Из (37), (38) *и рассмотренного выше экстремального свойства действия по Гамильтону следует, что проходящая через A и B дуга большого круга является кратчайшей среди кривых, соединяющих A и B, если точка A^* не лежит на этой дуге, т. е. если дуга меньше половины окружности большого круга.*

Упражнение 1. *В примере п. 217 построить окольный путь, на котором действие по Гамильтону меньше, чем на прямом пути.*

§ 2. Принцип Мопертюи–Лагранжа

221. Изоэнергетическое варьирование. Рассмотрим голономную консервативную или обобщенно консервативную систему. Ее функция Гамильтона не зависит от времени, и существует обобщенный интеграл энергии

$$H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) = h. \tag{1}$$

Движение системы будем представлять в n-мерном координатном пространстве $q_1, \ldots, q_n$ [1]. Пусть A_0 и A_1 — точки этого пространства, задаваемые соответственно координатами q_i^0 и q_i^1 $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Пусть в начальный момент времени $t = t_0$ система занимает положение, отвечающее точке A_0, и обобщенные скорости $\dot{q}_i$ (а, следовательно, и обобщенные импульсы p_i) могут быть выбраны так, что при $t = t_1$ система займет положение, отвечающее точке A_1. Проходящую через точки A_0 и A_1 кривую

$$q_i = q_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

вдоль которой удовлетворяются дифференциальные уравнения движения, назовем *прямым путем системы* (см. рис. 171, где $n = 3$). На прямом пути функция Гамильтона постоянна и равна h, где величина h определяется начальными условиями.

Наряду с прямым путем рассмотрим другие кинематически возможные пути, бесконечно близкие к прямому. Эти пути будем называть *окольными путями*, если они: 1) проходят через одни и те же начальные и конечные положения A_0 и A_1; 2) вдоль каждого окольного пути функция Гамильтона постоянна и равна величине h, отвечающей прямому пути.

[1] А не в расширенном $(n+1)$-мерном координатном пространстве, как это было при изучении принципа Гамильтона–Остроградского в предыдущем параграфе.

При таком изоэнергетическом варьировании время $t_1 - t_0$ перехода системы из начального положения в конечное не обязательно одинаково для прямого и окольных путей. Пусть, например, материальная точка массой m движется в отсутствие сил в плоскости Oxy. За движение по прямому пути примем прямолинейное движение вдоль оси Ox. В начальный момент времени $t = 0$ точка находится в начале координат O. Тогда на прямом пути $x = \sqrt{\frac{2h}{m}}t$. Из интеграла энергии $\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = h$ следует, что на окольном пути выполняется неравенство $\dot{x} \leqslant \sqrt{\frac{2h}{m}}$. Следовательно, по окольному пути невозможно прийти за одинаковое время t_1 в то же положение, что и на прямом пути, если постоянная h одинакова для прямого и окольного путей.

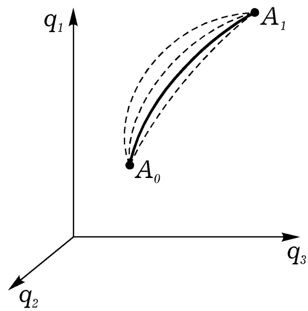

Рис. 171

Рассматриваемый в этом параграфе принцип Мопертюи–Лагранжа дает критерий, позволяющий выделить прямой путь среди всех окольных, удовлетворяющих упомянутым выше свойствам 1 и 2.

222. Принцип Мопертюи–Лагранжа. При заданной константе энергии h уравнения движения консервативной или обобщенно консервативной системы могут быть записаны в форме уравнений Якоби (см. уравнения (36) п. 152). Эти уравнения имеют форму уравнений Лагранжа второго рода, где в качестве функции Лагранжа L выступает функция Якоби P, а роль независимой переменной играет обобщенная координата q_1. По аналогии с действием S по Гамильтону введем[1] *действие по Лагранжу*:

$$W = \int\limits_{q_1^0}^{q_1^1} P\,dq_1. \tag{3}$$

В предыдущем параграфе показано, что уравнения Лагранжа второго рода эквивалентны принципу Гамильтона–Остроградского, выражающемуся в стационарности действия по Гамильтону на прямом пути системы (см. равенство (17) п. 219). Аналогично, уравнения Якоби эк-

[1] См. §20 книги: Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966.

