Глава XIII
Интегральные вариационные принципы механики

§ 1. Принцип Гамильтона–Остроградского

217. Прямой и окольный пути голономной системы. В гл. III мы изучали дифференциальные вариационные принципы механики, которые дают критерий, позволяющий выделить истинное (действительное) движение механической системы среди других кинематически возможных ее движений для данного момента времени. В этой главе будут рассмотрены некоторые интегральные вариационные принципы. В отличие от дифференциальных принципов, интегральные вариационные принципы механики дают критерий истинного движения системы не для одного момента времени, а для некоторого конечного промежутка $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Они характеризуют движение системы в целом, на всем этом промежутке времени.

Как и в гл. III, будем предполагать, что рассматриваемая механическая система или свободна, или подчинена идеальным удерживающим связям, но ограничимся только голономными системами[1]. Пусть a_ν и b_ν — возможные положения точки P_ν системы ($\nu = 1, 2, \ldots, N$) в моменты времени $t = t_0$ и $t = t_1$ соответственно. Положение системы в момент $t = t_0$ назовем ее *начальным*, а в момент $t = t_1$ — *конечным положениями.* Предположим, что в момент $t = t_0$ можно так выбрать скорости точек системы, что при $t = t_1$ точки P_ν займут их конечные положения. Совокупность траекторий, которые будут описаны точками системы при их перемещении из начальных положений a_ν в их конечные положения b_ν, образуют *истинный* (*действительный*) путь системы. Его также называют *прямым путем системы.*

На прямом пути точка P_ν системы описывает кривую γ_ν, соединяющую точки a_ν и b_ν. Совокупность соединяющих точки a_ν и b_ν кривых γ'_ν, бесконечно близких к соответствующим кривым γ_ν и таких,

[1] Вопрос о применимости интегральных вариационных принципов механики к неголономным системам имеет длительную и непростую историю. Библиографию по этому вопросу и основные результаты см. в статье: Румянцев В. В. Об интегральных принципах для неголономных систем // ПММ, 1982, Т. 46, вып. 1, С. 3–12.

что движение точки P_ν по кривой γ'_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, N)$ может происходить без нарушения связей, ***называют окольным путем системы.*** На рис. 164 сплошная линия соответствует прямому пути, а штриховые — окольным. Всюду в дальнейшем будем считать, что движение всех точек P_ν по окольным путям начинается одновременно при $t = t_0$ и оканчивается при $t = t_1$, т. е. движение системы по окольному пути начинается и оканчивается в те же моменты времени, что и движение но прямому пути.

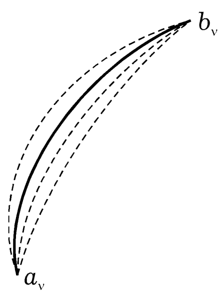

Рис. 164

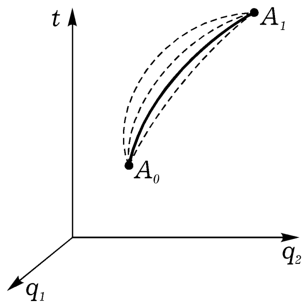

Рис. 165

Для голономной системы прямые и окольные пути удобно представлять в расширенном координатном пространстве, где координатами являются обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и время t. Пусть точка A_0 этого пространства отвечает начальному положению системы, а A_1 — ее конечному положению. Движениям системы из ее начального положения в конечное будут отвечать кривые, соединяющие точки A_0 и A_1. На рис. 165 (для $n = 2$) сплошной линией показан прямой путь системы, а штриховыми линиями — окольные пути. В расширенном координатном пространстве за окольный путь может быть принята любая бесконечно близкая к прямому пути кривая, соединяющая точки A_0 и A_1; любая такая кривая представляет собой кинематически возможный путь, так как обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_n$ всегда выбираются именно так, что геометрические связи, наложенные на систему, удовлетворяются тождественно (п. 14), а других связей у голономной системы нет.

Отметим, что задача о построении прямого пути, соединяющего начальную и конечную точки A_0 и A_1, не является простой. Она приводит к рассмотрению краевой задачи для системы дифференциальных уравнений порядка $2n$, описывающей движение изучаемой механической системы. Если точка A_0 соответствует значениям обобщенных координат $q_1^0, q_2^0, \ldots, q_n^0$, а точка A_1 — значениям $q_1^1, q_2^1, \ldots, q_n^1$, то решение $q_i(t)$ дифференциальных уравнений движения должно удовлетворять краевым условиям

$$q_i(t_0) = q_i^0, \quad q_i(t_1) = q_i^1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Краевая задача может иметь единственное решение, а может не иметь ни одного решения; она может иметь несколько или даже бесконечное множество решений.

