то вектор $\boldsymbol{v}_1$ *перпендикулярен стержню, причем* $v_1 = \dfrac{\omega_1 l}{2}$. *Упомянутые векторные величины показаны на рис.* 153 *их компонентами в системе координат* Axy, *ось* Ax *которой направлена вдоль стержней.*

Из теорем об изменении количества движения и кинетического момента, примененных к каждому из стержней, получаем следующие шесть уравнений:

$$I_{Ax} - I_{Bx} = 0, \quad \frac{1}{2} m\omega_1 l = I_{Ay} - I_{By}, \quad \frac{1}{3} ml^2\omega_1 = -I_{By} l,$$

$$mv_{2x} = I'_{Bx}, \quad mv_{2y} = I + I'_{By}, \quad \frac{1}{12} ml^2\omega_2 = -I\left(\frac{l}{2} - a\right) - I'_{By}\frac{l}{2}. \tag{26}$$

Еще два уравнения получим, приравняв векторы послеударной скорости шарнира, рассматривая его как точку, принадлежащую с одной стороны стержню AB, *а с другой — стержню* BC:

$$0 = v_{2x}, \quad \omega_1 l = v_{2y} - \frac{1}{2}\omega_2 l. \tag{27}$$

Но так как

$$I'_{Bx} = I_{Bx}, \quad I'_{By} = I_{By}, \tag{28}$$

то имеем систему десяти уравнений (26)–(28) *для нахождения десяти неизвестных. Решив эту систему, получим*

$$\omega_1 = \frac{6I\,(2l - 3a)}{7ml^2}, \ \omega_2 = \frac{6I\,(8a - 3l)}{7ml^2}, \ v_{2x} = 0, \ v_{2y} = \frac{3I\,(2a + l)}{7ml},$$

$$I_{Ax} = 0, \ I_{Ay} = \frac{(2l - 3a)I}{7l}, \ I_{Bx} = I'_{Bx} = 0, \ I_{By} = I'_{By} = -\frac{2(2l - 3a)I}{7l}.$$

Отсюда, в частности, видно, что: 1) *если* $a = \dfrac{5}{11} l$, *то* $\omega_1 = \omega_2$ *и в послеударном движении стержни составляют прямую линию*; 2) *стержень* AB *остается в покое, если* $a = \dfrac{2l}{3}$, *т. е. если импульс* $\boldsymbol{I}$ *приложен в центре удара стержня* BC, *соответствующем оси вращения, проходящей через шарнир* B.

§ 4. Соударение твердых тел

201. Коэффициент восстановления. Пусть два движущихся тела B_1 и B_2 в момент времени $t = t_0$ соприкасаются точками O_1 и O_2

своих поверхностей (рис. 154) и в этот момент относительная скорость точек O_1 и O_2 не лежит в общей касательной плоскости. Тогда происходит соударение тел. В точке контакта возникают ударные силы, приложенные к каждому из тел, они имеют одинаковые модули и противоположное направление.

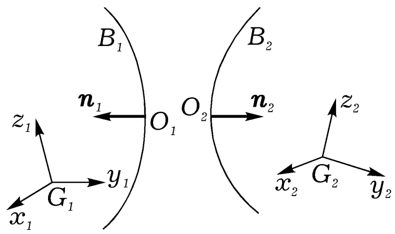

Рис. 154

Будем считать, что тела абсолютно гладкие. Тогда ударные силы и их импульсы $\boldsymbol{I}_1$ и $\boldsymbol{I}_2$ перпендикулярны общей касательной плоскости к поверхностям соударяющихся тел B_1 и B_2. Пусть $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор общей нормали к поверхностям тел в точке их контакта, направленный внутрь второго тела, а $\boldsymbol{n}_k$ — единичная нормаль к телу B_k в его точке O_k, направленная внутрь тела. Тогда очевидно, что

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_2 = -\boldsymbol{n}_1, \ \boldsymbol{I}_k = I\boldsymbol{n}_k \quad (k = 1, 2), \tag{1}$$

где I — модуль ударного импульса.

Величина I заранее неизвестна. Это отличает рассматриваемую задачу о соударении двух тел от рассмотренной в предыдущем параграфе задачи об импульсивном движении твердого тела под действием заданных ударных импульсов. Задача о соударении тел состоит в нахождении послеударного кинематического состояния тел и величины ударного импульса при известном доударном кинематическом состоянии тел. Но, оказывается, что даже в простейших случаях соударения тел число неизвестных превосходит число уравнений, выражающих общие теоремы динамики. Поэтому необходимы дополнительные физические предположения.

