§ 7. Теоремы Делонэ–Бертрана и Томсона

212. Теорема Делонэ–Бертрана. Рассмотрим систему материальных точек P_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, N$) с идеальными обратимыми связями. Первоначально она покоится, но в некоторый момент внезапно приводится в движение заданной системой ударных импульсов $\boldsymbol{I}_\nu$. В результате удара точка P_ν получает скорость $\boldsymbol{v}_\nu^{(1)}$, а система приобретает кинетическую энергию $T^{(1)}$. Наложим теперь на систему новые дополнительные связи, также идеальные и обратимые. Тогда точки P_ν системы под действием тех же импульсов $\boldsymbol{I}_\nu$ приобретают, вообще говоря, другие скорости $\boldsymbol{v}_\nu^{(2)}$, а система — кинетическую энергию $T^{(2)}$.

Новые скорости $\boldsymbol{v}_\nu^{(2)}$ являются кинематически возможными как для системы с увеличенным числом связей, так и для первоначальной системы. Поэтому из принципа Журдена, согласно соотношению (15) п. 206, следует справедливость следующих двух равенств:

$$\sum_{\nu=1}^{N}(\boldsymbol{I}_\nu - m_\nu \boldsymbol{v}_\nu^{(1)}) \cdot \boldsymbol{v}_\nu^{(2)} = 0, \quad \sum_{\nu=1}^{N}(\boldsymbol{I}_\nu - m_\nu \boldsymbol{v}_\nu^{(2)}) \cdot \boldsymbol{v}_\nu^{(2)} = 0.$$

Из этих равенств следует, что

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\boldsymbol{v}_\nu^{(1)} - \boldsymbol{v}_\nu^{(2)}) \cdot \boldsymbol{v}_\nu^{(2)} = 0,$$

или

$$\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_\nu^{(1)2} - \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_\nu^{(2)2} = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\boldsymbol{v}_\nu^{(1)} - \boldsymbol{v}_\nu^{(2)})^2,$$

т. е.

$$T^{(1)} - T^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\boldsymbol{v}_\nu^{(1)} - \boldsymbol{v}_\nu^{(2)})^2 > 0.$$

Последнее соотношение означает, что для систем с идеальными обратимыми связями имеет место следующее утверждение.

Теорема (Делонэ–Бертрана). *Если точки материальной системы получают заданные импульсы, то кинетическая энергия в возникающем движении будет больше, чем кинетическая энергия, которую приобрела бы система при тех же импульсах, если бы к первоначальным связям системы были добавлены новые связи.*

Иными словами, добавление новых связей при тех же импульсах приводит к *уменьшению* послеударной величины кинетической энергии.

Пример 1. *Иллюстрацией к теореме могут служить примеры 2 и 3 из п. 196 (см. также п. 197). Для свободного стержня имеем* $T^{(1)} = \dfrac{2I^2}{m}$. *Если же один из концов стержня закрепить, то* $T^{(2)} = \dfrac{3I^2}{2m}$. *Поэтому* $\dfrac{T^{(1)}}{T^{(2)}} = \dfrac{4}{3}$, *т. е. (при заданном импульсе* $\boldsymbol{I}$*) наложение связи (закрепление конца стержня) уменьшило кинетическую энергию.*

Содержание теоремы Делонэ–Бертрана можно выразить еще следующим образом. Рассмотрим кинематическое состояние системы после действия заданных ударных импульсов как одно из кинематических состояний системы с увеличенным числом связей. Тогда среди бесконечного множества таких состояний системы истинное послеударное кинематическое состояние выделяется тем, что *для него кинетическая энергия имеет максимальное значение при тех же импульсах.*

Пример 2. *Определим при помощи теоремы Делонэ–Бертрана послеударное кинематическое состояние стержня в примере 2 п. 196.*

Кинематическое состояние стержня вполне определится, если найти его послеударную угловую скорость ω *и положение мгновенного центра скоростей.*

Мысленно наложим на стержень новую связь, шарнирно «закрепив» его в точке, лежащей слева от центра масс стержня на расстоянии x *от него* (рис. 146). *Согласно теореме Делонэ–Бертрана, истинное положение мгновенного центра скоростей после удара найдется из условий максимума кинетической энергии как функции* x *при заданной величине импульса* I.

