

кая энергия будет, соответственно, такой: $T^{(1)} = \frac{7I^2}{4m}$, $T^{(2)} = \frac{12I^2}{7m}$, $T^{(3)} = \frac{3I^2}{2m}$. Так как $\frac{7}{4} > \frac{12}{7} > \frac{3}{2}$, то $T^{(1)} > T^{(2)} > T^{(3)}$, т. е., в согласии с теоремой Делонэ–Бертрана, наложение новых связей привело к уменьшению послеударной кинетической энергии.

ПРИМЕР 4. При помощи теоремы Томсона найдем положение мгновенного центра скоростей тонкого однородного стержня, правому концу которого сообщена скорость v перпендикулярно стержню (рис. 146).

Эта задача рассмотрена в предыдущем пункте при помощи теоремы Делонэ–Бертрана. Здесь используем аналогичный подход. На стержень мысленно наложим связь, «закрепив» его при помощи шарнира в точке, отстоящей от центра масс O на расстоянии x . Тогда послеударная угловая скорость задается равенством $\omega = \frac{2v}{l+2x}$. Момент инерции J относительно оси вращения вычисляется по формуле (1). Для кинетической энергии стержня в его послеударном состоянии получим выражение

$$T = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{6}mv^2g(x), \quad g(x) = \frac{l^2 + 12x^2}{(l+2x)^2}. \quad (11)$$

Согласно теореме Томсона, искомая величина x доставляет минимум величине кинетической энергии. Это дает $x = \frac{l}{6}$, что совпадает с результатом предыдущего пункта.

Сравнивая формулы (2) и (11), видим, что $g(x) = \frac{1}{f(x)}$, т. е. теоремы Делонэ–Бертрана и Томсона привели к рассмотрению экстремума одной и той же функции от x .

§ 8. Уравнения Лагранжа второго рода для импульсивных движений

214. Обобщенные ударные импульсы. Рассмотрим голономную систему материальных точек P_ν ($\nu = 1, 2, \dots, N$) с идеальными связями. Пусть она имеет n степеней свободы, а q_1, q_2, \dots, q_n — ее обобщенные координаты. В некоторый момент времени t_0 к системе прикладываются ударные силы, имеющие за время удара τ ударные импульсы I_ν ($\nu = 1, 2, \dots, N$). Задача об импульсивном движении системы в обобщенных координатах состоит в нахождении значений \dot{q}_i^+ обобщенных скоростей после удара по известным их значениям \dot{q}_i^- непосредственно перед ударом. Для решения этой задачи могут быть использованы уравнения Лагранжа второго рода (см. п. 138).

Введем понятие обобщенных ударных импульсов, аналогичное понятию обобщенных сил (п. 54). Рассмотрим элементарную работу

$$\delta L = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{I}_{\nu} \cdot \delta \mathbf{r}_{\nu}, \quad (1)$$

совершаемую ударными импульсами на любом виртуальном перемещении системы. Величины $\delta \mathbf{r}_{\nu}$ выражаются через вариации обобщенных координат δq_i по формуле (27) п. 16. Поэтому выражению (1) можно придать такой вид:

$$\delta L = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{I}_{\nu} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{\nu=1}^N \mathbf{I}_{\nu} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q_i} \right) \delta q_i. \quad (2)$$

Введя обозначение

$$\mathbf{J}_i = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{I}_{\nu} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

равенство (2) можно записать в виде

$$\delta L = \sum_{i=1}^n \mathbf{J}_i \delta q_i. \quad (4)$$

Величина \mathbf{J}_i называется *обобщенным ударным импульсом*, соответствующим обобщенной координате q_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

Принимая во внимание равенство (1) п. 191, из формулы (3) получаем такое выражение для обобщенного ударного импульса

$$\mathbf{J}_i = \sum_{\nu=1}^N \int_{t_0}^{t_0+\tau} \mathbf{F}_{\nu} dt \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q_i}.$$

Но величины $\frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q_i}$ во время удара изменяются пренебрежимо мало и при интегрировании их можно считать постоянными. Поэтому последнее равенство можно переписать так

$$\mathbf{J}_i = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \left(\sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_{\nu} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q_i} \right) dt.$$

Согласно формуле (9) п. 54, выражение в круглых скобках есть обобщенная сила Q_i , соответствующая обобщенной координате q_i . Следовательно,

$$J_i = \int_{t_0}^{t_0+\tau} Q_i dt \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (5)$$

215. Уравнения Лагранжа. Проинтегрируем обе части уравнения (11) п. 138 по времени на промежутке, соответствующем продолжительности удара τ . Тогда, учитывая формулы (5) и тот факт, что интегралы от конечных величин $\frac{\partial T}{\partial q_i}$ за время удара пренебрежимо малы, получаем соотношения:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)^+ - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)^- = J_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (6)$$

где, как обычно, верхними индексами $-$ и $+$ обозначены значения соответствующих величин до и после удара.