Гипотеза об абсолютной твердости тел здесь оказывается недостаточной. Надо предположить, что тела претерпевают малые изменения своей формы вблизи их точки соприкосновения. Сам процесс удара подразделяется на две фазы. В течение первой фазы от $t = t_0$ до $t = t_0 + \tau_1$ происходит сближение тел вдоль их общей нормали, причем модуль проекции на нормаль относительной скорости точек O_1 и O_2 уменьшается до нуля, чем и определяется окончание первой фазы удара. В конце первой фазы деформация тел максимальна. Затем начинается вторая фаза. Проекция на нормаль относительной скорости точек O_1 и O_2 при $t = t_0 + \tau_1$ изменяет знак и при $t > t_0 + \tau_1$ возрастает по модулю; тела, восстанавливая свою форму, удаляются друг от друга вдоль общей нормали. При $t = t_0 + \tau_1 + \tau_2$ их соприкосновение будет происходить в одной точке, тела отделяются друг от друга, чем и заканчивается вторая фаза удара, а вместе с ней и весь процесс соударения тел.

Наблюдения показывают, что абсолютная величина проекции на нормаль относительной скорости точек O_1 и O_2, вообще говоря, не достигает своей исходной (доударной) величины. Полное исследование описанного процесса соударения тел требует подробного рассмотрения их физических свойств и весьма сложного математического анализа, что выходит за рамки теоретической механики. Упрощая сложный характер явления, принимают следующее кинематическое предположение, высказанное еще Ньютоном: *отношение абсолютной величины проекции на общую нормаль к поверхностям тел относительной скорости точек контакта тел после удара к ее значению до удара есть некоторая постоянная величина, не зависящая ни от относительной скорости, ни от размеров тел, а лишь от их материала.*

Это отношение называется *коэффициентом восстановления*. В дальнейшем оно будет обозначаться через æ. Пусть $\boldsymbol{v}_{Ok}^-$ и $\boldsymbol{v}_{Ok}^+$ — векторы скоростей точки O_k до и после соударения ($k = 1,\ 2$). Тогда

$$\left(\boldsymbol{v}_{O_1}^+ - \boldsymbol{v}_{O_2}^+\right) \cdot \boldsymbol{n} = -æ \left(\boldsymbol{v}_{O_1}^- - \boldsymbol{v}_{O_2}^-\right) \cdot \boldsymbol{n}. \qquad (2)$$

Учитывая соотношения (1), равенство (2) можно записать также в следующей форме:

$$\boldsymbol{v}_{O_1}^+ \cdot \boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{v}_{O_2}^+ \cdot \boldsymbol{n}_2 = -æ \left(\boldsymbol{v}_{O_1}^- \cdot \boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{v}_{O_2}^- \cdot \boldsymbol{n}_2\right). \qquad (3)$$

Коэффициент восстановления характеризует, насколько восстанавливается нормальная составляющая относительной скорости после удара. Как правило, полного восстановления не происходит. Поэтому $0 \leqslant æ \leqslant 1$. Если $æ = 0$, то удар называется *абсолютно неупругим*. В этом случае процесс соударения состоит только из первой фазы; когда тела достигнут максимального сближения, восстановления их формы не происходит и оба тела движутся как одно целое. При $æ = 1$ удар называется *абсолютно упругим*. Здесь во второй фазе удара происходит полное восстановление формы тел, нормальная составляющая относительной скорости точек контакта достигает доударной абсолютной величины. Промежуточные случаи $0 < æ < 1$, характерные для реальных физических тел, называют *неупругим ударом*.

При использовании гипотезы (2) следует иметь в виду, что она является первым (иногда очень грубым) приближением к действительным закономерностям, описывающим соударение реальных тел[1].

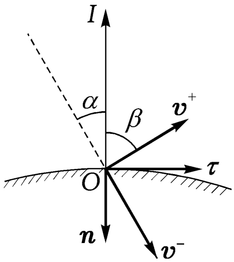

Рис. 155

Пример 1. *В качестве примера использования гипотезы Ньютона* (2) *рассмотрим задачу о соударении материальной точки с неподвижной абсолютно гладкой поверхностью.*