Теорема об изменении кинетического момента дает следующее соотношение между ω *и* x:

$$J\omega = I\left(\frac{l}{2} + x\right), \quad J = \frac{1}{12}ml^2 + mx^2. \tag{1}$$

Для кинетической энергии стержня $T = \dfrac{J\omega^2}{2}$ *с учетом (1) имеем выражение*

$$T = \frac{3I^2}{2m}f(x), \quad f(x) = \frac{(l+2x)^2}{l^2+12x^2}. \tag{2}$$

Из условия $\dfrac{dT}{dx} = 0$ *находим* $x = \dfrac{l}{6}$ *и из (1) получаем* $\omega = \dfrac{6I}{ml}$.

Пусть $\boldsymbol{v}_\nu$ — кинематически возможные послеударные скорости точек первоначально покоящейся системы. Согласно теореме об изменении кинетической энергии при импульсивном движении, величины $\boldsymbol{v}_\nu$

и ударные импульсы $\boldsymbol{I}_\nu$ связаны равенством (см. формулу (10) п. 197):

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_\nu^2 = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{I}_\nu \cdot \boldsymbol{v}_\nu. \tag{3}$$

Поэтому теореме Делонэ–Бертрана можно дать такую формулировку: *кинетическая энергия, сообщаемая системе с идеальными обратимыми связями заданными импульсами $\boldsymbol{I}_\nu$, есть максимум при условии* (3).

Пример 3 (См. также п. 198). *К покоящемуся свободному твердому телу приложены ударные импульсы с главным вектором $\boldsymbol{S}^{(e)}$ и главным моментом $\boldsymbol{L}^{(e)}$ относительно центра масс тела. Определим кинематическое состояние тела после удара при помощи теоремы Делонэ–Бертрана.*

Пусть m — масса тела, A, B, C — его главные центральные моменты инерции, $\boldsymbol{v}_G$ и $\boldsymbol{\omega}$ — скорость центра масс тела и его угловая скорость после удара. В системе координат $Gxyz$, образованной главными центральными осями инерции, имеем: $\boldsymbol{S}^{(e)\prime} = (S_x,\ S_y,\ S_z)$, $\boldsymbol{L}^{(e)\prime} = (L_x,\ L_y,\ L_z)$, $\boldsymbol{v}_G{}' = (v_{Gx},\ v_{Gy},\ v_{Gz})$, $\boldsymbol{\omega}' = (p,\ q,\ r)$. В соответствии с теоремой Делонэ–Бертрана, в послеударном состоянии тела величина

$$T = \frac{1}{2}m(v_{Gx}^2 + v_{Gy}^2 + v_{Gz}^2) + \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) \tag{4}$$

является максимальной при условии (3), *которое в рассматриваемом случае, согласно формуле* (5) *п.* 198, *может быть записано в виде*

$$S_x v_{Gx} + S_y v_{Gy} + S_z v_{Gz} + L_x p + L_y q + L_z r = 2T. \tag{5}$$

Для решения задачи об условном экстремуме используем метод неопределенных множителей Лагранжа. Составим функцию

$$F = T - \lambda(S_x v_{Gx} + S_y v_{Gy} + S_z v_{Gz} + L_x p + L_y q + L_z r - 2T) =$$

$$= (1 + 2\lambda)T - \lambda(S_x v_{Gx} + S_y v_{Gy} + S_z v_{Gz} + L_x p + L_y q + L_z r).$$

Приравняв нулю частные производные функции F по v_{Gx}, v_{Gy}, v_{Gz}, p, q, r, получаем следующие уравнения:

$$\begin{gathered}(1 + 2\lambda)mv_{Gx} = \lambda S_x, \quad (1 + 2\lambda)mv_{Gy} = \lambda S_y, \quad (1 + 2\lambda)mv_{Gz} = \lambda S_z,\\ (1 + 2\lambda)Ap = \lambda L_x, \qquad (1 + 2\lambda)Bq = \lambda L_y, \qquad (1 + 2\lambda)Cr = \lambda L_z.\end{gathered} \tag{6}$$

Из (5) *и* (6) *находим* $\lambda = -1$, *а*

$$v_{Gx} = \frac{S_x}{m}, \quad v_{Gy} = \frac{S_y}{m}, \quad v_{Gz} = \frac{S_z}{m},$$
$$p = \frac{L_x}{A}, \qquad q = \frac{L_y}{B}, \qquad r = \frac{L_z}{C},$$

что находится в соответствии с формулами (2) *и* (3) *п.* 198.

