Упражнение 4 (Косой удар двух шаров). *При соударении двух шаров удар является центральным, но он не обязательно будет прямым, так как скорости центров масс шаров могут не быть направлены по общей линии центров. В общем случае это будет косой удар двух шаров. Показать, что при косом соударении двух однородных абсолютно гладких шаров их угловые скорости и проекции скоростей центров масс на общую касательную плоскость не изменяются, а проекции на линию удара изменяются как при прямом центральном ударе.*

§ 5. Дифференциальные вариационные принципы механики в теории импульсивных движений

205. Общее уравнение динамики. Рассмотрим систему N материальных точек P_ν ($\nu = 1,\ 2, \ldots,\ N$). Состояние системы в некоторой неподвижной прямоугольной декартовой системе координат задается радиусами-векторами $\boldsymbol{r}_\nu$ и скоростями $\boldsymbol{v}_\nu$ ее точек. Система предполагается свободной или несвободной со связями вида (1), (2) из §3 главы 1. Импульсивное движение возникает из-за того, что к точкам системы прикладываются ударные импульсы $\boldsymbol{I}_\nu$, либо накладываются новые связи, либо снимаются некоторые (или все) из старых связей, либо из-за того, что и то, и другое, и третье осуществляется одновременно.

Ограничения на скорости точек системы задаются (см. равенства (2), (3) из §3 главы 1) равенствами вида

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{B}_{\gamma\nu} \cdot \boldsymbol{v}_\nu + b_\gamma = 0 \ (\gamma = 1,\ 2, \ldots,\ l). \tag{1}$$

Векторы $\boldsymbol{B}_{\gamma\nu}$ и скаляры b_γ — заданные непрерывно дифференцируемые функции $\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2, \ldots,\ \boldsymbol{r}_n$ и t. Через l в (1) обозначено общее количество связей системы, голономных и неголономных. Если удар вызван заданными ударными импульсами и при ударе структура системы не изменяется, то l равно числу $r + s$ голономных и неголономных связей системы. Если же при ударе изменяется структура системы (изменяется количество связей), то число l отличается от величины $r + s$.

Если связи стационарные, то величины b_γ в (1) тождественно равны нулю, а вектор-функции $\boldsymbol{B}_{\gamma\nu}$ явно не зависят от t.

В дальнейшем также будут рассматриваться связи, для которых величина b_γ в (1) тождественно равна нулю, но вектор-функции $\boldsymbol{B}_{\gamma\nu}$ зависят явно от t. Эти связи линейны и однородны по компонентам векторов скоростей точек системы. Наряду с движениями с возможными скоростями $\boldsymbol{v}_\nu^*$ они допускают движения, для которых скорости всех точек системы имеют противоположные направления $-\boldsymbol{v}_\nu^*$. По этой причине такие связи называют *обратимыми*[1].

Пример 1. *Связь, рассмотренная в примере п.* 64, *является обратимой нестационарной связью.*

Виртуальные перемещения $\delta \boldsymbol{r}_\nu$ точек системы определяются следующими уравнениями (см. уравнения (12), (13) из §3 главы 1):

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{B}_{\gamma\nu} \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0 \ (\gamma = 1,\ 2, \ldots,\ l). \tag{2}$$

Ввиду кратковременности процесса удара вектор-функции $\boldsymbol{B}_{\gamma\nu}$ в уравнениях (2) можно считать постоянными. Отсюда следует, что векторы виртуальных перемещений $\delta \boldsymbol{r}_\nu$ могут считаться независящими от времени на промежутке времени удара от $t = t_0$ до $t = t_0 + \tau$.

Пусть $\boldsymbol{R}_\nu$ — равнодействующая реакций связей, приложенных к точке P_ν. Все связи системы будем предполагать идеальными во все время удара, т. е считаем, что равенство (10) п. 55 справедливо для любого момента времени из промежутка от t_0 до $t_0 + \tau$.

