции в точке O определяется первым из уравнений (1), которое в рассматриваемом случае принимает вид

$$m\Delta\boldsymbol{v}_G = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{I}'. \tag{8}$$

Так как положение центра масс при ударе не меняется, то $\Delta\boldsymbol{v}_G = \Delta\boldsymbol{\omega} \times \overline{OG}$. Поэтому на основании уравнения (8) заключаем, что

$$\boldsymbol{I}' = m\Delta\boldsymbol{\omega} \times \overline{OG} - \boldsymbol{S}. \tag{9}$$

Рассмотрим частный случай, когда на тело действует единственный активный ударный импульс $\boldsymbol{I}$, приложенный в точке P. Тогда $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{I}$, а $\boldsymbol{L} = \overline{OP} \times \boldsymbol{I}$. Поставим следующий вопрос: возможно ли, и при каких условиях, чтобы заданный активный импульс $\boldsymbol{I}$ не вызывал ударной реакции связи. Этот вопрос требует ответа, когда, например, необходимо посредством удара привести тело в движение вокруг неподвижной точки, но нет уверенности в достаточной прочности связи.

Пусть x_G, y_G, z_G — известные координаты центра масс, а x, y, z — координаты точки P приложения неизвестного импульса $\boldsymbol{I}$. При $\boldsymbol{I}' = 0$ из (9) и (3) получим три уравнения:

$$\begin{aligned}
&\frac{z_G}{B}\Big(zI_x - xI_z\Big) - \frac{y_G}{C}\Big(xI_y - yI_x\Big) = \frac{I_x}{m},\\
&\frac{x_G}{C}\Big(xI_y - yI_x\Big) - \frac{z_G}{A}\Big(yI_z - zI_y\Big) = \frac{I_y}{m},\\
&\frac{y_G}{A}\Big(yI_z - zI_y\Big) - \frac{x_G}{B}\Big(zI_x - xI_z\Big) = \frac{I_z}{m}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Эти уравнения линейны и однородны относительно неизвестных проекций импульса $\boldsymbol{I}$, поэтому величина I этого импульса может быть произвольной. Кроме того, $\boldsymbol{I}$ определяется еще с точностью до изменения его направления на противоположное.

Так как по смыслу задачи $\boldsymbol{I} \neq 0$, то определитель системы (10) должен равняться нулю:

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{yy_G}{C} + \dfrac{zz_G}{B} - \dfrac{1}{m} & -\dfrac{xy_G}{C} & -\dfrac{xz_G}{B} \\ -\dfrac{yx_G}{C} & \dfrac{zz_G}{A} + \dfrac{xx_G}{C} - \dfrac{1}{m} & -\dfrac{yz_G}{A} \\ -\dfrac{zx_G}{B} & -\dfrac{zy_G}{A} & \dfrac{xx_G}{B} + \dfrac{yy_G}{A} - \dfrac{1}{m} \end{vmatrix} = 0. \tag{11}$$

Отсюда следует, что геометрическим местом возможного положения точек P в общем случае является поверхность третьего порядка. Импульс, приложенный в любой точке этой поверхности, не вызывает ударной реакции связи. Линия действия импульса $\boldsymbol{I}$ определяется из уравнений (10), если в них подставить координаты x, y, z выбранной точки указанной поверхности.

В некоторых частных случаях поверхность (11) может вырождаться в более простые поверхности. Пусть, например, ось OG, проходящая через неподвижную точку O и центр масс тела, будет главной осью инерции. Если ее принять за ось Oz, то $x_G = y_G = 0$, и уравнение (11) получит вид

$$D = -\frac{1}{m}\left(\frac{zz_G}{B} - \frac{1}{m}\right)\left(\frac{zz_G}{A} - \frac{1}{m}\right) = 0,$$

т. е. точка P должна лежать на одной из двух плоскостей, перпендикулярных главной оси инерции Oz и расположенных по ту же сторону от точки O, что и центр масс:

$$z = \frac{B}{mz_G}, \quad z = \frac{A}{mz_G}. \tag{12}$$

Из уравнений (10) тогда следует, что (при $A \neq B$) импульс $\boldsymbol{I}$ должен быть параллелен оси Ox в первом случае и оси Oy во втором. Для динамически симметричного тела ($A = B$) плоскости (12) сливаются в одну, а импульс $\boldsymbol{I}$ имеет произвольное направление в этой плоскости.