Соотношения (6) образуют систему n уравнений Лагранжа второго рода для импульсивных движений. Неизвестными являются величины \dot{q}_1^+ , \dot{q}_2^+ , ..., \dot{q}_n^+ . В отличие от уравнений Лагранжа (11) п. 138 для движения под действием конечных сил, уравнения (6) являются алгебраическими (причем линейными), а не дифференциальными.

ПРИМЕР 1. Материальная точка массы m движется вдоль оси Ox со скоростью v . К ней прикладывается ударный импульс I , направленный вдоль оси Ox . Найдём последующую скорость точки.

Результат сразу же следует из основного соотношения в теории импульсивных движений (см. формулу (2) п. 192). Но в иллюстративных целях решим эту задачу при помощи уравнений Лагранжа (6).

Из (1) имеем $\delta L = I \delta x$, т. е. $J_x = I$. Но $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$, $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}$, поэтому, согласно (6), имеем уравнение $(m \dot{x})^+ - (m \dot{x})^- = J_x = I$. Следовательно, $\dot{x}^+ = v + \frac{I}{m}$.

ПРИМЕР 2. Двойной маятник, образованный двумя тонкими однородными стержнями длины l и массы m каждый, находится в покое, причем центры тяжести стержней находятся на одной вертикали ниже точки A подвеса стержней (это значит, что на рис. 15 имеем $\varphi = \psi = 0$). Ему сообщается горизонтальный ударный импульс I , приложенный к нижнему стержню на расстоянии a от шарнира, соединяющего стержни. Найти угловые скорости каждого из стержней после удара.

Сложив кинетические энергии стержней, образующих маятник, получим

$$T = \frac{1}{2}ml^2 \left[\frac{4}{3}\dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}\dot{\psi} \cos(\varphi - \psi) + \frac{1}{3}\dot{\psi}^2 \right]. \quad (7)$$

В системе координат Axy , ось Ax которой направлена вертикально вниз, а ось Ay горизонтальна и лежит в плоскости рис. 15, имеем $\mathbf{I}' = (0, I)$, а радиус-вектор $\mathbf{r}' = (x, y)$ точки приложения импульса имеет компоненты $x = l \cos \varphi + a \cos \psi$, $y = l \sin \varphi + a \sin \psi$. Для элементарной работы (1) импульса \mathbf{I} на виртуальном перемещении $\delta \mathbf{r}' = (\delta x, \delta y)$ получаем следующее выражение

$$\delta L = \mathbf{I} \cdot \delta \mathbf{r} = I \delta y = I l \cos \varphi \delta \varphi + I a \cos \psi \delta \psi.$$

Следовательно,

$$J_\varphi = I l \cos \varphi, \quad J_\psi = I a \cos \psi. \quad (8)$$

Уравнения Лагранжа (6) будут такими:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right)^+ - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right)^- = J_\varphi, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right)^+ - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right)^- = J_\psi. \quad (9)$$

Принимая во внимание формулы (7), (8) и тот факт, что $\dot{\varphi}^- = \dot{\psi}^- = 0$, а при ударе $\varphi = \psi = 0$, уравнения (9) можно записать в следующем виде:

$$8\dot{\varphi}^+ + 3\dot{\psi}^+ = \frac{6I}{ml}, \quad 3\dot{\varphi}^+ + 2\dot{\psi}^+ = \frac{6Ia}{ml^2}.$$

Отсюда получим искомые величины послеударных угловых скоростей стержней:

$$\dot{\varphi}^+ = \frac{6I(2l - 3a)}{7ml^2}, \quad \dot{\psi}^+ = \frac{6I(8a - 3l)}{7ml^2}.$$

В примере 3 п. 200 этот же результат получен при помощи теорем об изменении количества движения и кинетического момента.