Обозначим через $\boldsymbol{I}_{\nu R}$ ударный импульс реакций связей, приложенных к точке P_ν,

$$\boldsymbol{I}_{\nu R} = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \boldsymbol{R}_\nu \, dt.$$

Тогда интегрирование по t от t_0 до $t_0 + \tau$ обеих частей равенства (10) п. 55, при учете постоянства величин $\delta \boldsymbol{r}_\nu$, приводит к соотношению

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{I}_{\nu R} \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0. \tag{3}$$

Пусть $\boldsymbol{I}_\nu$ — ударный импульс активных сил, приложенных к точке P_ν. Тогда равенства (3) п. 192 можно записать в виде

$$m_\nu \Delta \boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{I}_\nu + \boldsymbol{I}_{\nu R} \ (\nu = 1,\ 2, \ldots,\ N). \tag{4}$$

Переписав равенства (4) в виде $\boldsymbol{I}_\nu - m_\nu \Delta \boldsymbol{v}_\nu = -\boldsymbol{I}_{\nu R}$, умножив каждое из них скалярно на $\delta \boldsymbol{r}_\nu$ и произведя суммирование по ν, получим при

[1] Эти связи называют также *катастатическими*. См., например: Парс Л. А. Аналитическая динамика. М.: Наука, 1971.

учете равенства (3) следующее соотношение:

$$\sum_{\nu=1}^{N}(\boldsymbol{I}_\nu - m_\nu \Delta \boldsymbol{v}_\nu)\cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0. \qquad (5)$$

Это соотношение является *общим уравнением динамики в теории импульсивных движений.*

Величины $-m_\nu \Delta \boldsymbol{v}_\nu = -m_\nu(\boldsymbol{v}_\nu^+ - \boldsymbol{v}_\nu^-)$ можно назвать *ударными импульсами сил инерции.* И уравнение (5) может быть прочитано следующим образом: *истинное послеударное состояние системы выделяется из всех кинематически возможных тем, что для него и только для него сумма работ активных ударных импульсов и ударных импульсов сил инерции на любых виртуальных перемещениях равна нулю.*

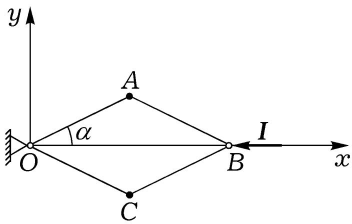

Рис. 157

Остановимся подробнее на смысле величин $\delta \boldsymbol{r}_\nu$, входящих в соотношение (5). Если при ударе структура системы не меняется, то величины $\delta \boldsymbol{r}_\nu$ сохраняют свой обычный смысл: они удовлетворяют уравнениям (12), (13) §3 главы 1 (или эквивалентым им уравнениям (2) данного пункта). Если же при ударе структура системы изменяется, то ситуация несколько сложнее. Поясним это. Пусть $\delta \boldsymbol{r}_\nu^-$ — совокупность виртуальных перемещений непосредственно перед ударом и пусть в момент времени $t = t_0$ на систему наложена новая идеальная связь, сохраняющаяся и после удара. В системе с изменившейся структурой будет новая совокупность виртуальных перемещений $\delta \boldsymbol{r}_\nu^+$. Из-за наложения новой связи совокупность виртуальных перемещений $\delta \boldsymbol{r}_\nu^-$ будет, очевидно, шире совокупности $\delta \boldsymbol{r}_\nu^+$. И для того чтобы в соотношении (5) иметь виртуальные перемещения, пригодные во время всего ударного процесса от $t = t_0$ до $t = t_0 + \tau$, надо в (5) положить $\delta \boldsymbol{r}_\nu = \delta \boldsymbol{r}_\nu^+$. Иное дело, когда идеальная связь во время удара снимается. В этом случае совокупность виртульных перемещений $\delta \boldsymbol{r}_\nu^-$ системы с доударной структурой у́же совокупности $\delta \boldsymbol{r}_\nu^+$, и в (5) следут принять $\delta \boldsymbol{r}_\nu = \delta \boldsymbol{r}_\nu^-$.

Пример 2. *Дан ромб $OABC$, образованный четырьмя шарнирно соединенными невесомыми стержнями* (см. рис. 157). *Шарнир O неподвижно закреплен. В шарнирах A и C помещены точечные массы величины m. По направлению диагонали BO к ромбу прикладывается ударный импульс $\boldsymbol{I}$. Считая угол α заданным, найдем послеударные скорости шарниров A и C.*

Общее уравнение динамики (5) *записывается в виде*

$$\boldsymbol{I}\cdot\delta\boldsymbol{r}_B - m\Delta\boldsymbol{v}_A\cdot\delta\boldsymbol{r}_A - m\Delta\boldsymbol{v}_C\cdot\delta\boldsymbol{r}_C = 0. \tag{6}$$