Если точки A_0 и A_1 достаточно близки, то решение упомянутой задачи либо единственно, либо она имеет только конечное число решений. Для наших целей второй случай сводится к первому в том смысле, что среди конечного числа прямых путей можно взять какой-то один и рассмотреть его окрестность, достаточно малую, чтобы она не содержала точек других прямых путей, отвечающих значениям t из интервала $t_0 < t < t_1$. Окольные пути затем следует проводить именно в этой малой окрестности выбранного прямого пути.

При достаточном удалении точки A_1 от точки A_0 может оказаться, что краевая задача имеет решения, соответствующие бесконечно близким прямым путям, проходимым механической системой за одно и то же время $t_1 - t_0$. В этом случае точки A_0 и A_1 расширенного координатного пространства называют *сопряженными кинетическими фокусами.*

Рассмотрим, например, одномерный гармонический осциллятор, движение которого описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{q} + q = 0.$$

Через точки $(0, 0)$ и $(0, \pi)$ расширенного координатного пространства q, t проходят бесконечно близкие один к другому прямые пути, задаваемые равенством

$$q = c \sin t,$$

где c — произвольная постоянная. Точки $(0, 0)$ и $(0, \pi)$ — сопряженные кинетические фокусы. Напротив, через точки $(0, 0)$ и (q^1, t_1) при $q^1 > 0$, $t_1 < \pi$ можно провести только один прямой путь.

Мы будем рассматривать не вполне произвольные окольные пути, а те из них, которые получаются из прямого пути при помощи синхронного варьирования.

Пусть g_ν — положение, которое занимает в момент времени t точка P_ν системы при ее движении по прямому пути γ_ν, соединяющему начальное и конечное положения a_ν и b_ν этой точки (рис. 166). В момент времени t дадим точке P_ν произвольное виртуальное перемещение $\delta \boldsymbol{r}_\nu$ из ее положения g_ν. Тогда точка P_ν займет положение g'_ν. Если эту процедуру проделать для всех положений g_ν точки P_ν на кривой γ_ν при $t_0 < t < t_1$ и через получающиеся при варьировании точки g'_ν провести кривую, соединяющую положения a_ν и b_ν, то эта кривая и будет окольным путем. Соответствующие одна другой точки g_ν и g'_ν на прямом и окольном путях проходятся в одни и те же моменты времени. В декартовых координатах положение точки P_ν на прямом пути задается радиусом-вектором $\boldsymbol{r}_\nu(t)$, а на окольном — радиусом-вектором $\boldsymbol{r}_\nu(t)+\delta\boldsymbol{r}_\nu(t)$, где вектор-функции $\delta\boldsymbol{r}_\nu(t)$ удовлетворяют условию $\delta\mathbf{r}_\nu(t_0) = 0$, $\delta\boldsymbol{r}_\nu(t_1) = 0$, $(\nu = 1, 2, \ldots, N)$. Кроме того, будем предполагать, что $\delta\boldsymbol{r}_\nu(t)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция.

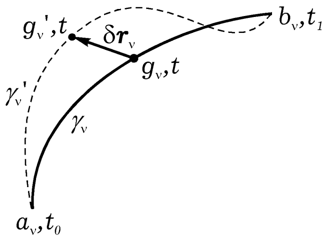

Рис. 166

Нам потребуется сравнить между собой не только прямой и окольный пути, но и скорости $\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$ точек P_ν на прямом пути с соответствующими их скоростями $\dot{\boldsymbol{r}}_\nu + \delta\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$ на окольном пути для одного и того же момента времени. Покажем, что операции синхронного варьирования и дифференцирования по времени перестановочны, т. е.

$$\delta\dot{\boldsymbol{r}}_\nu = \frac{d}{dt}\delta\boldsymbol{r}_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N). \tag{1}$$

В самом деле, по определению скорости, на окольном пути имеем

$$\dot{\boldsymbol{r}}_\nu + \delta\dot{\boldsymbol{r}}_\nu = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_\nu + \delta\boldsymbol{r}_\nu) = \dot{\boldsymbol{r}}_\nu + \frac{d}{dt}\delta\boldsymbol{r}_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N),$$

откуда и следует равенство (1). Аналогично, если в расширенном координатном пространстве прямой путь задается уравнениями

$$q_i = q_i(t),\ q_i(t_0) = q_i^0,\ q_i(t_1) = q_i^1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

то окольные пути получаются из прямого при помощи виртуальных перемещений $\delta q_i(t)$ и задаются уравнениями

$$q_i = q_i(t) + \delta q_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

где

$$\delta q_i(t_0) = 0, \quad \delta q_i(t_1) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Величины $\delta q_i(t)$ предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями t. Они удовлетворяют равенствам, аналогичным (1):

$$\delta\dot{q}_i = \frac{d}{dt}\delta q_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

218. Принцип Гамильтона–Остроградского. Итак, рассмотрим прямой путь голономной системы и совокупность окольных путей, получающихся из прямого пути при помощи синхронного варьирования и совпадающих с ним в начальный и конечный моменты времени t_0 и t_1.