ПРИМЕР 3. Тонкий однородный стержень AB длины l и массы m движется в плоскости Oxy (рис. 161). В некоторый момент времени он ударяется об ось Ox своим концом A . Во время удара стержень составляет с осью Ox угол α , компоненты скорости его центра масс равны \dot{x}^- , \dot{y}^- , а угловая скорость равна $\dot{\varphi}^-$. Считая ось Ox абсолютно гладкой, а удар абсолютно упругим, найти послеударное кинематическое состояние стержня.

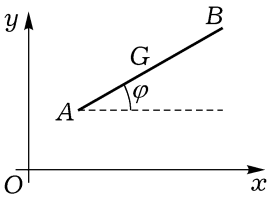


Рис. 161

Если x, y — координаты центра масс стержня, а $\dot{\varphi}$ — его угловая скорость, то

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{24}ml^2\dot{\varphi}^2. \quad (10)$$

Пусть I — неизвестный ударный импульс оси Ox . Ввиду отсутствия трения он параллелен оси Oy . Для элементарной работы ударного импульса на виртуальном перемещении стержня имеем следующее выражение:

$$\delta L = I \delta y - I \frac{l}{2} \cos \alpha \delta \varphi.$$

Отсюда следует, что

$$J_x = 0, \quad J_y = I, \quad J_\varphi = -I \frac{l}{2} \cos \alpha. \quad (11)$$

Уравнения Лагранжа (6) имеют вид:

$$m(\dot{x}^+ - \dot{x}^-) = 0, \quad m(\dot{y}^+ - \dot{y}^-) = I, \quad \frac{1}{12}ml^2(\dot{\varphi}^+ - \dot{\varphi}^-) = -\frac{1}{2}Il \cos \alpha. \quad (12)$$

Они представляют собой систему трех уравнений относительно четырех неизвестных $\dot{x}^+, \dot{y}^+, \dot{\varphi}^+, I$. Недостающее уравнение получается из условия того, что удар является абсолютно неупругим. Это условие означает, что скорость точки A после удара не имеет составляющей вдоль оси Oy , т. е.

$$\dot{y}^+ = \frac{1}{2}l \cos \alpha \dot{\varphi}^+. \quad (13)$$

Из системы (12), (13) находим, что

$$\begin{aligned} \dot{x}^+ &= \dot{x}^-, & \dot{y}^+ &= \frac{(l\dot{\varphi}^- + 6 \cos \alpha \dot{y}^-) \cos \alpha}{2(1 + 3 \cos^2 \alpha)}, \\ \dot{\varphi}^+ &= \frac{l\dot{\varphi}^- + 6 \cos \alpha \dot{y}^-}{l(1 + 3 \cos^2 \alpha)}, & I &= \frac{m(l \cos \alpha \dot{\varphi}^- - 2\dot{y}^-)}{2(1 + 3 \cos^2 \alpha)}. \end{aligned} \quad (14)$$

216. Случай, когда ударные импульсы возникают только из-за наложения новых связей. Правые части уравнений (6) содержат как активные ударные импульсы, так и, вообще говоря, импульсы ударных реакций новых идеальных связей, накладываемых на систему

во время удара (если, конечно, такие связи есть). Но часто в задаче об импульсивном движении систем надо узнать лишь послеударное кинематическое состояние системы и не требуется нахождение импульсов ударных реакций связей. Рассмотрим алгоритм Аппеля, позволяющий получать уравнения Лагранжа импульсивного движения, не содержащие ударные импульсы новых связей, накладываемых на систему.

Рассмотрим голономную систему с n степенями свободы. Активные ударные импульсы отсутствуют. Удар вызывается тем, что в некоторый момент времени t_0 на систему накладывается $n - k$ новых идеальных связей. Эти связи могут в момент $t = t_0 + \tau$ окончания удара сохраниться, а могут и исчезнуть. Первоначально существующие связи тоже идеальны, они существуют во время удара и после него.

Обобщенные координаты q_1, q_2, \dots, q_n всегда можно выбрать так, чтобы новые связи задавались уравнениями

$$q_{k+1} = 0, q_{k+2} = 0, \dots, q_n = 0. \quad (15)$$

Эти уравнения выполняются во время удара. В послеударном состоянии уравнения (15) выполняются, если только вновь наложенные связи сохраняются после удара.

