Импульсивное движение возникает только из-за наложения новой связи, внезапной остановки точки O стержня. Так как для каждой точки стержня $\boldsymbol{v}_\nu^- = \boldsymbol{v}$, то для функции G из (18) *имеем такое выражение:*

$$G = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_\nu^2 - \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu\right)\cdot \boldsymbol{v} + \frac{1}{2}\left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\right) v^2. \tag{28}$$

Пусть m — масса стержня, $\boldsymbol{v}_C$ — послеударная скорость его центра масс, а J_0 — момент инерции стержня относительно точки O. Тогда $\sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu = m$, $\sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu = m\boldsymbol{v}_C$, а $\frac{1}{2}\sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu v_\nu^2 = \frac{1}{2}J_0\omega^2$ — кинетическая энергия стержня после удара, и функцию (28) *можно представить в виде*

$$G = \frac{1}{2}J_0\omega^2 - m\boldsymbol{v}_C\cdot\boldsymbol{v} + \frac{1}{2}mv^2.$$

Но $J_0 = \dfrac{7ml^2}{48}$, $\boldsymbol{v}' = (0,\ -v)$, $\boldsymbol{v}_C' = (0,\ -\omega\frac{l}{4})$. Поэтому имеем такое окончательное выражение для функции G

$$G = \frac{m}{96}(7\omega^2 l^2 - 24\omega v l + 48v^2).$$

Из условия $\dfrac{\partial G}{\partial \omega} = 0$ находим $\omega = \dfrac{12v}{7l}$.

§ 6. Теоремы Карно

208. Первая теорема Карно. Рассмотрим движение системы, связи которой идеальны и обратимы (в частности, стационарны). В некоторый момент $t = t_0$ на систему накладываются новые связи, которые также являются идеальными и обратимыми. Активных ударных импульсов нет. Импульсивное движение возникает только за счет наложения новых связей. Найдем изменение кинетической энергии системы за время удара.

Имеет место следующая (первая) теорема Карно:

Теорема. *Если внезапно наложенные идеальные обратимые связи сохраняются после удара вместе с ранее существовавшими идеальными обратимыми связями, то потерянная в результате наложения новых связей кинетическая энергия равна кинетической энергии потерянных скоростей.*

Доказательство.

Можно было бы применить результаты п. 197, где рассмотрена общая теорема об изменении кинетической энергии при импульсивном движении, но удобнее воспользоваться принципом Журдена (см. п. 206).

Так как $\boldsymbol{I}_\nu = 0$, то соотношение (15) п. 206, справедливое для систем с идеальными обратимыми связями, можно записать в виде

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\boldsymbol{v}_\nu^- - \boldsymbol{v}_\nu^+) \cdot \boldsymbol{v}_\nu = 0. \tag{1}$$

Здесь $\boldsymbol{v}_\nu$ — любой вектор скорости точки P_ν, кинематически возможный для системы с наложенными связями. Следовательно, $\boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{v}_\nu^+$, и из соотношения (1) следует, что

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\boldsymbol{v}_\nu^- - \boldsymbol{v}_\nu^+) \cdot \boldsymbol{v}_\nu^+ = 0. \tag{2}$$

Но так как $(\boldsymbol{v}_\nu^- - \boldsymbol{v}_\nu^+) \cdot \boldsymbol{v}_\nu^+ = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{v}_\nu^{-2} - \boldsymbol{v}_\nu^{+2} - (\boldsymbol{v}_\nu^- - \boldsymbol{v}_\nu^+)^2\right]$, то равенство (2) можно переписать в виде

$$\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu^{-2} - \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu^{+2} - \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\boldsymbol{v}_\nu^- - \boldsymbol{v}_\nu^+)^2 = 0,$$

или, при обозначениях (9), (13) п. 197, $T^- - T^+ - T_* = 0$, т. е.

$$T^- - T^+ = T_*, \tag{3}$$

что и доказывает первую теорему Карно.

Эту теорему можно трактовать как теорему об изменении кинетической энергии за время первой фазы удара. Как видно из (3), за первую фазу удара кинетическая энергия системы всегда уменьшается.