Пусть m_ν — масса точки P_ν, а $\boldsymbol{F}_\nu$ — равнодействующая всех активных сил, приложенных к этой точке. Интегрирование общего уравнения динамики

$$\sum_{\nu=1}^{N}(\boldsymbol{F}_\nu - m_\nu \boldsymbol{w}_\nu)\cdot\delta\boldsymbol{r}_\nu = 0 \qquad (6)$$

дает равенство

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{F}_\nu\cdot\delta\boldsymbol{r}_\nu\,dt - \sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{w}_\nu\cdot\delta\boldsymbol{r}_\nu\,dt = 0. \qquad (7)$$

Рассмотрим разность между значениями кинетической энергии системы в момент времени t на окольном и прямом путях

$$\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu(\dot{\boldsymbol{r}}_\nu + \delta\dot{\boldsymbol{r}}_\nu)^2 - \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\dot{\boldsymbol{r}}_\nu^2.$$

С точностью до величин первого порядка малости включительно относительно $|\delta\boldsymbol{r}_\nu|$ для этой разности получаем выражение

$$\delta T = \sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\dot{\boldsymbol{r}}_\nu\cdot\delta\dot{\boldsymbol{r}}_\nu.$$

Отсюда

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta T\,dt = \sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\int_{t_0}^{t_1}\dot{\boldsymbol{r}}_\nu\cdot\delta\dot{\boldsymbol{r}}_\nu\,dt. \qquad (8)$$

Используя равенство (1) и производя интегрирование по частям, преобразуем это соотношение к виду

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta T\,dt = \sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\int_{t_0}^{t_1}\dot{\boldsymbol{r}}_\nu\cdot d\delta\boldsymbol{r}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\dot{\boldsymbol{r}}_\nu\cdot\delta\boldsymbol{r}_\nu\Big|_{t_0}^{t_1} - \sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{w}_\nu\cdot\delta\boldsymbol{r}_\nu\,dt.$$

Но так как $\delta\boldsymbol{r}_\nu(t_0) = \delta\boldsymbol{r}_\nu(t_1) = 0$, то окончательно имеем

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta T\,dt = -\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{w}_\nu\cdot\delta\boldsymbol{r}_\nu\,dt. \qquad (9)$$

Это соотношение позволяет переписать равенство (7) в следующем окончательном виде:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\delta T + \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu \right) dt = 0. \tag{10}$$

Равенство (10) является математическим выражением принципа Гамильтона–Остроградского, который заключается в том, что *интеграл* (10) ***равен нулю, если величины*** $\delta\boldsymbol{r}_\nu(t)$ ***соответствуют синхронному варьированию прямого пути и*** $\delta\boldsymbol{r}_\nu(t_0) = \delta\boldsymbol{r}_\nu(t_1) = 0$.

Таким образом, на прямом пути голономной системы интеграл (10) равен нулю. Покажем, что, наоборот, если на каком-то кинематически возможном пути интеграл (10) равен нулю, то этот путь — прямой. Для этого достаточно убедиться в том, что из принципа Гамильтона–Остроградского (10) вытекают уравнения Лагранжа второго рода.

Замечая, что

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu = \sum_{i=1}^{N} Q_i \delta q_i,$$

где Q_i — обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q_i, и что

$$\delta T = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right),$$

перепишем равенство (10) в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i \right) \delta q_i \right] dt = 0. \tag{11}$$

Используя соотношения (5), интегрируя по частям и учитывая, что $\delta q_i(t_0) = \delta q_i(t_1) = 0$, имеем

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} d\delta q_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i dt = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i dt.$$

Поэтому равенство (11) переходит в следующее:

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i \right) \delta q_i \, dt = 0. \tag{12}$$

Величины δq_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ независимы и произвольны. Используя это, покажем, что каждое из выражений в круглых скобках в формуле (12) равно нулю. Для этого положим, что $\delta q_1 = \dots = \delta q_{k-1} = \delta q_{k+1} = \dots = \delta q_n = 0$, а $\delta q_k \neq 0$. Тогда равенство (12) сводится к равенству