Пусть перед соударением точка имеет скорость $\boldsymbol{v}^-$, *образующую с внешной нормалью к поверхности угол падения* α (*см. рис.* 155, *где* O — *точка, в которой происходит соударение,* $\boldsymbol{\tau}$ — *единичный вектор касательной к кривой, являющейся пересечением поверхности и плоскости, проходящей через векторы нормали* $\boldsymbol{n}$ *и доударной скорости* $\boldsymbol{v}^-$). *Масса* m *точки и коэффициент восстановления* æ *заданы. Требуется найти модуль послеударной скорости точки* $\boldsymbol{v}^+$, *угол отражения* β *и величину* I *ударного импульса.*

Теорема об изменении количества движения дает два уравнения:

$$\begin{gathered} v^+ \sin\beta - v^- \sin\alpha = 0, \\ m(v^+ \cos\beta + v^- \cos\alpha) = I. \end{gathered} \tag{4}$$

Из соотношения (2) *получаем недостающее третье уравнение:*

$$v^+ \cos\beta = \text{æ} v^- \cos\alpha. \tag{5}$$

Из (4), (5) *находим*

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\text{æ}}\operatorname{tg}\alpha, \quad v^+ = v^-\sqrt{\sin^2\alpha + \text{æ}^2\cos^2\alpha}, \quad I = m(1+\text{æ})v^-\cos\alpha. \tag{6}$$

Из (4)–(6) *следует, что: касательные составляющие скорости до и после удара равны между собой; при абсолютно неупругом ударе материальная точка после удара имеет только касательную составляющую; при абсолютно упругом ударе угол падения равен углу отражения, а модуль скорости не изменяется* ($\alpha = \beta$, $v^+ = v^-$); *при неупругом ударе угол падения меньше угла отражения* ($\beta > \alpha$); *при абсолютно упругом ударе ударный импульс в два раза больше импульса при абсолютно неупругом ударе.*

[1]Обсуждение этого вопроса можно найти в книге: Пановко Я. Г. Введение в теорию механического удара.— М.: Наука, 1977. Современные математические модели теории механического удара и их критический анализ содержатся в монографии: Иванов А. П. Динамика систем с механическими соударениями. — М.: Международная программа образования, 1997.

Пример 2. *Однородный стержень, который может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр тяжести, находится в равновесии. На один из концов стержня со скоростью v падает шар массы m. Длина стержня $2a$, масса M. Коэффициент восстановления равен $æ$. Принимая шар за материальную точку, определим послеударное кинематическое состояние стержня и шара.*

Пусть v^+ — скорость шара, а ω^+ — угловая скорость стержня после удара. Из теоремы об изменении кинетического момента (относительно центра тяжести стержня) следует равенство

$$mva = mv^+a + \frac{1}{3}Ma^2\omega^+, \tag{7}$$

а из того, что удар абсолютно упругий, имеем

$$v^+ - \omega^+a = -æv. \tag{8}$$

Из уравнений (7), (8) находим:

$$v^+ = \frac{3m - æM}{3m + M}v, \quad \omega^+ = \frac{3(1+æ)mv}{(3m+M)a}.$$

202. Общая задача о соударении двух абсолютно гладких тел. С центром масс тела B_k ($k = 1,\ 2$) свяжем систему координат $G_kx_ky_kz_k$, направив ее оси по главным центральным осям инерции тела (рис. 154). Через A_k, B_k C_k обозначим соответствующие главные моменты инерции тела, а через m_k — его массу. В системе координат $G_kx_ky_kz_k$ точка O_k имеет координаты x_k, y_k, z_k, а вектор нормали $\boldsymbol{n}_k$ задается направляющими косинусами α_k, β_k, γ_k. Пусть $\boldsymbol{\omega}_k$ — вектор угловой скорости тела B_k, а $\boldsymbol{v}_k$ — скорость его центра масс G_k. Задача состоит в определении послеударных значений этих векторов, если известны их доударные значения. Приращения $\Delta\boldsymbol{\omega}_k = \boldsymbol{\omega}_k^+ - \boldsymbol{\omega}_k^-$ и $\Delta\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{v}_k^+ - \boldsymbol{v}_k^-$ зададим в системе координат $G_kx_ky_kz_k$ соответственно компонентами Δp_k, Δq_k, Δr_k и Δv_{x_k}, Δv_{y_k}, Δv_{z_k}. Момент $\boldsymbol{M}_k = \overline{G_kO_k} \times \boldsymbol{I}_k$ ударного импульса $\boldsymbol{I}_k$ относительно центра масс G_k имеет в системе координат $G_kx_ky_kz_k$ компоненты $M_{x_k} = I\xi_k$, $M_{y_k} = I\eta_k$, $M_{z_k} = I\zeta_k$, где $\xi_k = y_k\gamma_k - z_k\beta_k$, $\eta_k = z_k\alpha_k - x_k\gamma_k$, $\zeta_k = x_k\beta_k - y_k\alpha_k$.