213. Теорема Томсона. Как мы видели в предыдущем пункте, теорема Делонэ–Бертрана позволяет свести задачу об импульсивном движении системы с идеальными обратимыми связями к задаче о нахождении максимума некоторой функции. Теорема Томсона, изучаемая ниже, сводит задачу об импульсивном движении к рассмотрению некоторого минимума.

Пусть точки P_ν первоначально покоящейся системы под действием ударных импульсов $\boldsymbol{I}_\nu$ приобретают скорости $\boldsymbol{v}'_\nu$. Если к системе приложить другие ударные импульсы, то ее состояние после удара будет, как правило, иным, нежели в первом случае: если $\boldsymbol{v}''_\nu$ — скорости точек системы во втором случае, то, вообще говоря, равенство $\boldsymbol{v}'_\nu = \boldsymbol{v}''_\nu$ не будет выполняться для всех точек P_ν. Пусть при этом новые импульсы таковы, что новые скорости $\boldsymbol{v}''_\nu$ удовлетворяют равенству

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{I}_\nu \cdot \boldsymbol{v}''_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{I}_\nu \cdot \boldsymbol{v}'_\nu. \tag{7}$$

Напишем уравнение (15) п. 206 для системы импульсов $\boldsymbol{I}_\nu$ и двух систем кинематически возможных скоростей $\boldsymbol{v}'_\nu$ и $\boldsymbol{v}''_\nu$:

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{I}_\nu - m_\nu \boldsymbol{v}'_\nu) \cdot \boldsymbol{v}'_\nu = 0, \quad \sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{I}_\nu - m_\nu \boldsymbol{v}'_\nu) \cdot \boldsymbol{v}''_\nu = 0.$$

Отсюда на основании условия (7) получаем равенство

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\boldsymbol{v}''_\nu - \boldsymbol{v}'_\nu) \cdot \boldsymbol{v}'_\nu = 0,$$

которое тождественными преобразованиями приводится к виду

$$\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v''^2_\nu - \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu {v'_\nu}^2 = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\boldsymbol{v}''_\nu - \boldsymbol{v}'_\nu)^2,$$

т. е.

$$T'' - T' = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\boldsymbol{v}''_\nu - \boldsymbol{v}'_\nu)^2 > 0.$$

Это означает, что для рассматриваемой системы материальных точек справедливо следующее утверждение.

Теорема (Томсона). *Кинетическая энергия, которую приобретает система в действительности от приложенных импульсов, будет наименьшей из всех тех кинетических энергий, которые сообщили бы системе всевозможные импульсы, удовлетворяющие условию* (7).

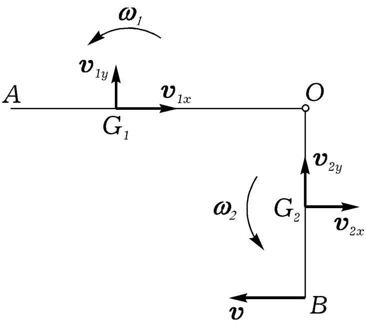

Рис. 160

Доказательство.

Предположим, что находящаяся в покое система материальных точек P_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, N$) приводится в движение неизвестными ударными импульсами, приложенными к некоторым заданным точкам системы $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ($n < N$), причем эти точки приобретают данные скорости $\boldsymbol{v}'_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$). К остальным точкам системы не приложено никаких активных ударных импульсов, их послеударные скорости обусловлены только наличием связей. В этом случае условию (7) можно удовлетворить, если новые импульсы подобрать так, чтобы выполнялись условия $\boldsymbol{v}''_\nu = \boldsymbol{v}'_\nu$ для $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Теореме Томсона можно, следовательно, дать такую формулировку: *если некоторые точки системы внезапно приведены в движение с заданными скоростями, то кинетическая энергия, приобретенная системой, меньше, чем кинетическая энергия во всяком другом кинематически возможном состоянии, при котором указанные точки системы имеют заданные скорости.*

Пример 1. *Два одинаковых тонких однородных стержня AO и OB массы m и длины l каждый шарнирно соединены в точке O и находятся в покое перпендикулярно один другому. Концу B стержня OB внезапно сообщается скорость $\boldsymbol{v}$, параллельная направлению OA* (рис. 160). *Определить кинематическое состояние стержней после удара.*