Пусть l — *длина каждого из стержней. Из рис.* 157 *имеем:*

$$\begin{gathered}\boldsymbol{r}'_A = l(\cos\alpha,\ \sin\alpha), \quad \boldsymbol{r}'_B = 2l(\cos\alpha,\ 0),\\ \boldsymbol{r}'_C = l(\cos\alpha,\ -\sin\alpha), \quad \boldsymbol{I}' = (-I,\ 0).\end{gathered} \tag{7}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{r}'_A &= l\delta\alpha(-\sin\alpha,\ \cos\alpha),\\ \delta\boldsymbol{r}'_B &= -2l\delta\alpha(\sin\alpha,\ 0),\\ \delta\boldsymbol{r}'_C &= -l\delta\alpha(\sin\alpha,\ \cos\alpha).\end{aligned} \tag{8}$$

Пусть $\boldsymbol{v}'_A = (v_{Ax},\ v_{Ay})$, $\boldsymbol{v}'_C = (v_{Cx},\ v_{Cy})$. *Тогда*

$$m\Delta\boldsymbol{v}'_A = m(v_{Ax},\ v_{Ay}), \quad m\Delta\boldsymbol{v}'_C = m(v_{Cx},\ v_{Cy}). \tag{9}$$

Переписанное с учетом равенств (7)–(9) *соотношение* (6) *после сокращения на* $l\delta\alpha$ *приводит к уравнению*

$$2I\sin\alpha + m(v_{Ax} + v_{Cx})\sin\alpha - m(v_{Ay} - v_{Cy})\cos\alpha = 0. \tag{10}$$

Но из (7) *следует, что* $v_{Ax} = -l\sin\alpha\dot\alpha$, $v_{Ay} = l\cos\alpha\dot\alpha$, $v_{Cx} = -l\sin\alpha\dot\alpha$, $v_{Cy} = -l\cos\alpha\dot\alpha$. *Отсюда вытекают еще три уравнения*

$$v_{Ax} = v_{Cx}, \quad v_{Ax} = \operatorname{tg}\alpha\, v_{Cy}, \quad v_{Ay} = -v_{Cy}. \tag{11}$$

Из системы (10), (11) *получим искомые проекции векторов послеударных скоростей шарниров* A *и* C:

$$v_{Ax} = v_{Cx} = -\frac{I\sin^2\alpha}{m}, \quad v_{Ay} = -v_{Cy} = \frac{I\sin 2\alpha}{2m}.$$

206. Принцип Журдена. Так как при ударе координаты точек системы неизменны, а меняются лишь их скорости, то для решения задач теории импульсивных движений более приемлем принцип Журдена (см. §2 главы 3), а не общее уравнение динамики в форме (5). Приняв такую точку зрения, соотношение (5) следует заменить равенством

$$\sum_{\nu=1}^{N}(\boldsymbol{I}_\nu - m_\nu\Delta\boldsymbol{v}_\nu)\cdot\delta\boldsymbol{v}_\nu = 0, \tag{12}$$

где по-прежнему $\Delta \boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{v}_\nu^+ - \boldsymbol{v}_\nu^-$, а конечные вариации скоростей $\delta \boldsymbol{v}_\nu$ (в силу равенств (2) п. 205 и (19) из §3 главы 1) удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{B}_{\gamma\nu} \cdot \delta \boldsymbol{v}_\nu = 0 \ (\gamma = 1,\ 2, \ldots,\ l). \tag{13}$$

Соотношение (12) выражает принцип Журдена в теории импульсивных движений: *послеударное состояние системы выделяется среди кинематически возможных тем, что для него и только для него выполняется соотношение* (12).

Для дальнейшего использования принципа Журдена рассмотрим подробнее вариации $\delta \boldsymbol{v}_\nu$, входящие в равенство (12). Ограничимся случаем, когда все связи системы являются обратимыми. Тогда величины b_γ в (1) тождественно равны нулю, а кинематически возможные скорости точек системы определяются из уравнений:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{B}_{\gamma\nu} \cdot \boldsymbol{v}_\nu = 0 \ (\gamma = 1,\ 2, \ldots,\ l). \tag{14}$$

Если при ударе структура системы не изменяется, то уравнения (13), определяющие вариации скоростей $\delta \boldsymbol{v}_\nu$, с точностью до обозначения неизвестных совпадают с уравнениями (14), которым удовлетворяют сами скорости $\boldsymbol{v}_\nu$ точек системы. Поэтому в соотношении (12) вместо $\delta \boldsymbol{v}_\nu$ можно написать $\boldsymbol{v}_\nu$, считая вектор $\boldsymbol{v}_\nu$ любой кинематически возможной скоростью. Соответственно принцип Журдена может быть записан в виде соотношения

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{I}_\nu - m_\nu \Delta \boldsymbol{v}_\nu) \cdot \boldsymbol{v}_\nu = 0, \tag{15}$$

где $\Delta \boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{v}_\nu^+ - \boldsymbol{v}_\nu^-$, а $\boldsymbol{v}_\nu$ — скорость точки P_ν системы в любом состоянии движения, совместимом со связями.