Из теоремы об изменении кинетического момента и количества движения имеем двенадцать уравнений

$$A_k\Delta p_k = I\xi_k, \quad B_k\Delta q_k = I\eta_k, \quad C_k\Delta r_k = I\zeta_k,$$
$$m_k\Delta v_{x_k} = I\alpha_k, \quad m_k\Delta v_{y_k} = I\beta_k, \quad m_k\Delta v_{z_k} = I\gamma_k \quad (k = 1,\ 2).$$

Отсюда находим послеударные значения кинематических величин тела B_k:

$$p_k^+ = p_k^- + I\frac{\xi_k}{A_k}, \quad q_k^+ = q_k^- + I\frac{\eta_k}{B_k}, \quad r_k^+ = r_k^- + I\frac{\zeta_k}{C_k}, \tag{9}$$

$$v_{x_k}^+ = v_{x_k}^- + I\frac{\alpha_k}{m_k}, \quad v_{y_k}^+ = v_{y_k}^- + I\frac{\beta_k}{m_k}, \quad v_{z_k}^+ = v_{z_k}^- + I\frac{\gamma_k}{m_k}. \tag{10}$$

Из (10), в частности, следует, что касательные составляющие скоростей центров масс тел при ударе не изменяются.

В равенствах (9), (10) содержится неизвестная величина I ударного импульса. Если найти ее через известные величины, а затем подставить в (9), (10), то тем самым общая задача о соударении двух абсолютно гладких тел будет решена.

Величину I найдем при помощи соотношения (3). Для этого, заметив, что $\boldsymbol{v}_{O_k}^+ = \boldsymbol{v}_k^+ + \boldsymbol{\omega}_k^+ \times \overline{G_kO_k}$, $\boldsymbol{v}_{O_k}^- = \boldsymbol{v}_k^- + \boldsymbol{\omega}_k^- \times \overline{G_kO_k}$ и воспользовавшись свойствами смешанного произведения векторов, находим равенство

$$\left(\boldsymbol{v}_{O_k}^+ - \boldsymbol{v}_{O_k}^-\right) \cdot \boldsymbol{n}_k = \Delta \boldsymbol{v}_k \cdot \boldsymbol{n}_k + \left(\overline{G_kO_k} \times \boldsymbol{n}_k\right) \cdot \Delta\boldsymbol{\omega}_k,$$

которое при помощи соотношений (9), (10) можно записать в виде

$$\left(\boldsymbol{v}_{O_k}^+ - \boldsymbol{v}_{O_k}^-\right) \cdot \boldsymbol{n}_k = I\left(\frac{1}{m_k} + \frac{\xi_k^2}{A_k} + \frac{\eta_k^2}{B_k} + \frac{\zeta_k^2}{C_k}\right) \ (k = 1,\ 2).$$

Отсюда после суммирования по k получаем равенство

$$\left(\boldsymbol{v}_{O_1}^+ - \boldsymbol{v}_{O_1}^-\right) \cdot \boldsymbol{n}_1 + \left(\boldsymbol{v}_{O_2}^+ - \boldsymbol{v}_{O_2}^-\right) \cdot \boldsymbol{n}_2 = \mu^2 I, \tag{11}$$

где введено обозначение

$$\mu^2 = \sum_{k=1}^{2}\left(\frac{1}{m_k} + \frac{\xi_k^2}{A_k} + \frac{\eta_k^2}{B_k} + \frac{\zeta_k^2}{C_k}\right). \tag{12}$$

Из уравнений (11) и (3) находим

$$I = -\frac{1+\text{æ}}{\mu^2}\left(\boldsymbol{v}_{O_1}^- \cdot \boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{v}_{O_2}^- \cdot \boldsymbol{n}_2\right). \tag{13}$$

Заметим, что величина $-\left(\boldsymbol{v}_{O_1}^- \cdot \boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{v}_{O_2}^- \cdot \boldsymbol{n}_2\right)$ представляет собой доударную проекцию скорости точки O_1 контакта тела B_1 относительно точки контакта тела B_2 на внутреннюю нормаль $\boldsymbol{n}$ тела B_2. Обозначим ее через u_{rn}. Так как перед соударением оба тела стремились сблизиться, то эта величина положительна. Таким образом,

$$I = \frac{1+æ}{\mu^2} u_{rn}, \tag{14}$$

причем все величины, входящие в правую часть этого равенства, известны.