При заданной скорости точки B послеударное кинематическое состояние стержней AO и OB вполне определяется их угловыми скоростями ω_1 и ω_2. Пусть $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ — скорости центров масс G_1 и G_2 стержней после удара. Тогда

$$T = \frac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2) + \frac{1}{24}ml^2(\omega_1^2 + \omega_2^2).$$

Но из кинематических соотношений $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{\omega}_1 \times \overline{G_1O} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \overline{BO}$

и $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \overline{BG_2}$ *следуют равенства*

$$v_{1x} = -v - \omega_2 l, \quad v_{1y} = -\omega_1 \frac{l}{2}, \quad v_{2x} = -v - \omega_2 \frac{l}{2}, \quad v_{2y} = 0,$$

поэтому

$$T = \frac{1}{2}m\left[(v + \omega_2 l)^2 + \omega_1^2 \frac{l^2}{4} + (v + \omega_2 \frac{l}{2})^2\right] + \frac{1}{24}ml^2(\omega_1^2 + \omega_2^2).$$

Из уравнений

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_1} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \omega_2} = 0$$

находим $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = -\dfrac{9v}{8l}$. *Таким образом, непосредственно после удара стержень* AO *находится в состоянии мгновенного поступательного движения, а стержень* AO *вращается по часовой стрелке с угловой скоростью* $\dfrac{9v}{8l}$.

Пример 2. *К заданной точке свободного твердого тела приложен импульс, сообщающий этой точке данную скорость. Определить послеударное состояние тела.*

Как и в последнем примере п. 212, *за начало координат примем центр масс* G *тела, а за оси* Gx, Gy, Gz *— главные центральные оси инерции. Кинетическая энергия* T *тела после удара вычисляется по формуле* (4) *п.* 212. *Пусть* a, b, c *— координаты точки приложения импульса, а* v_x, v_y, v_z *— заданные проекции вектора ее скорости на координатные оси. Тогда*

$$v_x = v_{Gx} + qc - rb, \quad v_y = v_{Gy} + ra - pc, \quad v_z = v_{Gz} + pb - qa. \tag{8}$$

Нахождение величин v_{Gx}, v_{Gy}, v_{Gz}, p, q, r, *доставляющих минимум функции* T *при условиях* (8), *приводит к уравнениям*

$$mv_{Gx} = \lambda_x, \quad mv_{Gy} = \lambda_y, \quad mv_{Gz} = \lambda_z, \tag{9}$$

$$Ap = b\lambda_z - c\lambda_y, \quad Bq = c\lambda_x - a\lambda_z, \quad Cr = a\lambda_y - b\lambda_x, \tag{10}$$

где λ_x, λ_y, λ_z *— неопределенные множители Лагранжа, которые определяются вместе с величинами* v_{Gx}, v_{Gy}, v_{Gz}, p, q, r *из системы девяти уравнений* (8)–(10).

Отметим, что из формул (2), (3) *п.* 198 *и уравнений* (9), (10) *следует, что* λ_x, λ_y, λ_z *— проекции неизвестного вектора ударного импульса на оси* Gx, Gy, Gz.

Теореме Томсона можно дать истолкование, близкое по форме к данному в предыдущем пункте истолкованию теоремы Делонэ–Бертрана. Будем рассматривать послеударное кинематическое состояние системы, заданным точкам которой сообщены заданные скорости, как одно из послеударных состояний системы с увеличенным числом связей. Тогда среди бесконечного множества таких состояний истинное послеударное состояние выделяется тем, что *оно дает наименьшую кинетическую энергию при тех же скоростях заданных точек системы.*

Иными словами, добавление новых связей при тех же скоростях заданных точек системы приводит к *увеличению* ее послеударной кинетической энергии.

Сравнив теоремы Делонэ–Бертрана и Томсона, получим, что если заданы ударные импульсы, приложенные в данных точках системы, то послеударное состояние системы может быть найдено при решении задачи максимума кинетической энергии, если же заданы скорости точек приложения импульсов, то послеударное состояние находится как решение задачи минимума кинетической энергии при добавлении новых связей.