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right) \delta q_k \, dt = 0. \tag{13}$$

Пусть[1] выражение в круглых скобках в формуле (13) не равно нулю при $t = t_*$ из интервала $t_0 < t < t_1$. Тогда в силу непрерывности существует окрестность $-\varepsilon + t_* < t < t_* + \varepsilon$, лежащая в интервале $t_0 < t < t_1$, в которой круглая скобка из (13) сохраняет знак. Произвольную функцию $\delta q_k(t)$ выберем так, чтобы она вне окрестности $-\varepsilon + t_* < t < t_* + \varepsilon$ была равна нулю, а в самой этой окрестности сохраняла знак. Тогда равенство (13) перепишется в виде

$$\int_{t_*-\varepsilon}^{t_*+\varepsilon} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right) \delta q_k dt = 0.$$

Но так как при упомянутом выборе функции $\delta q_k(t)$ подынтегральное выражение сохраняет знак в окрестности $-\varepsilon + t_* < t < t_* + \varepsilon$, то последнее равенство невозможно. Отсюда следует, что при всех t из интервала $t_0 < t < t_1$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k.$$

Проведенные рассуждения справедливы для любого k $(k = 1, 2, \dots, n)$. Поэтому из принципа Гамильтона — Остроградского следуют уравнения Лагранжа второго рода. Следовательно, этот принцип может быть положен в основу динамики голономных систем.

219. Принцип Гамильтона–Остроградского для систем в потенциальном поле сил. В потенциальном поле сил

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu = -\delta \Pi, \tag{14}$$

[1] Приводимое далее доказательство обращения в нуль выражения в круглых скобках формулы (13) является стандартным. Оно лежит в основе доказательства так называемой *основной леммы вариационного исчисления* (см. лемму 1 в §3 учебника: Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление, М. : Физматгиз, 1961).

где $\Pi = \Pi(q_1, \ldots, q_n, t)$ — потенциальная энергия системы. Тогда формула (10) дает

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T - \delta \Pi)\, dt = 0.$$

Так как функция Лагранжа имеет вид $L = T - \Pi$, то отсюда следует, что

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L\, dt = 0. \tag{15}$$

Рассмотрим интеграл

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L\, dt. \tag{16}$$

Этот интеграл называется *действием по Гамильтону.* Так как L — функция q_i, $\dot{q}_i$, t, то для вычисления величины S нужно задать функции $q_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ в промежутке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, т. е. действие S является функционалом, зависящим от движения системы.

Используя обозначение (16) и учитывая неизменность t_0 и t_1 при переходе от прямого пути к окольному и от окольного пути к другому окольному, перепишем равенство (15) в виде

$$\delta S = 0. \tag{17}$$

Это равенство выражает принцип Гамильтона–Остроградского для голономной системы в случае существования потенциала сил: *среди всех* (*сравниваемых*) *путей прямой путь выделяется тем, что для него действие по Гамильтону имеет стационарное значение* (*т. е. первая вариация δS на прямом пути равна нулю*).

Будет ли действие принимать экстремальное значение на прямом пути, т. е. будет ли значение интеграла (16), вычисленное на прямом пути, наименьшим или наибольшим по сравнению с его значениями на окольных путях? Ответ на этот вопрос будет получен в следующем пункте, а сейчас рассмотрим пример, показывающий, что в некоторых случаях действие по Гамильтону на прямом пути имеет меньшее значение, нежели на окольном.

Пример 1 (Движение материальной точки в однородном поле тяжести[1]). *Пусть материальная точка массой m брошена под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0. Пусть движение происходит в плоскости Oxz. Траекторией точки будет парабола*

$$z = v_0 \sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2, \qquad x = v_0 \cos\alpha t. \tag{18}$$

В момент времени

$$t_1 = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}, \tag{19}$$

где g — ускорение свободного падения, материальная точка пересечет ось Ox в точке B (рис. 167), *причем пройденное ею расстояние вдоль оси Ox*

$$OB = \frac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g}. \tag{20}$$

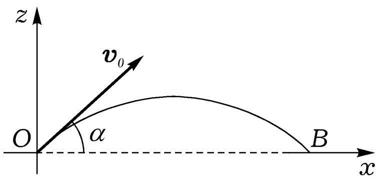

Рис. 167

Таким образом, в рассматриваемом примере на прямом пути точка описывает в плоскости Oxz параболу за время t_1.

Это движение будем сравнивать с прямолинейным равномерным движением точки из положения O в положение B. Окольный путь будет отрезком OB оси Ox. Так как в принципе Гамильтона–Остроградского время движения из начального положения системы в ее конечное положение для прямого и окольного путей должно быть одинаковым, то в рассматриваемом равномерном прямолинейном движении скорость v должна быть равна $v_0 \cos\alpha$.