Подставив I из (14) в (9) и (10), получим полное решение рассматриваемой задачи о соударении двух абсолютно гладких тел.

Замечание 2 (Динамическое истолкование коэффициента восстановления). *Пусть* $\boldsymbol{v}_k^{(1)}$, $\boldsymbol{\omega}_k^{(1)}$ *и* $\boldsymbol{v}_{O_k}^{(1)}$ $(k = 1, 2)$ — *соответственно векторы скоростей центров масс тел* B_k, *их угловых скоростей и скоростей точек контакта* O_k *тел в момент* $t = t_0 + \tau_1$ *окончания первой фазы удара. В этот момент выполняется равенство*

$$\boldsymbol{v}_{O_1}^{(1)} \cdot \boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{v}_{O_2}^{(1)} \cdot \boldsymbol{n}_2 = 0, \tag{15}$$

означающее, что при $t = t_0 + \tau_1$ *проекция скорости точки* O_1 *относительно точки* O_2 *на общую нормаль к поверхностям тел равняется нулю.*

Пусть $I^{(1)}$ *и* $I^{(2)}$ — *величины ударных импульсов, приложенных к телам, за время первой и второй фаз удара соответственно. Тогда*

$$I^{(1)} + I^{(2)} = I \tag{16}$$

и, кроме того, имеют место равенства (9), (10), *в которых верхний индекс* + *надо заменить на индекс* (1), *а вместо* I *написать* $I^{(1)}$.

Величина $I^{(1)}$ *находится из соотношения* (15). *Проведя выкладки, совершенно аналогичные выкладкам, проведенным выше при получении формулы* (14) *из соотношения* (3), *найдем*

$$I^{(1)} = \frac{u_{rn}}{\mu^2},$$

и тогда из (14) *и* (16) *получаем, что*

$$I^{(2)} = \frac{æ}{\mu^2} u_{rn}.$$

Таким образом, $\dfrac{I^{(2)}}{I^{(1)}} = æ$, *т. е. при соударении двух абсолютно гладких тел отношение величин импульсов ударных сил, возникающих между телами во второй и первой фазах удара, равняется величине коэффициента восстановления.*

Пример 1 (Удар о стенку (о неподвижную преграду)). *Пусть неподвижной преградой будет тело B_2. Полагая $\boldsymbol{v}_2^- = 0$, $\boldsymbol{\omega}_2^- = 0$ и устремляя величины m_2, A_2, B_2, C_2 к бесконечности, из* (12) *находим* (*индекс* (1) *у величин, относящихся к телу B_1, опускаем*)

$$\mu^2 = \frac{1}{m} + \frac{(y\gamma - z\beta)^2}{A} + \frac{(z\alpha - x\gamma)^2}{B} + \frac{(x\beta - y\alpha)^2}{C}. \tag{17}$$

Величина u_{rn} будет проекуией скорости точки контакта O_1 тела B_1 со стеной на внешнюю нормаль к телу в точке O_1. Величина импульса вычисляется по формулам (14), (17). *Соотношения* (9), (10) *можно переписать в виде*

$$p^+ = p^- + I\frac{(y\gamma - z\beta)}{A}, \quad q^+ = q^- + I\frac{(z\alpha - x\gamma)}{B},$$

$$r^+ = r^- + I\frac{(x\beta - y\alpha)}{C}, \quad \boldsymbol{v}^+ = \boldsymbol{v}^- + \frac{I}{m}\boldsymbol{n}_1.$$

Пример 2. *Однородное колесо радиуса R катится без скольжения по горизонтальной плоскости, оставаясь в вертикальной плоскости. Оно ударяется некоторой точкой своего обода о неподвижное препятствие высоты $h < R$. Удар происходит без трения, коэффициент восстановления равен æ. Покажем, что если $h > \left(1 - \sqrt{\dfrac{æ}{1+æ}}\right)R$, то колесо не преодолеет препятствие, как бы ни была велика до удара скорость центра колеса.*

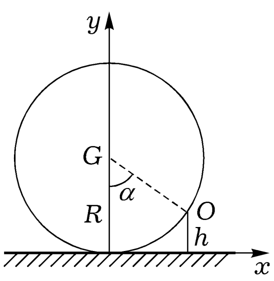

Рис. 156

Пусть α — угол между вертикалью и радиусом колеса, соединяющим центр колеса G с наивысшей точкой препятствия O (рис. 156), *v — величина скорости центра колеса перед ударом, а v_x^+, v_y^+ — проекции его скорости после удара. Приложенный к колесу ударный импульс $\boldsymbol{I}$, ввиду отсутствия трения, направлен по радиусу $\overline{OG}$. Поэтому за время удара угловая скорость колеса не изменяется.*