Пусть во время удара на систему наложены новые идеальные обратимые связи. Тогда в (15) $\boldsymbol{v}_\nu$ — любой вектор скорости, допустимый для системы с наложенными связями.

Если же во время удара происходит снятие идеальной обратимой связи, то в (15) $\boldsymbol{v}_\nu$ — любой вектор скорости, допустимый для системы до снятия связи.

Упражнение 5. *Рассмотрим покоящуюся систему с идеальными обратимыми связями. Пусть* $\boldsymbol{v}_\nu^{(1)}$ *и* $\boldsymbol{v}_\nu^{(2)}$ *— скорости точек системы после* *приложения ударных импульсов $\boldsymbol{I}_\nu^{(1)}$ и $\boldsymbol{I}_\nu^{(2)}$ соответственно. Показать, что после приложения суммарного импульса $\boldsymbol{I}_\nu = \boldsymbol{I}_\nu^{(1)} + \boldsymbol{I}_\nu^{(2)}$ точки системы приобретают скорости $\boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{v}_\nu^{(1)} + \boldsymbol{v}_\nu^{(2)}$, т. е. суперпозиция импульсов влечет за собой суперпозицию скоростей.*

Пример 1. *При помощи принципа Журдена найдем послеударную угловую скорость ω стержня из примера* 3 *п.* 196 (рис. 147).

Положив $\boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{v}_\nu^+$ и учтя, что $\boldsymbol{v}_\nu^- = 0$, а послеударная скорость конца стержня, к которому приложен импульс, равна ωl, получим соотношение (15) *в форме равенства $I\omega l - \sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu {v_\nu^+}^2 = 0$. Это равенство можно переписать в виде $I\omega l = 2T$, где $T = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\omega^2$ — послеударная кинетическая энергия стержня. Отсюда получаем $\omega = \dfrac{3I}{ml}$.*

207. Принцип Гаусса. Рассмотрим систему с идеальными связями. Возможные скорости ее точек определяются системой уравнений (1). Пусть к точкам P_ν системы в момент $t = t_0$ прилагаются заданные активные ударные импульсы $\boldsymbol{I}_\nu$, или на систему накладываются новые идеальные связи вида (1), или же осуществляется и то и другое одновременно.

Пусть, как обычно, $\boldsymbol{v}_\nu^-$ и $\boldsymbol{v}_\nu^+$ — векторы скоростей точек системы непосредственно до и после удара, а $\boldsymbol{v}_\nu$ — вектор любой кинематически возможной скорости точки P_ν в момент $t = t_0 + \tau$ окончания удара.

Пусть

$$G = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\boldsymbol{v}_\nu - \boldsymbol{v}_\nu^- - \frac{\boldsymbol{I}_\nu}{m_\nu}\right)^2. \qquad (16)$$

Величина $G = G(\boldsymbol{v}_\nu)$ является функцией от кинематичеки возможных скоростей $\boldsymbol{v}_\nu$ точек системы в ее послеударном состоянии.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема (Робена). *Состояние системы после удара будет таким, для которого функция $G(\boldsymbol{v}_\nu)$ имеет наименьшее значение по сравнению с ее значениями, отвечающими всем кинематически возможным послеударным скоростям системы.*

Это утверждение аналогично принципу наименьшего принуждения Гаусса в случае конечных сил (см. §3 главы 3), функция (16) является аналогом принуждения Z.

Доказательство.

Положим $\boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{v}_\nu^+ + \delta\boldsymbol{v}_\nu$ и рассмотрим разность $G(\boldsymbol{v}_\nu) - G(\boldsymbol{v}_\nu^+)$.

Имеем

$$G(\boldsymbol{v}_\nu) - G(\boldsymbol{v}_\nu^+) = \sum_{\nu=1}^{N}(m_\nu \Delta \boldsymbol{v}_\nu - \boldsymbol{I}_\nu)\cdot \delta \boldsymbol{v}_\nu + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\delta \boldsymbol{v}_\nu)^2, \qquad (17)$$

где $\Delta \boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{v}_\nu^+ - \boldsymbol{v}_\nu^-$.