Пример 3. *Для иллюстрации рассмотрим два тонких однородных стержня AB и BC, связанных шарнирно в точке B. Стержни покоятся и составляют одну прямую* (рис. 158). *Внезапно точке C сообщается скорость $\boldsymbol{v}$ в направлении, перпендикулярном BC. На основании вычислений, проведенных в примере* 1 *п.* 207, *можно получить, что при этом система из двух стержней приобретет кинетическую энергию $T^{(1)} = \dfrac{1}{7}mv^2$.*

Теперь мысленно проведем второй эксперимент. Закрепим шарнирно точку A и приведем точку C в движение с прежней скоростью $\boldsymbol{v}$. Использовав вычисления примера 3 *п.* 200, *получим, что в этом случае приобретенная кинетическая энергия $T^{(2)} = \dfrac{7}{48}mv^2$.*

И, наконец, рассмотрим третий эксперимент. Кроме точки A закрепим шарнирно еще и точку B, а точке C опять сообщим ту же скорость $\boldsymbol{v}$. Здесь после удара стержень AB остается в покое, и приобретенная кинетическая энергия $T^{(3)}$ равна послеударной кинетической энергии стержня BC. Согласно примеру из п. 197, *имеем $T^{(3)} = \dfrac{1}{6}mv^2$.*

Так как $\dfrac{1}{7} < \dfrac{7}{48} < \dfrac{1}{6}$, то $T^{(1)} < T^{(2)} < T^{(3)}$, т. е., в соответствии с теоремой Томсона, наложение связей при неизменной скорости точки C приводит к увеличению послеударной кинетической энергии.

Если же в трех рассмотренных экспериментах одинаковым будет ортогональный BC ударный импульс $\boldsymbol{I}$, то приобретенная кинетичес-

кая энергия будет, соответственно, такой: $T^{(1)} = \dfrac{7I^2}{4m}$, $T^{(2)} = \dfrac{12I^2}{7m}$, $T^{(3)} = \dfrac{3I^2}{2m}$. *Так как* $\dfrac{7}{4} > \dfrac{12}{7} > \dfrac{3}{2}$, *то* $T^{(1)} > T^{(2)} > T^{(3)}$, *т. е., в согласии с теоремой Делонэ–Бертрана, наложение новых связей привело к уменьшению послеударной кинетической энергии.*

Пример 4. *При помощи теоремы Томсона найдем положение мгновенного центра скоростей тонкого однородного стержня, правому концу которого сообщена скорость* $\boldsymbol{v}$ *перпендикулярно стержню* (рис. 146).

Эта задача рассмотрена в предыдущем пункте при помощи теоремы Делонэ–Бертрана. Здесь используем аналогичный подход. На стержень мысленно наложим связь, «закрепив» его при помощи шарнира в точке, отстоящей от центра масс O *на расстоянии* x. *Тогда послеударная угловая скорость задается равенством* $\omega = \dfrac{2v}{l+2x}$. *Момент инерции* J *относительно оси вращения вычисляется по формуле* (1). *Для кинетической энергии стержня в его послеударном состоянии получим выражение*

$$T = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{6}mv^2 g(x), \quad g(x) = \frac{l^2+12x^2}{(l+2x)^2}. \tag{11}$$

Согласно теореме Томсона, искомая величина x *доставляет минимум величине кинетической энергии. Это дает* $x = \dfrac{l}{6}$, *что совпадает с результатом предыдущего пункта.*

Сравнивая формулы (2) *и* (11), *видим, что* $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$, *т. е. теоремы Делонэ–Бертрана и Томсона привели к рассмотрению экстремума одной и той же функции от* x.

§ 8. Уравнения Лагранжа второго рода для импульсивных движений

214. Обобщенные ударные импульсы. Рассмотрим голономную систему материальных точек P_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, N$) с идеальными связями. Пусть она имеет n степеней свободы, а $q_1, q_2, \ldots, q_n$ — ее обобщенные координаты. В некоторый момент времени t_0 к системе прикладываются ударные силы, имеющие за время удара τ ударные импульсы $\boldsymbol{I}_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, N$). Задача об импульсивном движении системы в обобщенных координатах состоит в нахождении значений $\dot{q}_i^+$ обобщенных скоростей после удара по известным их значениям $\dot{q}_i^-$ непосредственно перед ударом. Для решения этой задачи могут быть использованы уравнения Лагранжа второго рода (см. п. 138).