вивалентны условию стационарности действия по Лагранжу

$$\delta W = 0. \tag{4}$$

Равенство (4) выражает принцип Мопертюи–Лагранжа, заключающийся в том, что *среди всех кинематически возможных путей, удовлетворяющих условиям, описанным в предыдущем пункте, прямой путь выделяется тем, что для него действие по Лагранжу имеет стационарное значение.*

Вопрос об экстремальных свойствах действия по Лагранжу решается точно так же, как и для принципа Гамильтона–Остроградского при помощи рассмотрения сопряженных кинетических фокусов.

Отметим, что в интеграле (3) полностью исключено время, и принцип (4) содержит только геометрические элементы. В такой форме принцип Мопертюи–Лагранжа впервые был представлен Якоби. Поэтому приведенную выше формулировку принципа Мопертюи–Лагранжа часто называют *принципом наименьшего действия Якоби.*

Пусть система консервативна. Тогда функция Якоби P вычисляется по формуле (38) п. 152 и действие по Лагранжу может быть преобразовано к виду

$$W = \int\limits_{q_1^0}^{q_1^1} \frac{2T}{\dot{q}_1} dq_1 = \int\limits_{t_0}^{t_1} 2T\, dt. \tag{5}$$

При применении принципа Мопертюи–Лагранжа в форме (4), (5) следует помнить, что в (5) время t_1 не фиксируется, а может изменяться при переходе от прямого пути к окольному и от одного окольного пути к другому окольному. Кроме того, полная энергия $T + \Pi$ одна и та же на всех сравниваемых путях.

Выражение (5) для действия по Лагранжу можно записать иначе:

$$W = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_\nu^2\, dt = \sum_{\nu=1}^{N} \int\limits_{s_\nu^0}^{s_\nu^1} m_\nu v_\nu\, ds_\nu, \tag{6}$$

т. е. *для консервативной системы действие по Лагранжу равно сумме работ количеств движения точек системы на соответствующих их перемещениях.*

Пример 1 (Движение материальной точки по инерции на гладкой поверхности[1]). *Пусть материальная точка массой m движется по гладкой неподвижной поверхности под влиянием начального толчка в*

[1]См. упомянутую книгу К. Якоби «Лекции по динамике».

отсутствие поля сил ($\Pi = 0$)*. Тогда* $v = v_0 =$ const *и из* (6) *получаем, что*

$$W = mv_0 l,$$

где l *— пройденный точкой путь. Из принципа Якоби следует, что* $\delta l = 0$*, т. е. движение точки на поверхности происходит по геодезической кривой*[1]*.*

Если начальная и конечная точки A_0 *и* A_1 *близки одна к другой, то действие* W *минимально и геодезическая является кратчайшей кривой, лежащей на поверхности и соединяющей точки* A_0 *и* A_1*.*

Вопрос о минимальности действия решается в каждом конкретном случае при помощи привлечения кинетических фокусов. Если точка движется по развертывающейся поверхности (*т. е. по поверхности, которую после изгибания можно наложить на плоскость*)*, например по конусу или цилиндру, то действие* W *на прямом пути обязательно будет минимальным, так как на плоскости прямые, проходящие через одну и ту же точку, никогда вновь не пересекаются* (*и, следовательно, кинетические фокусы отсутствуют*)*.*

Пример 2 (Движение материальной точки в однородном поле тяжести[2]). *Эта задача была рассмотрена в п.* 219 *для иллюстрация принципа Гамильтона–Остроградского. Здесь мы ее применяем для иллюстрации принципа Мопертюи–Лагранжа, что поможет яснее представить разницу между этими принципами.*

Прямой путь представляет собой параболу, задаваемую уравнением (18) *п.* 219*. За окольный путь опять примем отрезок* OB*, лежащий на оси* Ox (рис. 167)*. Угол* α *считаем малым, так что прямой и окольный пути близки один к другому. Для обоих движений* $\Pi = mgz$*.*

Так как полная механическая энергия $T + \Pi$ *должна быть одинаковой для прямого и окольного путей, то начальные скорости точки для обоих движений одинаковы и равны* v_0*. Но если на прямом пути время* t_1 *движения точки определяется равенством* (19) *п.* 219*, то для окольного пути оно будет иным и вычисляется по формуле*

$$t_1 = \frac{OB}{v_0} = \frac{2v_0 \sin\alpha\cos\alpha}{g}. \tag{7}$$

Для параболического движения

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m(v_0^2 - 2v_0\sin\alpha g t + g^2t^2),$$

[1] *Геодезическая кривая* характеризуется тем, что ее длина имеет стационарное значение по сравнению с длинами других кривых, имеющих с геодезической одни и те же концы.

[2] См. упомянутую работу Ф. В. Слудского «Заметка о начале наименьшего действия».