Так как $\boldsymbol{v}_\nu$ и $\boldsymbol{v}_\nu^+$ кинематически возможны после удара, то вариации скоростей $\delta \boldsymbol{v}_\nu$ удовлетворяют уравнениям (13) и справедливо соотношение (12). Следовательно, первая сумма в правой части равенства (17) равна нулю. А так как не все величины $\delta \boldsymbol{v}_\nu$ равны нулю, то из (17) следует, что $G(\boldsymbol{v}_\nu) > G(\boldsymbol{v}_\nu^+)$. Это и требовалось доказать.

Упражнение 6 (Экстремальное свойство ударных импульсов реакций сязей). *Пусть $\boldsymbol{I}_{\nu R}$ — ударные импульсы реакций связей. Показать, что для действительного послеударного состояния системы величина*

$$G = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N}\frac{I_{\nu R}^2}{m_\nu}$$

имеет минимальное значение по сравнению с ее значениями для всех кинематически возможных послеударных состояний системы.

Рассмотрим частный случай, когда активные ударные импульсы отсутствуют. Положив в (16) $\boldsymbol{I}_\nu = 0$, получим, что тогда функция

$$G = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\boldsymbol{v}_\nu - \boldsymbol{v}_\nu^-)^2 \qquad (18)$$

имеет минимум при действительных значениях послеударных скоростей $\boldsymbol{v}_\nu^+$ из совокупности скоростей $\boldsymbol{v}_\nu$, кинематически возможных для системы с наложенными связями.

Пример 1. *Два одинаковых тонких однородных стержня AB и BC массы m и длины l каждый соединены шарниром B и находятся в покое, составляя одну прямую. Определить послеударное кинематическое состояние стержней вследствие ударного импульса $\boldsymbol{I}$, сообщенного точке C под прямым углом к стержням* (рис. 158).

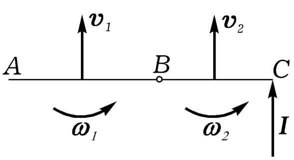

Рис. 158

Кинематическое состояние стержней AB и BC вполне определяется скоростями v_1 и v_2 их центров масс и угловыми скоростями ω_1 и ω_2. Учитывая, что до удара стержни покоились ($\boldsymbol{v}_\nu^- = 0$) и пренебрегая в (16) *не зависящими от v_i, ω_i ($i = 1,\ 2$) слагаемыми, выражение* *для функции G можно записать в виде*

$$G = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_\nu^2 - \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{v}_\nu \cdot \boldsymbol{I}_\nu. \tag{19}$$

Пусть T — суммарная кинетическая энергия стержней, а u — скорость точки C после удара. Тогда из (19) *получаем*

$$G = T - Iu = \frac{1}{2}m\left(v_1^2 + v_2^2\right) + \frac{1}{24}ml^2\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right) - Iu. \tag{20}$$

Так как точка B принадлежит как стержню AB, так и стержню BC, то имеет место кинематическое равенство:

$$v_1 + \omega_1\frac{l}{2} = v_2 - \omega_2\frac{l}{2}. \tag{21}$$

Кроме того,

$$u = v_2 + \omega_2\frac{l}{2}. \tag{22}$$

С учетем равенств (21), (22) *выражение* (20) *для функции G принимает вид*

$$\begin{gathered} G = \frac{1}{2}m\left[v_2 - (\omega_1+\omega_2)\frac{l}{2}\right]^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \\ + \frac{1}{24}ml^2\left(\omega_1^2+\omega_2^2\right) - I\left(v_2 + \omega_2\frac{l}{2}\right). \end{gathered} \tag{23}$$

Условия экстремума функции G дают три уравнения:

$$\frac{\partial G}{\partial v_2} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \omega_1} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \omega_2} = 0. \tag{24}$$

Из системы четырех уравнений (21), (24) *находим:*

$$v_1 = -\frac{I}{4m}, \quad \omega_1 = -\frac{3I}{2ml}, \quad v_2 = \frac{5I}{4m}, \quad \omega_2 = \frac{9I}{2ml}.$$

Отрицательные знаки у v_1 и ω_1 показывают, что действительные направления скорости центра масс стержня AB и направление его вращения противоположны направлениям, указанным на рис. 158.