Так как скольжение отсутствует, то непосредственно перед ударом скорость точки контакта колеса с препятствием задается компонентами v $(-v\cos\alpha,\ -v\sin\alpha)$. Из теоремы об изменении количества движения при ударе и гипотезы Ньютона (2) *имеем систему трех уравнений* (m *— масса колеса*):

$$m(v_x^+ - v) = -I\sin\alpha, \quad mv_y^+ = I\cos\alpha, \quad v_x^+\sin\alpha - v_y^+\cos\alpha = -æv\sin\alpha,$$

решив которую, получим

$$I = m(1+\text{æ})v\sin\alpha, \quad v_x^+ = v[1-(1+\text{æ})\sin^2\alpha], \quad v_y^+ = (1+\text{æ})v\sin\alpha\cos\alpha.$$

Колесо не преодолеет препятствие и отскочит назад, если $v_x^+ < 0$ (*если* $v_x^+ = 0$, *то колесо взлетит вверх вдоль оси* Gy), *т. е. если* $(1+\text{æ})\sin^2\alpha > 1$. *Но так как* $\sin^2\alpha = \dfrac{\left[R^2 - (R-h)^2\right]}{R^2}$, *то это означает, что должно выполняться условие*

$$\left(\frac{h}{R} - 1\right)^2 < \frac{\text{æ}}{1+\text{æ}}.$$

Отсюда и следует доказываемое неравенство.

203. Изменение кинетической энергии при соударении абсолютно гладких тел. Для каждого из тел B_k по формуле (6) §3 имеем

$$\Delta T_k = T_k^+ - T_k^- = \frac{1}{2}\left(\frac{I_k^2}{m_k} + \frac{M_{x_k}^2}{A_k} + \frac{M_{y_k}^2}{B_k} + \frac{M_{z_k}^2}{C_k}\right) + (\boldsymbol{I}_k\cdot\boldsymbol{v}_k^- + \boldsymbol{M}_k\cdot\boldsymbol{\omega}_k^-).$$

Используя обозначения п. 202, это выражение можно переписать в виде

$$\Delta T_k = \frac{I^2}{2}\left(\frac{1}{m_k} + \frac{\xi_k^2}{A_k} + \frac{\eta_k^2}{B_k} + \frac{\zeta_k^2}{C_k}\right) + I(\boldsymbol{v}_k^- + \boldsymbol{\omega}_k^- \times \overline{G_kO_k})\cdot\boldsymbol{n}_k.$$

Замечая, что $\boldsymbol{v}_k^- + \boldsymbol{\omega}_k^- \times \overline{G_kO_k} = \boldsymbol{v}_{O_k}^-$, производя суммирование и учитывая обозначение (12), находим изменение кинетической энергии системы двух тел

$$\Delta T = \Delta T_1 + \Delta T_2 = \frac{1}{2}I^2\mu^2 + I(\boldsymbol{v}_{O_1}^-\cdot\boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{v}_{O_2}^-\cdot\boldsymbol{n}_2).$$

Принимая во внимание равенства (13) и (14), последнее выражение можно записать в следующем окончательном виде:

$$\Delta T = -\frac{(1-\text{æ}^2)}{2\mu^2}u_{rn}^2. \tag{18}$$

Суммарная кинетическая энергия тела не изменяется только в случае абсолютно упругого удара (æ $= 1$). В остальных случаях происходит потеря кинетической энергии ($\Delta T < 0$).

204. Прямой центральный удар двух абсолютно гладких тел. Назовем линией удара прямую, проходящую через точку соприкосновения тел при ударе перпендикулярно их общей касательной плоскости (на рис. 154 нормали $\boldsymbol{n}_k$ к поверхносятм тел B_k лежат на линии удара). Удар называется *прямым*, если скорости $\boldsymbol{v}_k^-$ центров масс до удара направлены параллельно линии удара. Из упомянутой выше неизменности касательной составляющей скоростей $\boldsymbol{v}_k$ следует, что при прямом ударе скорости $\boldsymbol{v}_k^+$ центров масс тел после удара будут параллельны линии удара.

Удар называется *центральным*, если центры масс тел перед ударом лежат на линии удара. При центральном ударе моменты $\boldsymbol{M}_k = \overline{G_k O_k} \times \boldsymbol{I}_k$ ударного импульса относительно центров масс G_k тел равны нулю (величины ξ_k, η_k, ζ_k, в (9) обращаются в нуль). Поэтому, согласно (9), при центральном ударе угловые скорости $\boldsymbol{\omega}_k$ обоих тел остаются неизменными.