Для обоих движений

$$\Pi = mgz. \tag{21}$$

Для параболического движения

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) - mgz = \frac{1}{2}m(v_0^2 - 4v_0 \sin\alpha gt + 2g^2t^2),$$

для прямолинейного движения

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \cos^2\alpha.$$

[1]См.: Слудский Ф. А. Заметка о начале наименьшего действия // Вариационные принципы механики/Под ред. Л. С. Полака, М.; Физматгиз, 1959. С. 388–391.

Для параболического движения

$$S = \int\limits_0^{t_1} L\,dt = \frac{mv_0^3 \sin\alpha}{g}\left(1 - \frac{4}{3}\sin^2\alpha\right), \tag{22}$$

а для движения по прямой

$$S = \frac{mv_0^3 \sin\alpha}{g}(1 - \sin^2\alpha). \tag{23}$$

При любом α (в том числе и при достаточно малых α, когда прямой и окольные пути могут быть сколь угодно близкими) величина (22) меньше величины (23), т. е. действие по Гамильтону на прямом пути меньше, чем на окольном.

220. Экстремальное свойство действия по Гамильтону. Рассмотрим окрестность начального положения системы, достаточно малую, чтобы в ней отсутствовали сопряженные кинетические фокусы. Тогда можно считать (п. 217), что за заданное время $t_1 - t_0$ система может перейти из своего начального положения в конечное положение, расположенное в выбранной окрестности, только по одному прямому пути. Покажем, что в этом случае действие по Гамильтону на прямом пути будет наименьшим по сравнению с его значениями на окольных путях системы.

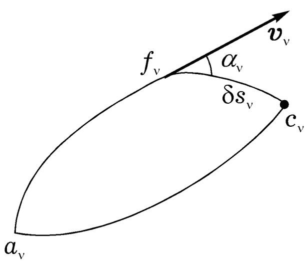

Рис. 168

Для доказательства воспользуемся геометрическим методом Жуковского[1]. Траектории точек P_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, N$) системы будем рассматривать в трехмерном евклидовом пространстве. Пусть a_ν — начальное положение точки P_ν, а f_ν и c_ν — ее положения на каких-либо двух различных кинематически возможных путях, по которым система за одно и то же время $t - t_0$ переходит из начального положения в положение, отвечающее моменту времени t (рис. 168). При этом $t_0 < t < t_1$, а промежуток времени $t - t_0$, вообще говоря, мал, чтобы за время $t - t_0$ система не могла выйти из выбранной малой окрестности ее начального положения.

Пусть $[af]$ и $[ac]$ — действия по Гамильтону на этих путях системы,

[1]См.: Жуковский Н. Е. О начале наименьшего действия // Собр. соч. Т. 1. М.; Л.: Гостехизат,1948. С. 51–57.

т. е.

$$[af] = \int_{t_0}^{t} (T - \Pi)\, dt, \quad [ac] = \int_{t_0}^{t} (T - \Pi)\, dt, \tag{24}$$

причем первый и второй интегралы вычисляются на путях, по которым точки P_ν переходят из положений a_ν в положения f_ν и c_ν соответственно. Для разности $[ac] - [af]$ с точностью до величин первого порядка включительно относительно $|\delta \boldsymbol{r}_\nu|$ и $|\delta \dot{\boldsymbol{r}}_\nu|$ имеем выражение

$$[ac] - [af] = \int_{t_0}^{t} \sum_{\nu=1}^{N} \left(m_\nu \boldsymbol{v}_\nu \cdot \delta \dot{\boldsymbol{r}}_\nu - \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu \right) dt,$$

где $\boldsymbol{v}_\nu$ и $\partial \Pi / \partial \boldsymbol{r}_\nu$ вычисляются на пути $a_\nu f_\nu$. Учитывая, что $\boldsymbol{F}_\nu = -\partial \Pi / \partial \boldsymbol{r}_\nu$, интегрируя по частям и пользуясь тем, что $\delta \boldsymbol{r}_\nu(t_0) = 0$, имеем

$$[ac] - [af] = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu(t) \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu(t) + \int_{t_0}^{t} \sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{F}_\nu - m_\nu \boldsymbol{w}_\nu) \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu \, dt.$$

Учитывая общее уравнение динамики (6), это соотношение можно переписать окончательно в таком виде:

$$[ac] - [af] = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_\nu \cos \alpha_\nu \delta s_\nu. \tag{25}$$

Здесь $\boldsymbol{v}_\nu$ — скорость точки P_ν в момент времени t, когда она занимает положение f_ν, α_ν — угол между $\boldsymbol{v}_\nu$ и $\delta \boldsymbol{r}_\nu$, а δs_ν — длина дуги $f_\nu c_\nu$.