Пример 1. ***Два одинаковых шара движутся поступательно вдоль одной прямой со скоростями v_1 и v_2. В некоторый момент времени шары соприкасаются и происходит абсолютно неупругий удар. После удара шары образуют одно тело, движущееся вдоль исходной прямой со скоростью v. Найдем величину v при помощи первой теоремы Карно. Пусть m — масса каждого из шаров. Тогда***

$$T^- = \frac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2), \quad T^+ = mv^2, \quad T_* = \frac{1}{2}m(v_1 - v)^2 + \frac{1}{2}m(v_2 - v)^2.$$

Из уравнения (3) *находим*

$$v = \frac{1}{2}(v_1 + v_2).$$

Последнее равенство, очевидно, выражает неизменность количества движения системы двух шаров при ударе. Оно могло быть также получено из формул (22) *п.* 204 *при* $\varkappa = 0$ *и* $m_1 = m_2$.

209. Вторая теорема Карно. Пусть у системы с идеальными обратимыми связями в некоторый момент $t = t_0$ происходит внезапное снятие связей (одной, нескольких или даже всех). Активных ударных импульсов нет. Если моменту $t = t_0$ предшествовала фаза деформации, то при снятии связей возникают ударные импульсы реакций связей и происходит увеличение кинетической энергии системы. Имеет место следующая (вторая) теорема Карно:

Теорема. *Кинетическая энергия, приобретенная при снятии связей, равна кинетической энергии приобретенных скоростей.*

Доказательство.

Как и в п. 208, используем принцип Журдена. Теперь в уравнении (1) $\boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{v}_\nu^-$ — любой вектор скорости, кинематически возможный для системы до снятия связей. Следовательно, справедливо соотношение

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\boldsymbol{v}_\nu^+ - \boldsymbol{v}_\nu^-) \cdot \boldsymbol{v}_\nu^- = 0. \tag{4}$$

Но имеет место тождество

$$(\boldsymbol{v}_\nu^+ - \boldsymbol{v}_\nu^-) \cdot \boldsymbol{v}_\nu^- = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{v}_\nu^{+2} - \boldsymbol{v}_\nu^{-2} - (\boldsymbol{v}_\nu^+ - \boldsymbol{v}_\nu^-)^2\right].$$

Поэтому из (4) следует равенство

$$\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu^{+2} - \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu^{-2} - \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\boldsymbol{v}_\nu^+ - \boldsymbol{v}_\nu^-)^2 = 0.$$

Принимая во внимание обозначения (9), (13) п. 197, это равенство можно переписать в виде $T^+ - T^- - T_* = 0$ или в виде

$$T^+ - T^- = T_*. \tag{5}$$

Отсюда и следует справедливость доказываемой теоремы.

Вторую теорему Карно можно трактовать как теорему об изменении кинетической энергии за время второй фазы удара (если она существует). Из (5) следует, что за вторую фазу удара кинетическая энергия системы всегда увеличивается.

Пример 1. *Снаряд, движущийся поступательно со скоростью v, разрывается на два осколка равных масс. После взрыва один из осколков имеет скорость v_1 и сохраняет направление первоначального движения снаряда. При помощи второй теоремы Карно найдем скорость v_2 второго осколка.*

Пусть m — масса снаряда. Тогда

$$T^- = \frac{1}{2}mv^2, \quad T^+ = \frac{1}{4}m(v_1^2 + v_2^2), \quad T_* = \frac{1}{4}m(v_1 - v)^2 + \frac{1}{4}m(v_2 - v)^2,$$

и из уравнения (5) находим, что $v_2 = 2v - v_1$.

Величину v_2 можно было бы также найти из условия постоянства количества движения: $mv = \frac{m}{2}v_1 + \frac{m}{2}v_2$.