Рассмотрим задачу о соударении двух абсолютно гладких тел, предполагая, что удар является прямым и центральным. В этом случае центры масс тел лежат на линии удара, а их скорости направлены вдоль этой линии как до, так и после удара. Так как еще и угловые скорости тел при ударе не изменяются, то задача о прямом центральном ударе сводится к нахождению изменений проекций скоростей центров масс тел на линию удара. Простейшим примером задачи о прямом центральном ударе двух тел может служить задача о соударении двух одинаковых шаров, центры масс которых движутся вдоль одной прямой.

За положительное направление на линии удара примем направление $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_2$ внутренней нормали к поверхности тела B_2. Пусть v_k^- и v_k^+ $(k = 1,\ 2)$ — проекции на линию удара скоростей центров масс тел B_k до и после удара. Для того, чтобы удар произошел, необходимо, чтобы до удара относительная скорость центра масс одного из тел, например, B_1, была направлена к центру масс второго тела $(v_1^- > v_2^-)$.

Так как $\xi_k = \eta_k = \zeta_k = 0$, то формула (12) принимает вид

$$\mu^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{19}$$

Подставляя это значение μ^2 в выражение (14) и замечая, что в рассматриваемом случае

$$u_{rn} = v_1^- - v_2^-, \tag{20}$$

получаем величину ударного импульса при прямом центральном ударе:

$$I = (1 + \text{æ})\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_1^- - v_2^-). \tag{21}$$

Применяя теорему об изменении количества движения к каждому из тел, получаем два равенства

$$m_1(v_1^+ - v_1^-) = -I, \quad m_2(v_2^+ - v_2^-) = I.$$

Отсюда, принимая во внимание формулу (21), находим проекции послеударных скоростей центров масс тел на линию удара:

$$\begin{aligned} v_1^+ &= \frac{(m_1 - æ m_2)v_1^- + m_2(1+æ)v_2^-}{m_1 + m_2}, \\ v_2^+ &= \frac{m_1(1+æ)v_1^- + (m_2 - æ m_1)v_2^-}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \tag{22}$$

Изменение кинетической энергии за время удара вычисляется по формуле (18) при учете равенств (19) и (20):

$$\Delta T = -\frac{1}{2}(1 - æ^2)\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_1^- - v_2^-)^2. \tag{23}$$

Рассмотрим частные случаи.

а) *Абсолютно упругий удар* ($æ = 1$). Из (23) следует, что в этом случае нет потери кинетической энергии ($\Delta T = 0$), а формулы (22), (21) дают следующие выражения для послеударных скоростей центров масс тел и ударного импульса:

$$v_1^+ = \frac{(m_1 - m_2)v_1^- + 2m_2 v_2^-}{m_1 + m_2}, \quad v_2^+ = \frac{(m_2 - m_1)v_2^- + 2m_1 v_1^-}{m_1 + m_2}, \tag{24}$$

$$I = 2\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_1^- - v_2^-) \tag{25}$$

Если, кроме того, массы тел равны, то $v_1^+ = v_2^-$, $v_2^+ = v_1^-$, т. е. центр масс каждого из тел будет иметь послеударную скорость, какую имел центр масс другого тела до удара. Таким путем происходит перенос количеств движения при столкновении молекул идеального газа.

б) *Абсолютно неупругий удар* ($æ = 0$). Из (22) получаем

$$v_1^+ = v_2^+ = \frac{m_1 v_1^- + m_2 v_2^-}{m_1 + m_2}, \tag{26}$$

т. е. скорости центров масс тел после удара становятся одинаковыми. При этом происходит потеря кинетической энергии; по формуле (23) находим

$$\Delta T = -\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1^- - v_2^-)^2. \tag{27}$$

Согласно (21), ударный импульс определяется выражением

$$I = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_1^- - v_2^-),$$

т. е. он в два раза меньше, чем при абсолютно упругом ударе.