Пример 1. *Твердое тело вращается вокруг неподвижной точки O. В некоторый момент времени, когда угловая скорость тела равна $\boldsymbol{\omega}^-$, в нем внезапно закрепляется вторая точка O_1, так, что после этого тело может только вращаться вокруг оси u, проходящей через точки O и O_1. Найти угловую скорость тела в этом вращении.*

Обозначим через α, β, γ косинусы углов, образуемых осью u с осями Ox, Oy, Oz. Кинетический момент тела относительно оси u перед

закреплением точки O_1 равен $Ap^-\alpha + Bq^-\beta + Cr^-\gamma$, а после закрепления имеет (см. п. 77, 82) ***величину $\left(A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2\right)\omega^+$. Но ударные импульсы реакций в точках O и O_1 не создают момента относительно оси u. Следовательно, кинетический момент тела относительно этой оси не изменяется во время удара. Поэтому***

$$\omega^+ = \frac{Ap^-\alpha + Bq^-\beta + Cr^-\gamma}{A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2}.$$

200. Удар по телу с неподвижной осью. Пусть твердое тело вращается вокруг оси, проходящей через его неподвижные точки O и O_1 (рис. 150). К телу прикладывается ударная сила с импульсом $\boldsymbol{I}$. Требуется найти изменение угловой скорости вращения тела, а также ударные импульсы реакций в точках O и O_1.

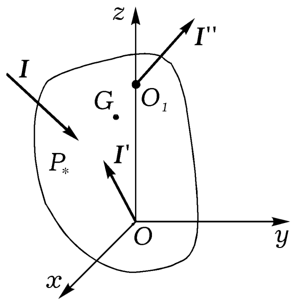

Рис. 150

Пусть $Oxyz$ — система координат с началом в точке O, ось Oz которой направлена по оси вращения, а ось Ox перпендикулярна направлению ударного импульса, так что вектор $\boldsymbol{I}$ задается компонентами 0, I_y, I_z. Центр масс G и точка P_* приложения импульса имеют соответственно координаты x_G, y_G, z_G и x_*, y_*, z_*, вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ задается компонентами 0, 0, r. Для компонентов ударных импульсов $\boldsymbol{I}'$ и $\boldsymbol{I}''$ реакций в точках O и O_1 примем обозначения I'_x, I'_y, I'_z и I''_x, I''_y, I''_z соответственно. Матрица $\mathbf{J}$ тензора инерции тела для точки O имеет вид (4) п. 77. Расстояние между точками O и O_1 обозначим через h.

Из теорем об изменении кинетического момента и количества движения имеем

$$m\Delta\boldsymbol{\omega} \times \overline{OG} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{I}' + \boldsymbol{I}'', \quad \mathbf{J}\Delta\boldsymbol{\omega} = \overline{OP_*} \times \boldsymbol{I} + \overline{OO_1} \times \boldsymbol{I}''.$$

В скалярной форме эти соотношения запишутся в виде следующих шести уравнений:

$$-my_G\Delta r = I'_x + I''_x, \tag{13}$$

$$mx_G\Delta r = I_y + I'_y + I''_y, \tag{14}$$

$$0 = I_z + I'_z + I''_z, \tag{15}$$

$$-J_{xz}\Delta r = y_*I_z - z_*I_y - hI''_y, \tag{16}$$

$$-J_{yz}\Delta r = -x_*I_z + hI''_x, \tag{17}$$

$$J_z\Delta r = x_*I_y. \tag{18}$$

Из последнего уравнения определяется изменение угловой скорости Δr. Если ударный импульс $\boldsymbol{I}$ и ось вращения тела не лежат в одной плоскости, то величина Δr отлична от нуля. Остальные пять уравнений (13)–(17) служат для нахождения шести проекций ударных импульсов реакций в точках O и O_1. Эта задача является неопределенной: нельзя найти отдельно величины I'_z и I''_z, а можно определить только их сумму.

Полагая, что $\Delta r \neq 0$, рассмотрим задачу об определении условий, при выполнении которых ударные импульсы реакций в точках O и O_1 не возникают. При $\boldsymbol{I}' = \boldsymbol{I}'' = 0$ из (15) следует, что $I_z = 0$, т. е. направление ударного импульса параллельно оси Oy. А из (13) получаем, что $y_G = 0$. Следовательно, центр масс лежит в плоскости, проходящей через ось вращения и перпендикулярную направлению импульса. Если $x_G = 0$, т. е. центр масс лежит на оси вращения, то (см. (14)) поставленная задача не имеет решения: при $\boldsymbol{I} \neq 0$ всегда будут возникать ударные реакции.