Пример 2. *Материальная точка массы m покоится на абсолютно гладкой поверхности, задаваемой уравнением $f(x,\ y,\ z) = 0$. К точке прикладывается ударный импульс $\boldsymbol{I} = (I_x,\ I_y,\ I_z)$. Найдем скорость точки после удара.*

Для функции (16) *имеем выражение*

$$G = \frac{1}{2}m\left[\left(\dot{x} - \frac{I_x}{m}\right)^2 + \left(\dot{y} - \frac{I_y}{m}\right)^2 + \left(\dot{z} - \frac{I_z}{m}\right)^2\right]. \tag{25}$$

Уравнение связи $f(x,\ y,\ z) = 0$ *дает соотношение*

$$\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\dot{z} = 0. \tag{26}$$

Имеем задачу на условный экстремум: нужно найти точку экстремума функции (25), *если переменные* $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ *связаны соотношением* (26). *Воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа. Пусть*

$$F = G - \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\dot{z}\right),$$

где λ — *неопределенный множитель. Условия экстремеума* $\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \dfrac{\partial F}{\partial \dot{y}} = \dfrac{\partial F}{\partial \dot{z}} = 0$ *дают три соотношения*

$$m\dot{x} = I_x + \lambda\frac{\partial f}{\partial x}, \quad m\dot{y} = I_y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y}, \quad m\dot{z} = I_z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z}. \tag{27}$$

Вместе с соотношением (26) *они образуют систему четырех уравнений относительно четырех неизвестных* $\dot{x} = \dot{x}^+$, $\dot{y} = \dot{y}^+$, $\dot{z} = \dot{z}^+$ *и* λ.

Отметим, что величины $\lambda\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\lambda\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\lambda\dfrac{\partial f}{\partial z}$ *являются проекциями ударного импульса реакции связи на соответствующие координатные оси.*

Пример 3. *Тонкий однородный стержень длины* l, *занимающий горизонтальное положение, падает поступательно вниз. Он встречает точечное препятствие, отстоящее от концов стержня на расстояниях* $\frac{3}{4}l$ *и* $\frac{1}{4}l$ (рис. 159). *Скорость стержня перед ударом равна* v. *Предполагая удар абсолютно неупругим, найдем послеударное кинематическое состояние стержня.*

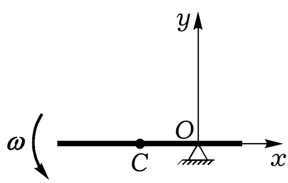

Рис. 159

Кинематическое состояние стержня после удара полностью определяется его угловой скоростью ω. *Активных ударных импульсов нет.*

Импульсивное движение возникает только из-за наложения новой связи, внезапной остановки точки O стержня. Так как для каждой точки стержня $\boldsymbol{v}_\nu^- = \boldsymbol{v}$, то для функции G из (18) *имеем такое выражение:*

$$G = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_\nu^2 - \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu\right)\cdot \boldsymbol{v} + \frac{1}{2}\left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\right) v^2. \tag{28}$$

Пусть m — масса стержня, $\boldsymbol{v}_C$ — послеударная скорость его центра масс, а J_0 — момент инерции стержня относительно точки O. Тогда $\sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu = m$, $\sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu = m\boldsymbol{v}_C$, а $\frac{1}{2}\sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu v_\nu^2 = \frac{1}{2}J_0\omega^2$ — кинетическая энергия стержня после удара, и функцию (28) *можно представить в виде*

$$G = \frac{1}{2}J_0\omega^2 - m\boldsymbol{v}_C\cdot\boldsymbol{v} + \frac{1}{2}mv^2.$$

Но $J_0 = \dfrac{7ml^2}{48}$, $\boldsymbol{v}' = (0,\ -v)$, $\boldsymbol{v}_C' = (0,\ -\omega\frac{l}{4})$. Поэтому имеем такое окончательное выражение для функции G

$$G = \frac{m}{96}(7\omega^2 l^2 - 24\omega v l + 48v^2).$$

Из условия $\dfrac{\partial G}{\partial\omega} = 0$ находим $\omega = \dfrac{12v}{7l}$.

§ 6. Теоремы Карно

208. Первая теорема Карно. Рассмотрим движение системы, связи которой идеальны и обратимы (в частности, стационарны). В некоторый момент $t = t_0$ на систему накладываются новые связи, которые также являются идеальными и обратимыми. Активных ударных импульсов нет. Импульсивное движение возникает только за счет наложения новых связей. Найдем изменение кинетической энергии системы за время удара.

Имеет место следующая (первая) теорема Карно:

Теорема. *Если внезапно наложенные идеальные обратимые связи сохраняются после удара вместе с ранее существовавшими идеальными обратимыми связями, то потерянная в результате наложения новых связей кинетическая энергия равна кинетической энергии потерянных скоростей.*