Пример 1 (Прямой центральный удар о неподвижную стенку). *Пусть стенка есть тело B_2. Полагая $v_2^- = 0$ и устремляя m_2 к бесконечности, находим из* (21)–(23), *что в этом случае:*

$$v_1^+ = -æ v_1^-, \quad v_2^+ = 0, \quad I = (1+æ)m_1 v_1^-, \quad \Delta T = -\frac{1}{2}(1-æ^2)m_1 {v_1^-}^2$$

Пример 2 (О некоторых практических приложениях формулы (23)). *Пусть тело B_2 неподвижно* ($v_2^- = 0$) *и надо привести его в движение, ударяя по нему телом B_1. Кинетическая энергия тела B_1 перед ударом приобретается за счет мускульных усилий человека и будет равна $\frac{1}{2}m_1 {v_1^-}^2$. Пусть это количество кинетической энергии T задано. Положим*

$$\eta = \frac{|\, \Delta T \,|}{T} = (1-æ^2)\frac{m_2}{m_1+m_2}$$

При заданных величинах æ и m_2 величина η будет функцией от m_1.

Если мы хотим придать телу B_2 наибольшую возможную скорость, то надо уменьшать потери $|\, \Delta T \,|$, т. е. увеличивать возможную массу m_1 тела B_1. Выгоднее, например, забивая гвоздь, пользоваться тяжелым молотком, сообщая ему малую скорость, чем более легким при бóльшей скорости.

Совсем другая ситуация возникнет, когда надо будет разрушить тело B_2. Здесь надо увеличивать величину $|\, \Delta T \,|$, т. е. увеличивать η. Это означает, что надо уменьшать m_1. Например, ковать лучше более легким молотком, сообщая ему (*при заданной величине T*) *бóльшую скорость.*

Пример 3. *Найдем необходимое и достаточное условие того, что при прямом центральном ударе двух поступательно движущихся тел B_1 и B_2 тело B_1 после удара остановилось.*

Из первой формулы (22) *следует, что таким условием будет выполнение равенства*

$$(m_1 - æ m_2)v_1^- + m_2(1+æ)v_2^- = 0.$$

Отсюда, в частности, следует: а) если $v_2^- = 0$, то $æ = \frac{m_1}{m_2}$; б) если до удара скорости тел были равны по модулю и противоположны по направлению ($v_2^- = -v_1^-$), *то $\frac{m_1}{m_2} = 1 + 2æ$.*

Упражнение 4 (Косой удар двух шаров). *При соударении двух шаров удар является центральным, но он не обязательно будет прямым, так как скорости центров масс шаров могут не быть направлены по общей линии центров. В общем случае это будет косой удар двух шаров. Показать, что при косом соударении двух однородных абсолютно гладких шаров их угловые скорости и проекции скоростей центров масс на общую касательную плоскость не изменяются, а проекции на линию удара изменяются как при прямом центральном ударе.*

§ 5. Дифференциальные вариационные принципы механики в теории импульсивных движений

205. Общее уравнение динамики. Рассмотрим систему N материальных точек P_ν ($\nu = 1,\ 2, \ldots,\ N$). Состояние системы в некоторой неподвижной прямоугольной декартовой системе координат задается радиусами-векторами $\boldsymbol{r}_\nu$ и скоростями $\boldsymbol{v}_\nu$ ее точек. Система предполагается свободной или несвободной со связями вида (1), (2) из §3 главы 1. Импульсивное движение возникает из-за того, что к точкам системы прикладываются ударные импульсы $\boldsymbol{I}_\nu$, либо накладываются новые связи, либо снимаются некоторые (или все) из старых связей, либо из-за того, что и то, и другое, и третье осуществляется одновременно.

Ограничения на скорости точек системы задаются (см. равенства (2), (3) из §3 главы 1) равенствами вида

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{B}_{\gamma\nu} \cdot \boldsymbol{v}_\nu + b_\gamma = 0\ (\gamma = 1,\ 2, \ldots,\ l). \tag{1}$$

Векторы $\boldsymbol{B}_{\gamma\nu}$ и скаляры b_γ — заданные непрерывно дифференцируемые функции $\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2, \ldots,\ \boldsymbol{r}_n$ и t. Через l в (1) обозначено общее количество связей системы, голономных и неголономных. Если удар вызван заданными ударными импульсами и при ударе структура системы не изменяется, то l равно числу $r + s$ голономных и неголономных связей системы. Если же при ударе изменяется структура системы (изменяется количество связей), то число l отличается от величины $r + s$.

Если связи стационарные, то величины b_γ в (1) тождественно равны нулю, а вектор-функции $\boldsymbol{B}_{\gamma\nu}$ явно не зависят от t.

В дальнейшем также будут рассматриваться связи, для которых величина b_γ в (1) тождественно равна нулю, но вектор-функции $\boldsymbol{B}_{\gamma\nu}$ зависят явно от t. Эти связи линейны и однородны по компонентам