Пусть $x_G \neq 0$. Из (14) и (16) имеем $J_{xz} - m x_G z_* = 0$, или

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu x_\nu \left(z_\nu - z_*\right) = 0. \tag{19}$$

А из (17) следует равенство $J_{yz} = 0$, что в сочетании с условием $y_G = 0$ дает соотношение

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu y_\nu \left(z_\nu - z_*\right) = 0. \tag{20}$$

Равенства (19) и (20) означают (см. п. 78), что ось вращения является главной осью инерции тела для своей точки с координатами 0, 0, z_*.

Таким образом, произвольный по величине ударный импульс не вызывает ударных импульсов реакций в точках O и O_1 только тогда, когда ось вращения является главной осью инерции тела. Если это условие выполнено, то импульс должен быть перпендикулярен плоскости, проходящей через ось вращения и центр масс тела, причем он должен лежать в плоскости, перпендикулярной оси и проходящей через ту ее точку, для которой она является главной осью инерции.

Наконец из (14) и (18) находим

$$x_* = \frac{J_z}{m x_G}, \tag{21}$$

что окончательно определяет линию действия ударного импульса. Ее называют *осью удара*, а точку, в которой она пересекает плоскость, проходящую через ось вращения и центр масс — *центром удара*.

Пример 1 (Случай пластинки). *Рассмотрим плоскую фигуру, которая может вращаться вокруг некоторой оси Oz, лежащей в ее плоскости* (рис. 151). *Для любой оси Oz можно найти центр удара. Это следует из того, что ось Oz всегда является главной осью инерции для одной из своих точек. Чтобы показать справедливость сказанного, перейдем к системе координат $O'x'y'z$, смещенной относительно исходной системы $Oxyz$ на вектор $\overline{OO'}$, имеющий в системе $Oxyz$ компоненты* 0, 0, z_*. *Ось Ox (и ось $O'x'$) лежит в плоскости пластинки.*

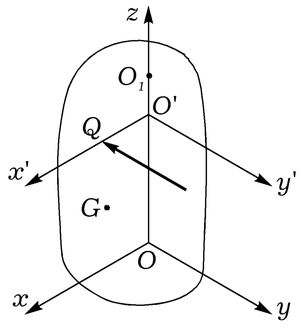

Рис. 151

Тогда $J_{y'z} = 0$, так как для каждой частицы P_ν тела имеем $y'_\nu = 0$. Величина же $J_{x'z}$ будет равна нулю, если z_* выбрать в соответствии с формулой (19)*: $z_* = \dfrac{J_{xz}}{mx_G}$.*

Теперь, если импульс $\boldsymbol{I}$ перпендикулярен плоскости пластинки и точка Q его приложения лежит на оси $O'x'$, причем абсцисса x' точки Q определяется (в соответствии с формулой (21)*) равенством $x' = \dfrac{J_z}{mx_G}$, то Q — центр удара. Например, для однородной двери ширины a центр удара находится на середине высоты на расстоянии $\dfrac{2}{3}a$ от оси.*

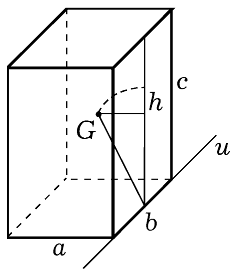

Рис. 152

Пример 2. *Тяжелый однородный параллелепипед с ребрами a, b, c скользит по гладкой горизонтальной плоскости так, что ребро длины c вертикально* (рис. 152)*. Направление скоольжения перпендикулярно ребру длины b. Внезапно это ребро задерживается препятствием и становится неподвижным. Найдем, при какой скорости движения v произойдет опрокидывание параллелепипеда.*

Послеударное движение параллелепипеда является вращением вокруг оси u, содержащей остановленное ребро. Так как кинетический момент относительно этой оси за время удара не изменяется, то

$$\frac{1}{2}mvc = J_u\omega, \tag{22}$$

где m — масса, ω — послеударная угловая скорость параллелепипеда,

J_u — *его момент инерции относительно оси* u*. Согласно п.* 75, 76

$$J_u = \frac{1}{3}m\left(a^2 + c^2\right). \tag{23}$$

Для опрокидывания параллелепипеда необходимо и достаточно, чтобы его центр тяжести при своем движении по окружности радиуса $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+c^2}$ *пересек вертикальную плоскость, проходящую через ось* u*. При этом он поднимется над своим первоначальным положением на высоту*

$$h = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+c^2} - c\right). \tag{24}$$