Принтегрируем обе части общего уравнения динамики (см. соотношение (10) п. 137, в котором $m = n$) по времени от $t = t_0$ до $t = t_0 + \tau$. Учитывая формулы (5) и тот факт, что во время удара величины δq_i можно считать не зависящими от t , а интегралы от конечных величин $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ пренебрежимо малы, получаем следующее равенство:

$$\sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right)^+ - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right)^- - J_i \right] \delta q_i = 0. \quad (16)$$

Так как активных ударных импульсов нет, а первоначальные связи сохраняются во время удара, то обобщенные ударные импульсы J_1, J_2, \dots, J_k равны нулю, а $J_{k+1}, J_{k+2}, \dots, J_n$ определяются только ударными реакциями новых связей.

До удара вариации $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$ произвольны. Выберем их так, чтобы они задавали виртуальное перемещение и для системы с наложенными на нее новыми связями. В соответствии с уравнениями (15) тогда следует считать, что $\delta q_{k+1} = \delta q_{k+2} = \dots = \delta q_n = 0$, а величины $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_k$ будут произвольными. При таком выборе вариаций из соотношений (16) следуют уравнения

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right)^+ = \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right)^- \quad (i = 1, 2, \dots, k), \quad (17)$$

т. е. справедливо следующее утверждение.

Теорема (Аппеля). Производные от кинетической энергии по обобщенным скоростям, отвечающим обобщенным координатам, не обращающимся в нуль во время удара, не изменяются во время удара.

В уравнениях (17) $q_{k+1} = q_{k+2} = \dots = q_n = 0$, но соответствующие обобщенные скорости $\dot{q}_{k+1}, \dot{q}_{k+2}, \dots, \dot{q}_n$ вовсе не обязаны быть равными нулю как до удара, так и после него. Они после удара равны нулю лишь тогда, когда вновь наложенные связи сохраняются после удара, в этом случае k неизвестных $\dot{q}_1^+, \dot{q}_2^+, \dots, \dot{q}_k^+$ находятся из k линейных уравнений (17). В других же случаях мы имеем k уравнений (17) относительно n неизвестных $\dot{q}_1^+, \dot{q}_2^+, \dots, \dot{q}_n^+$ и, как и в случае удара, не являющегося абсолютно неупругим, надо вводить дополнительные предположения о поведении системы после удара.

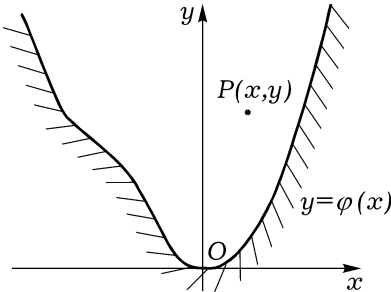


Рис. 162

ккой, а удар абсолютно упругим, найдем скорость $\mathbf{v}^{+'} = (\dot{x}^+, \dot{y}^+)$ точки P после удара.

За обобщенные координаты точки примем величины

$$q_1 = x, \quad q_2 = y - \varphi(x). \quad (18)$$

При ударе на точку накладывается новая связь $q_2 = 0$.

Из (18) имеем

$$\dot{x} = \dot{q}_1, \quad \dot{y} = \varphi' \dot{q}_1 + \dot{q}_2, \quad (19)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по x . Следовательно,

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m \left[(1 + \varphi'^2) \dot{q}_1^2 + 2\varphi' \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2 \right]. \quad (20)$$

Из (17) имеем уравнение

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right)^+ = \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right)^-,$$

ПРИМЕР 1. Материальная точка P движется в вертикальной плоскости над цилиндрической поверхностью, образующая которой горизонтальна; на рис. 162 изображено сечение $y = \varphi(x)$ этой поверхности плоскостью $z = 0$, перпендикулярной образующей. В некоторый момент времени точка соударяется с поверхностью. Перед ударом вектор ее скорости $\mathbf{v}^{-'} = (\dot{x}^-, \dot{y}^-)$. Считая поверхность абсолютно гладкой

которое при учете формулы (20) записывается в виде

$$(1 + \varphi'^2)(\dot{q}_1^+ - \dot{q}_1^-) + \varphi'(\dot{q}_2^+ - \dot{q}_2^-) = 0. \quad (21)$$

Недостающее уравнение следует из предположения об абсолютной упругости удара:

$$\dot{q}_2^+ = -\dot{q}_2^-. \quad (22)$$

Решив систему уравнений (21), (22), получим

$$\dot{q}_1^+ = \dot{q}_1^- + \frac{2\varphi'\dot{q}_2^-}{1 + \varphi'^2}, \quad \dot{q}_2^+ = -\dot{q}_2^-. \quad (23)$$