Пусть b_ν — положение точки P_ν, в конечный момент времени t_1 движения системы, а γ_ν и γ'_ν — кривые, по которым перемещается точка P_ν при движении системы соответственно по прямому и любому из окольных путей (рис. 169). Сравним действие по Гамильтону на прямом и окольном путях. Для этого возьмем на пути γ'_ν точку c_ν, отвечающую моменту времени t, где $t_0 < t < t_1$, а также бесконечно близкую ей точку e_ν, отвечающую моменту $t + dt$. Проведем траектории $a_\nu c_\nu$ для некоторого вспомогательного действительного движения точек P_ν, при котором они за время $t - t_0$ приходят из начальных положений a_ν в их положения c_ν, расположенные на кривой γ'_ν, отвечающей окольному пути. Аналогично, пусть кривые $a_\nu e_\nu$ будут траекториями еще одного вспомогательного движения, при котором точки P_ν за время $t + dt - t_0$ приходят из положений a_ν в положения e_ν на кривой γ'_ν. И вообще проведем траектории таких вспомогательных действительных движений для всех положений точек P_ν на кривой γ'_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, N$).

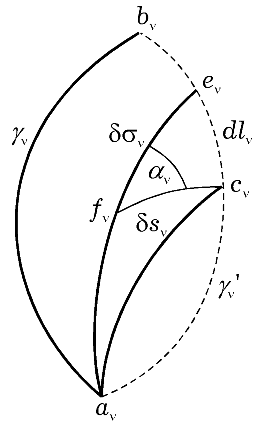

Рис. 169

Пусть f_ν — положение, которое занимает точка P_ν в момент времени t при ее движении по вспомогательной действительной траектории $a_\nu e_\nu$. Таким образом, дуги $a_\nu f_\nu$ и $a_\nu c_\nu$ двух вспомогательных действительных траекторий и дуга $a_\nu c_\nu$, являющаяся частью кривой γ_ν', отвечающей окольному пути, проходятся точкой P_ν за одно и то же время $t - t_0$. Поэтому дуга $f_\nu e_\nu$ на вспомогательной траектории и дуга $c_\nu e_\nu$ кривой γ_ν' проходятся также за одинаковое время, причем это время равно dt.

Обозначим длины дуг $f_\nu e_\nu$ и $c_\nu e_\nu$ соответственно $d\sigma_\nu$ и dl_ν. Из бесконечно малого треугольника $c_\nu f_\nu e_\nu$ (рис. 169) получим

$$dl_\nu^2 = d\sigma_\nu^2 + \delta s_\nu^2 - 2d\sigma_\nu \delta s_\nu \cos\alpha_\nu.$$

Умножим обе части этого равенства на m_ν и просуммируем по всем точкам системы. Замечая затем, что по предположению в рассматриваемой малой окрестности начального положения системы кинетических фокусов нет и, следовательно, среди величин δs_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, N$) хотя бы одна отлична от нуля, получаем неравенство

$$\sum_{\nu=1}^N m_\nu dl_\nu^2 > \sum_{\nu=1}^N m_\nu d\sigma_\nu^2 - 2\sum_{\nu=1}^N m_\nu d\sigma_\nu \cos\alpha_\nu \delta s_\nu. \tag{26}$$

Если T' — кинетическая энергия системы при ее движении по окольному пути, а T — кинетическая энергия системы при движении ее точек P_ν по дугам $f_\nu e_\nu$, отвечающим вспомогательному действительному движению, то

$$\sum_{\nu=1}^N m_\nu dl_\nu^2 = 2T'dt^2, \quad \sum_{\nu=1}^N m_\nu d\sigma_\nu^2 = 2Tdt^2. \tag{27}$$

Так как $d\sigma_\nu/dt = v_\nu$, то, используя формулы (27), неравенство (26) можно написать в виде

$$T'\,dt > T\,dt - \sum_{\nu=1}^N m_\nu v_\nu \cos\alpha_\nu \delta s_\nu. \tag{28}$$