210. Кинетическая энергия потерянных скоростей в случае твердого тела. Получим формулу для вычисления кинетической энергии потерянных скоростей в случае тела, совершающего произвольные движения в пространстве. Пусть $Gxyz$ — система координат, образованная главными центральными осями инерции тела, A, B и C — моменты инерции тела относительно осей Gx, Gy и Gz; p, q, r — проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ угловой скорости тела на эти оси, m — масса тела, $\boldsymbol{v}_G$ — скорость центра масс. Радиус-вектор $\overline{GP_\nu}$ точки тела P_ν в системе координат $Gxyz$ задается компонентами x_ν, y_ν, z_ν. Для скорости $\boldsymbol{v}_\nu$ точки P_ν имеем выражение $\boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \overline{GP_\nu}$. Поэтому для компонент вектора $\boldsymbol{v}_\nu^- - \boldsymbol{v}_\nu^+$ потерянной скорости точки P_ν имеем следующие выражения:

$$\begin{aligned} v_{\nu x}^- - v_{\nu x}^+ &= (v_{Gx}^- - v_{Gx}^+) + (q^- - q^+)z_\nu - (r^- - r^+)y_\nu, \\ v_{\nu y}^- - v_{\nu y}^+ &= (v_{Gy}^- - v_{Gy}^+) + (r^- - r^+)x_\nu - (p^- - p^+)z_\nu, \\ v_{\nu z}^- - v_{\nu z}^+ &= (v_{Gz}^- - v_{Gz}^+) + (p^- - p^+)y_\nu - (q^- - q^+)x_\nu. \end{aligned} \tag{6}$$

Для кинетической энергии потерянных скоростей всех точек тела имеем выражение

$$T_* = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left[(v_{\nu x}^- - v_{\nu x}^+)^2 + (v_{\nu y}^- - v_{\nu y}^+)^2 + (v_{\nu z}^- - v_{\nu z}^+)^2\right]. \tag{7}$$

Но, согласно выбору системы координат $Gxyz$, имеют место равенства

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu x_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu y_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu z_\nu = 0, \tag{8}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu x_\nu y_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu y_\nu z_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu z_\nu x_\nu = 0, \tag{9}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (y_\nu^2 + z_\nu^2) = A,\ \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (z_\nu^2 + x_\nu^2) = B,\ \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (x_\nu^2 + y_\nu^2) = C. \tag{10}$$

Учитывая эти равенства и выражения (6), получаем из (7) следующую окончательную формулу:

$$T_* = \frac{1}{2} m(\boldsymbol{v}_G^- - \boldsymbol{v}_G^+)^2 + \frac{1}{2}\left[A(p^- - p^+)^2 + B(q^- - q^+)^2 + C(r^- - r^+)^2\right]. \tag{11}$$

В случае вращения твердого тела вокруг неподвижной точки O совершенно аналогично можно получить формулу

$$T_* = \frac{1}{2}\left[A(p^- - p^+)^2 + B(q^- - q^+)^2 + C(r^- - r^+)^2\right], \tag{12}$$

где теперь A, B, C — главные моменты инерции тела для точки O, а p, q, r — проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ на соответствующие главные оси инерции Ox, Oy, Oz.

Рассмотрим еще случай вращения тела вокруг неподвижной оси u. Пусть эта ось проходит через точку O тела, являющуюся неподвижной. Косинусы углов, образуемых осью u и главными осями инерции Ox, Oy и Oz, обозначим через α, β и γ соответственно. Тогда $p = \omega\alpha$, $q = \omega\beta$, $r = \omega\gamma$ и формула (12) записывается в виде

$$T_* = \frac{1}{2}(A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2)(\omega^- - \omega^+)^2.$$

Но, согласно формуле (1) п. 77, имеем $A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 = J_u$, где J_u — момент инерции тела относительно оси вращения. Поэтому

$$T_* = \frac{1}{2} J_u (\omega^- - \omega^+)^2. \tag{13}$$

Пример 1. *При помощи первой теоремы Карно найдем угловую скорость стержня после удара в задаче из примера* 3 *п.* 207.