Опрокидывание произойдет, если

$$\frac{1}{2}J_u\omega^2 > mgh. \tag{25}$$

Из (22)–(25) *находим*

$$v^2 > \frac{4g\left(a^2+c^2\right)\left(\sqrt{a^2+c^2} - c\right)}{3c^2}.$$

Пример 3. *Стержень* AB *шарнирно закреплен концом* A*, а вторым концом шарнирно соединен со стержнем* BC (рис. 153)*. Стержни покоятся и составляют прямую линию. Определить характер послеударного движения и ударные импульсы реакций в шарнирах* A *и* B *вследствие импульса* $\boldsymbol{I}$*, приложенного к стержню* BC *под прямым углом на расстоянии* a *от шарнира* B*. Стержни считать тонкими и однородными, масса каждого стержня равна* m*, длина* l*.*

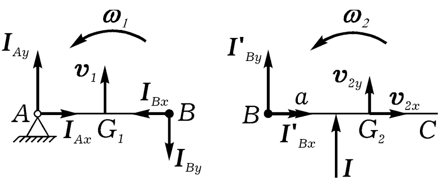

Рис. 153

Мысленно уберем шарнир B *и рассмотрим импульсивное движение каждого из стержней в отдельности под действием заданного импульса* $\boldsymbol{I}$ *и ударных импульсов* $\boldsymbol{I}_A$ *и* $\boldsymbol{I}_B$ *реакций в шарнирах. Обозначим через* $\boldsymbol{v}_1$ *и* $\boldsymbol{v}_2$ *послеударные скорости центров масс* G_1 *и* G_2 *стержней* AB *и* BC *соответственно, а через* ω_1 *и* ω_2 *их угловые скорости. Так как послеударное движение стержня* AB *будет вращением вокруг точки* A*,* *то вектор* $\boldsymbol{v}_1$ *перпендикулярен стержню, причем* $v_1 = \dfrac{\omega_1 l}{2}$. *Упомянутые векторные величины показаны на рис.* 153 *их компонентами в системе координат* Axy, *ось* Ax *которой направлена вдоль стержней.*

Из теорем об изменении количества движения и кинетического момента, примененных к каждому из стержней, получаем следующие шесть уравнений:

$$I_{Ax} - I_{Bx} = 0, \quad \frac{1}{2} m\omega_1 l = I_{Ay} - I_{By}, \quad \frac{1}{3} ml^2\omega_1 = -I_{By} l,$$

$$mv_{2x} = I'_{Bx}, \quad mv_{2y} = I + I'_{By}, \quad \frac{1}{12} ml^2\omega_2 = -I\left(\frac{l}{2} - a\right) - I'_{By}\frac{l}{2}. \tag{26}$$

Еще два уравнения получим, приравняв векторы послеударной скорости шарнира, рассматривая его как точку, принадлежащую с одной стороны стержню AB, *а с другой — стержню* BC:

$$0 = v_{2x}, \quad \omega_1 l = v_{2y} - \frac{1}{2}\omega_2 l. \tag{27}$$

Но так как

$$I'_{Bx} = I_{Bx}, \quad I'_{By} = I_{By}, \tag{28}$$

то имеем систему десяти уравнений (26)–(28) *для нахождения десяти неизвестных. Решив эту систему, получим*

$$\omega_1 = \frac{6I\,(2l - 3a)}{7ml^2}, \; \omega_2 = \frac{6I\,(8a - 3l)}{7ml^2}, \; v_{2x} = 0, \; v_{2y} = \frac{3I\,(2a + l)}{7ml},$$

$$I_{Ax} = 0, \; I_{Ay} = \frac{(2l - 3a)I}{7l}, \; I_{Bx} = I'_{Bx} = 0, \; I_{By} = I'_{By} = -\frac{2(2l - 3a)I}{7l}.$$

Отсюда, в частности, видно, что: 1) *если* $a = \dfrac{5}{11} l$, *то* $\omega_1 = \omega_2$ *и в послеударном движении стержни составляют прямую линию*; 2) *стержень* AB *остается в покое, если* $a = \dfrac{2l}{3}$, *т. е. если импульс* $\boldsymbol{I}$ *приложен в центре удара стержня* BC, *соответствующем оси вращения, проходящей через шарнир* B.

§ 4. Соударение твердых тел

201. Коэффициент восстановления. Пусть два движущихся тела B_1 и B_2 в момент времени $t = t_0$ соприкасаются точками O_1 и O_2