Отсюда и из равенств (19) находим

$$\dot{x}^+ = \frac{1 - \varphi'^2}{1 + \varphi'^2}\dot{x}^- + \frac{2\varphi'}{1 + \varphi'^2}\dot{y}^-, \quad \dot{y}^+ = \frac{2\varphi'}{1 + \varphi'^2}\dot{x}^- - \frac{1 - \varphi'^2}{1 + \varphi'^2}\dot{y}^-. \quad (24)$$

Если обозначить через α угол между касательной к кривой $y = \varphi(x)$ в точке соударения и осью Ox , то $\varphi' = \operatorname{tg} \alpha$ и равенства (24) можно записать более компактно:

$$\begin{aligned} \dot{x}^+ &= \cos 2\alpha \dot{x}^- + \sin 2\alpha \dot{y}^-, \\ \dot{y}^+ &= \sin 2\alpha \dot{x}^- - \cos 2\alpha \dot{y}^-. \end{aligned}$$

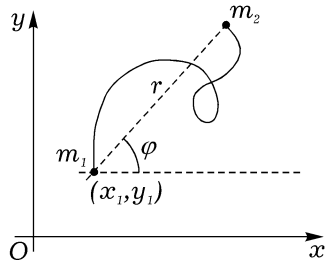


Рис. 163

ПРИМЕР 2. Две материальные точки масс m_1 и m_2 , связанные невесомой нерастяжимой нитью длины l , движутся в плоскости Oxy . В некоторый момент нить натягивается. Зная состояние движения до удара, найти послударное кинематическое состояние точек.

Пусть x_i, y_i — координаты точки массы m_i ($i = 1, 2$), а φ, r — полярные координаты, определяющие положение второй точки относительно первой (рис. 163). В качестве обобщенных координат примем величины

$$q_1 = x_1, \quad q_2 = y_1, \quad q_3 = \varphi, \quad q_4 = l - r. \quad (25)$$

При ударе на систему точек накладывается связь $q_4 = 0$.

Учтя, что $x_2 = x_1 + r \cos \varphi, \quad y_2 = y_1 + r \sin \varphi$, для кинетической энергии системы

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

можно получить следующее выражение

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2}m_2 [(l - q_4)^2 \dot{q}_3^2 + \dot{q}_4^2 - 2(l - q_4)\dot{q}_3(\dot{q}_1 \sin q_3 - \dot{q}_2 \cos q_3) - 2\dot{q}_4(\dot{q}_1 \cos q_3 + \dot{q}_2 \sin q_3)]. \quad (26)$$

Введя обозначение $\Delta \dot{q}_i = \dot{q}_i^+ - \dot{q}_i^-$ ($i = 1, 2, 3, 4$) и выписав уравнения (17) для $i = 1, 2, 3$, получим

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)\Delta \dot{q}_1 - m_2(l - q_4)\sin q_3 \Delta \dot{q}_3 - m_2 \cos q_3 \Delta \dot{q}_4 &= 0, \\ (m_1 + m_2)\Delta \dot{q}_2 + m_2(l - q_4)\cos q_3 \Delta \dot{q}_3 - m_2 \sin q_3 \Delta \dot{q}_4 &= 0, \\ \sin q_3 \Delta \dot{q}_1 - \cos q_3 \Delta \dot{q}_2 - (l - q_4)\Delta \dot{q}_3 &= 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Уравнения (27) представляют собой систему трех уравнений относительно четырех неизвестных \dot{q}_i^+ ($i = 1, 2, 3, 4$). Недостающее уравнение получим, приняв гипотезу о том, что до и послеударные величины \dot{r}^- и \dot{r}^+ связаны соотношением $\dot{r}^+ = -\varkappa \dot{r}^-$, или, на основании последнего из равенств (25), $\dot{q}_4^+ = -\varkappa \dot{q}_4^-$. Это приводит к уравнению

$$\Delta \dot{q}_4 = -(1 + \varkappa)\dot{q}_4^-. \quad (28)$$

Принимая во внимание обозначения (25) и считая, что во время удара угол φ равен α , из системы уравнений (27), (28) находим

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^+ &= \dot{x}_1^- + \frac{(1 + \varkappa)m_2 \cos \alpha}{m_1 + m_2} \dot{r}^-, \\ \dot{y}_1^+ &= \dot{y}_1^- + \frac{(1 + \varkappa)m_2 \sin \alpha}{m_1 + m_2} \dot{r}^-, \quad \dot{\varphi}^+ = \dot{\varphi}^-. \end{aligned} \quad (29)$$