Для до и послеударной кинетической энергии стержня имеем следующие выражения:

$$T^- = \frac{1}{2}mv^2, \quad T^+ = \frac{1}{2}\cdot\frac{7ml^2}{48}\omega^2. \tag{14}$$

Кинетическую энергию потерянных скоростей вычисляем по формуле (11):

$$T_* = \frac{1}{2}m\left(v - \omega\frac{l}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}ml^2\omega^2. \tag{15}$$

Подстановка выражений (14), (15) *в равенство* (3) *дает уравнение относительно* ω. *Решив его, получим, что*

$$\omega = \frac{12v}{7l}.$$

Пример 2. *При помощи теоремы Карно вычислим угловую скорость тела* ω^+ *в примере из п.* 199.

Используя обозначения п. 199 *и формулу* (12), *запишем уравнение* (3) *в виде*

$$(A{p^-}^2 + B{q^-}^2 + C{r^-}^2) - (A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2){\omega^+}^2 =$$
$$= A(p^- - \alpha\omega^+)^2 + B(q^- - \beta\omega^+)^2 + C(r^- - \gamma\omega^+)^2.$$

Отсюда получаем

$$\omega^+ = \frac{Ap^-\alpha + Bq^-\beta + Cr^-\gamma}{A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2}.$$

Пример 3. *Найдем послеударные угловые скорости шкивов в примере* 1 *п.* 196.

Имеем

$$T^- = \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_2^2, \quad T^+ = \frac{1}{2}J_1\Omega_1^2 + \frac{1}{2}J_2\Omega_2^2.$$

Величину T_* *находим по формуле* (13):

$$T_* = \frac{1}{2}J_1(\omega_1 - \Omega_1)^2 + \frac{1}{2}J_2(\omega_2 - \Omega_2)^2.$$

Учитывая еще, что $\Omega_1 r_1 = \Omega_2 r_2$, *из уравнения* (3) *получаем*

$$\Omega_1 = \frac{J_1 r_2\omega_1 + J_2 r_1\omega_2}{J_1 r_2^2 + J_2 r_1^2} r_2.$$

211. Третья и обобщенная теоремы Карно. У систем с идеальными обратимыми связями кинетическая энергия за обе фазы удара, как правило, уменьшается; исключением является случай только абсолютно упругого удара, когда она остается без изменений. В этом состоит так называемая *третья теорема Карно.* Мы не останавливаемся на ее доказательстве в общем случае. Отметим только, что в частном случае соударения двух абсолютно гладких тел эта теорема была получена ранее в п. 203.

Формулу (18) п. 203 можно записать в несколько иной форме, выразив ее правую часть только через кинетическую энергию потерянных скоростей T_* и коэффициент восстановления æ. С этой целью по формуле (11) п. 210 находим

$$T_* = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2} m_k(\boldsymbol{v}_k^- - \boldsymbol{v}_k^+)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\big[A_k(p_k^- - p_k^+)^2 + \\ + B_k(q_k^- - q_k^+)^2 + C_k(r_k^- - r_k^+)^2\big].$$

С учетом равенств (9), (10) и (12) из п. 202 это выражение преобразуется к виду

$$T_* = \frac{1}{2}\mu^2 I^2. \tag{16}$$

Учитывая равенство (14) п. 202, из формулы (18) п. 203 имеем

$$T^- - T^+ = \frac{1-æ^2}{2\mu^2}\left(\frac{I\mu^2}{1+æ}\right)^2 = \frac{1-æ}{2(1+æ)}\mu^2 I^2.$$

Отсюда, принимая во внимание равенство (16), окончательно находим, что

$$T^- - T^+ = \frac{1-æ}{1+æ}T_*, \tag{17}$$

т. е. *потеря кинетической энергии за полное время удара равна* $\dfrac{1-æ}{1+æ}$*-ой доле кинетической энергии потерянных скоростей за это время.* Это утверждение называют *обобщенной теоремой Карно.*

Упражнение 7. *Непосредственным вычислением убедиться в справедливости обобщенной теоремы Карно в задаче о соударении материальной точки с неподвижной абсолютно гладкой поверхностью* (*пример* 1 *из п.* 201) *и в задаче о прямом центральном ударе двух тел* (п. 204).