а для прямолинейного движения

$$T = \frac{1}{2} m v_0^2.$$

Действие по Лагранжу для движения по параболе

$$W = 2\int\limits_0^{t_1} T\,dt = \frac{2mv_0^3 \sin\alpha}{g}\left(1 - \frac{2}{3}\sin^2\alpha\right), \tag{8}$$

а для движения по прямой

$$\begin{aligned} W &= \frac{2mv_0^3 \sin\alpha}{g}\cos\alpha = \frac{2mv_0^3 \sin\alpha}{g}\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \\ &= \frac{2mv_0^3 \sin\alpha}{g}\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2\alpha - \frac{1}{8}\sin^4\alpha - \ldots\right), \end{aligned} \tag{9}$$

где многоточием обозначены члены выше четвертой степени относительно $\sin\alpha$*.*

При достаточно малых значениях α *величина* (8) *меньше величины* (9)*, т. е. действие по Лагранжу на прямом пути меньше, чем на окольном.*

223. Принцип Якоби и геодезические линии в координатном пространстве. Рассмотрим консервативную систему с n степенями свободы. Ее кинетическая энергия — определенно положительная квадратичная форма обобщенных скоростей

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(q_1, \ldots, q_n)\,\dot q_i\,\dot q_k. \tag{10}$$

Пусть P и P' — две близкие точки координатного пространства $q_1, \ldots, q_n$, задаваемые наборами координат $q_1, \ldots, q_n$ и $q_1 + dq_1, \ldots, q_n + dq_n$. Введем в координатном пространстве метрику, определив квадрат расстояния ds^2 между точками P и P' при помощи удвоенной кинетической энергии

$$ds^2 = 2T\,dt^2 = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(q_1, \ldots, q_n)\,dq_i\,dq_k. \tag{11}$$

Отсюда следует, что

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2, \tag{12}$$

т. е. в метрике (11) кинетическая энергия системы равна кинетической энергии изображающей точки в координатном пространстве[1], если считать, что изображающая точка обладает массой, равной единице.

Пусть система движется по инерции, т. е. $\Pi = 0$. Из интеграла энергии $T + \Pi = h = \text{const}$ и формулы (12) тогда следует, что

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2h}, \tag{13}$$

т. е. в метрике (11) движению консервативной системы по инерции отвечает равномерное движение изображающей точки в координатном пространстве, причем скорость ее движения равна $\sqrt{2h}$.

Для этого движения действие по Лагранжу

$$W = 2\int_{t_0}^{t_1} T\,dt = 2h(t_1 - t_0) = \sqrt{2h}l, \tag{14}$$

где $l = \sqrt{2h}(t_1 - t_0)$ — длина кривой, пройденной изображающей точкой за время $t_1 - t_0$. Из принципа Якоби следует, что $\delta l = 0$, т. е. задача о нахождении траектории свелась к задаче дифференциальной геометрии о нахождении геодезической линии в координатном пространстве с метрикой (11).

Пусть теперь движение системы происходит в потенциальном поле ($\Pi \neq 0$). Тогда функция Якоби P может быть вычислена по формуле (40) п. 152. Поэтому

$$W = \int_{q_1^0}^{q_1^1} P\,dq_1 = 2\int_{q_1^0}^{q_1^1} \sqrt{(h-\Pi)G}dq_1 = \sqrt{2}\int_{q_1^0}^{q_1^1} \sqrt{(h-\Pi)\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\,dq_i\,dq_k}. \tag{15}$$

Область возможности движения в координатном пространстве определяется неравенством $\Pi \leqslant h$, которое получается из интеграла энергии $T+\Pi = h$ и определенной положительности кинетической энергии. При $\Pi \leqslant h$ вместо метрики (11) введем в координатном пространстве другую метрику, определив квадрат расстояния $d\sigma^2$ между двумя близкими точками P и P' по формуле

$$d\sigma^2 = (h-\Pi)\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\,dq_i\,dq_k. \tag{16}$$

[1] Которое теперь является n-мерным римановым пространством с линейным элементом ds, определенным по формуле (11).

На границе области возможности движения метрика (16) имеет особенность: чем ближе кривая к границе, тем меньше ее длина; в частности, длина любой кривой, лежащей на самой границе, равна нулю. Если $\Pi < h$, то метрика (16) не имеет особенностей. Из (15) получаем

$$W = \sqrt{2}\sigma,$$

где σ — длина дуги, пройденной изображающей точкой в координатном пространстве с метрикой (16). И нахождение траекторий снова свелось к нахождению геодезических линий в координатном пространстве (теперь в метрике (16)).