Вычтем из обеих частей величину Πdt и воспользуемся равенством (25). Получим

$$(T' - \Pi)dt > (T - \Pi)dt + [af] - [ac]. \tag{29}$$

Так как

$$(T - \Pi)dt = [fe], \qquad [fe] + [af] - [ac] = [ae] - [ac],$$

то правая часть неравенства (29) равна дифференциалу dS действия по Гамильтону при переходе от одной действительной траектории к другой, когда время движения увеличивается на dt. Поэтому

$$(T' - \Pi)dt > dS. \tag{30}$$

Интегрируя это неравенство от $t = t_0$ до $t = t_1$ и вводя обозначения $S_{\text{пр}}$ и $S_{\text{ок}}$ для действия по Гамильтону на прямом и окольном путях системы, получим

$$S_{\text{ок}} > S_{\text{пр}}. \tag{31}$$

Таким образом показано, что *если начальное и конечное положения системы достаточно близки, то действие по Гамильтону на прямом пути имеет минимальное значение по сравнению с его значениями на окольных путях, проходимых за то же время*[1].

Пусть точки A_0 и A_1 расширенного координатного пространства отвечают начальному и конечному положениям системы (рис. 165). Если точки A_0 и A_1 достаточно близки, то действие S на прямом пути имеет минимум. Выясним, насколько близкими должны быть точки A_0 и A_1, чтобы на прямом пути действие оставалось минимальным[2]. На прямом пути A_0A_1 первая вариация δS действия по Гамильтону всегда равна нулю. Если точка A_1 близка к точке A_0, то в силу минимальности действия вторая вариация $\delta^2 S$ на прямом пути положительна[3]. Будем удалять точку A_1 от точки A_0.

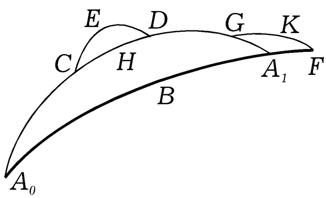

Рис. 170

Пусть t_1^* — то значение t_1, при котором вариация $\delta^2 S$, вычисленная на окольном пути A_0HA_1, в первый раз обращается в нуль (рис. 170). Следовательно, действия по Гамильтону на путях A_0HA_1 и A_0BA_1 равны с точностью до членов второго порядка включительно относительно величин $|\delta q_i|$, $|\delta \dot{q}_i|$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$:

$$S_{A_0HA_1} = S_{A_0BA_1}. \tag{32}$$

[1] По этой причине принцип Гамильтона–Остроградского часто называют *принципом наименьшего действия.*

[2] См. шестую лекцию в книге: Якоби К. Лекции по динамике. М.;Л.: ОНТИ, 1936, а также гл. 12 книги: Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1960.

[3] Мы не рассматриваем те исключительные случаи, когда вопрос об экстремальности S решается с привлечением вариаций более высокого порядка.

Покажем, что на самом деле A_0HA_1 — прямой путь, т. е. A_0 и A_1 — сопряженные кинетические фокусы. Предположим, что это не так, т. е. что путь A_0HA_1 не является прямым. Тогда возьмем на нем точки C и D и соединим их прямым путем CED. По доказанному выше для достаточно близких точек C и D

$$S_{CED} < S_{CHD}. \tag{33}$$

Отсюда и из (32) следует, что

$$S_{A_0CEDA_1} < S_{A_0CHDA_1} = S_{A_0BA_1}. \tag{34}$$

Это неравенство противоречит предположению о том, что A_1 есть первое положение на прямом пути A_0BA_1, при котором вторая вариация $\delta^2 S$ обращается в нуль при надлежащем выборе окольного пути, проходящего через A_0 и A_1.

Проведенное рассуждение показывает, что *если конечная точка A_1 лежит перед кинетическим фокусом, сопряженным с начальной точкой A_0, то действие по Гамильтону на прямом пути A_0A_1 имеет минимум.*

Пусть теперь A_1 — сопряженный кинетический фокус для точки A_0, а конечная точка прямого пути F лежит за точкой A_1 (рис. 170). Здесь уже действие на прямом пути A_0BA_1F не будет минимальным. Для доказательства укажем такой окольный путь, на котором действие по Гамильтону меньше, чем на пути A_0BA_1F. Для этого на ранее построенном прямом пути A_0HA_1 возьмем точку G, настолько близкую к F, чтобы действие на соединяющем эти точки прямом пути GKF было минимальным. Тогда

$$S_{GKF} < S_{GA_1} + S_{A_1F}. \tag{35}$$

Отсюда и из (32) получаем

$$\begin{aligned} S_{A_0HGKF} &= S_{A_0HG} + S_{GKF} < S_{A_0HG} + S_{GA_1} + S_{A_1F} = \\ &= S_{A_0HA_1} + S_{A_1F} = S_{A_0BA_1} + S_{A_1F} = S_{A_0BA_1F}, \end{aligned}$$

т. е. действие на построенном окольном пути меньше, чем на прямом. Поэтому действие на прямом пути не имеет минимума. Оно не может иметь и максимума, так как на малых участках прямого пути A_0BA_1F действие минимально. Таким образом, если фокус, сопряженный с начальной точкой, лежит перед конечной точкой прямого пути, то действие по Гамильтону не имеет на прямом пути ни минимума, ни максимума.

Пример 1 (Движение материальной точки по инерции на сфере). *Пусть точка движется, оставаясь все время на неподвижной сфере и никакие активные силы на точку не действуют. Если m — масса точки, а R — радиус сферы, то в сферических координатах* (рис. 134)

$$T = \frac{1}{2}mR^2(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\dot\varphi^2), \qquad \Pi = 0.$$

На прямом пути выполняются уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\theta} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = \text{ const}$$

(φ *— циклическая координата). Так как $L = T - \Pi = T$, то отсюда следует, что*

$$\ddot\theta - \sin\theta\cos\theta\dot\varphi^2 = 0, \quad \sin^2\theta\dot\varphi = \sin^2\theta_0\dot\varphi_0. \tag{36}$$

Без ограничения общности можно считать, что на прямом пути вектор $\boldsymbol{v}$ начальной скорости точки направлен по меридиану ($\varphi = \text{const}$), *т. е. $\dot\varphi_0 = 0$. Тогда из* (36) *следует, что во все время движения*

$$\dot\varphi = 0, \qquad \dot\theta = \text{ const}$$

и, следовательно, $v^2 = R^2\dot\theta^2 = \text{ const}$. Это означает, что прямой путь представляет собой дугу большого круга, по которой точка движется с постоянной скоростью $v = v_{\text{пр}}$. При этом

$$L = \frac{1}{2}mv^2$$

и

$$S_{\text{пр}} = \int\limits_{t_0}^{t_1} L\,dt = \frac{mv_{\text{пр}}^2}{2}(t_1 - t_0) = \frac{ml_{\text{пр}}^2}{2(t_1 - t_0)}, \tag{37}$$

где $l_{\text{пр}}$ — длина дуги, пройденной точкой на прямом пути за время $t_1 - t_0$.

Кинетическим фокусом, сопряженным с произвольной начальной точкой A, является диаметрально противоположная точка A^* на сфере, так как два больших круга, проходящих через A, пересекаются только в A^*.

Пусть скорость движения по окольному пути, соединяющему две точки A и B, постоянна и равна $v_{\text{ок}}$. Тогда

$$S_{\text{ок}} = \frac{ml_{\text{ок}}^2}{2(t_1 - t_0)}. \tag{38}$$

Из (37), (38) *и рассмотренного выше экстремального свойства действия по Гамильтону следует, что проходящая через A и B дуга большого круга является кратчайшей среди кривых, соединяющих A и B, если точка A^* не лежит на этой дуге, т. е. если дуга меньше половины окружности большого круга.*

Упражнение 1. *В примере п. 217 построить окольный путь, на котором действие по Гамильтону меньше, чем на прямом пути.*

§ 2. Принцип Мопертюи–Лагранжа

221. Изоэнергетическое варьирование. Рассмотрим голономную консервативную или обобщенно консервативную систему. Ее функция Гамильтона не зависит от времени, и существует обобщенный интеграл энергии

$$H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) = h. \tag{1}$$

Движение системы будем представлять в n-мерном координатном пространстве $q_1, \ldots, q_n$ [1]. Пусть A_0 и A_1 — точки этого пространства, задаваемые соответственно координатами q_i^0 и q_i^1 $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Пусть в начальный момент времени $t = t_0$ система занимает положение, отвечающее точке A_0, и обобщенные скорости $\dot{q}_i$ (а, следовательно, и обобщенные импульсы p_i) могут быть выбраны так, что при $t = t_1$ система займет положение, отвечающее точке A_1. Проходящую через точки A_0 и A_1 кривую

$$q_i = q_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

вдоль которой удовлетворяются дифференциальные уравнения движения, назовем *прямым путем системы* (см. рис. 171, где $n = 3$). На прямом пути функция Гамильтона постоянна и равна h, где величина h определяется начальными условиями.

Наряду с прямым путем рассмотрим другие кинематически возможные пути, бесконечно близкие к прямому. Эти пути будем называть *окольными путями*, если они: 1) проходят через одни и те же начальные и конечные положения A_0 и A_1; 2) вдоль каждого окольного пути функция Гамильтона постоянна и равна величине h, отвечающей прямому пути.

[1] А не в расширенном $(n+1)$-мерном координатном пространстве, как это было при изучении принципа Гамильтона–Остроградского в предыдущем параграфе.