Глава XIV
Малые колебания консервативной системы около положения равновесия

§ 1. Теорема Лагранжа об устойчивости положения равновесия

224. Устойчивость равновесия. Рассмотрим голономную консервативную систему, положение которой задается обобщенными координатами $q_1, \ldots, q_n$ (n — число степеней свободы). Как показано в п. 63, некоторое положение системы тогда и только тогда является ее положением равновесия, когда в этом положении все обобщенные силы равны нулю:

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

где Π — потенциальная энергия системы, которая в случае консервативной системы явно от времени не зависит. Без ограничения общности будем считать, что в положении равновесия все обобщенные координаты равны нулю.

Если систему вывести из положения равновесия, сообщив ее точкам какие-то малые начальные отклонения от положений равновесия и малые начальные скорости, то в последующем движении точки системы либо все время остаются вблизи положений равновесия, либо удаляются от этих положений. В первом случае положение равновесия будет устойчивым, а во втором — неустойчивым.

Дадим строгое определение устойчивого положения равновесия. Положение равновесия $q_1 = q_2 = \ldots = 0$ называется *устойчивым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для всех $t > t_0$ выполняются неравенства

$$|q_i(t)| < \varepsilon, \quad |\dot{q}_i(t)| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

при условии, что в начальный момент $t = t_0$

$$|q_i(t_0)| < \delta, \quad |\dot{q}_i(t_0)| < \delta. \tag{3}$$

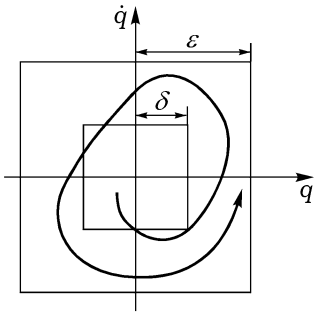

Рис. 172

Это определение удобно геометрически интерпретировать в $2n$-мерном пространстве состояний q_i, $\dot q_i$. На рис. 172 для случая $n = 1$ изображены две окрестности, задаваемые неравенствами (2) и (3). В случае устойчивости любое движение, начинающееся в момент $t = t_0$ внутри квадрата со стороной 2δ, будет происходить все время внутри квадрата со стороной 2ε.

Устойчивость положения равновесия можно исследовать, зная потенциальную энергию системы.

225. Теорема Лагранжа. Достаточные условия устойчивости положения равновесия консервативной системы дает теорема Лагранжа.

Теорема. ***Если в положении равновесия консервативной системы потенциальная энергия имеет строгий локальный минимум, то это положение равновесия устойчиво.***

Доказательство.

Как уже отмечалось, без ограничения общности можно считать, что в положении равновесия $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0$. В силу того что потенциальная энергия $\Pi(q_1, \ldots, q_n)$ определяется с точностью до произвольной аддитивной постоянной, примем, что $\Pi(0, \ldots, 0) = 0$. Так как в положении равновесия функция Π имеет строгий локальный минимум, то существует такое число $\eta > 0$, что в окрестности

$$|q_i| < \eta \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

выполняется строгое неравенство

$$\Pi(q_1, \ldots, q_n) > \Pi(0, \ldots, 0) = 0, \tag{5}$$

если хотя бы одна из величин q_i не равна нулю.

Будем предполагать также, что за обобщенные координаты $q_1, \ldots, q_n$ приняты такие независимые параметры, определяющие положение системы, что определитель (18) п. 139 (при $m = n$) отличен от нуля для всех q_i из окрестности (4), если η — достаточно малая величина. Тогда кинетическая энергия

$$T = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(q_1, \ldots, q_n)\, \dot q_i \dot q_k \tag{6}$$

является определленно положительной функцией обобщенных скоростей, и, следовательно, полная механическая энергия системы

$$E = T + \Pi \tag{7}$$

при выполнении неравенства (4) строго положительна, если только не все величины q_i, $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ равны нулю. А так как при $q_i = \dot{q}_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ имеем Е $= 0$, то функция Е в начале координат $2n$-мерного пространства состояний q_i, $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ имеет строгий локальный минимум, равный нулю.

Пусть ε — любое число, удовлетворяющее ограничениям $0 < \varepsilon < \eta$. Рассмотрим окрестность, задаваемую неравенствами (2). Граница этой окрестности является замкнутым множеством точек, и непрерывная функция E достигает на ней своей точной нижней грани a. Так как, кроме того, на границе окрестности (2) все значения E положительны, то на ней

$$E \geqslant a > 0.$$

В силу того что в начале координат $q_i = 0$, $\dot{q}_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ непрерывная функция E имеет строгий локальный минимум, равный нулю, можно найти такое δ $(0 < \delta \leqslant \varepsilon)$, что в окрестности

$$|q_i| < \delta, \quad |\dot{q}_i| < \delta \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{8}$$

будет выполняться неравенство

$$E < a. \tag{9}$$

Пусть теперь функции $q_i = q_i(t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям движения системы. Если начальные данные удовлетворяют неравенствам (3), то во все время движения выполняются неравенства (2). Действительно, при условии (3) начальная полная энергия $E_0 < a$, а так как при движении консервативной системы ее полная энергия постоянна, то при всех $t \geqslant t_0$ имеем $E < a$. Поэтому точка $q_i(t)$, $\dot{q}_i(t)$, изображающая движение системы в пространстве q_i, $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, не может достигнуть границы окрестности (2), на которой $E \geqslant a$, а поэтому всегда остается внутри этой окрестности. Теорема доказана.

Отметим, что приведенные выше доказательства следуют соображениям, содержащимся в первом строгом и полном доказательстве теоремы Лагранжа, предложенном Дирихле. Эти соображения послужили одним из основных источников для решения общей задачи об устойчивости движения[1].

[1] Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч. Т. 2. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 7–263.

Замечание 1. *Предположим, что изучаемая механическая система неконсервативна, но получается из консервативной добавлением гироскопических или диссипативных сил или тех и других вместе. Пусть им отвечают обобщенные силы $Q_i^*(q_j,\, \dot{q}_j)$. Тогда мощность непотенциальных сил*

$$N^* = \sum_{i=1}^{n} Q_i^*(q_j,\, \dot{q}_j)\dot{q}_i \leqslant 0. \tag{10}$$

Покажем, что обобщенные силы Q_i^*, удовлетворяющие условию (10), обращаются в нуль, когда все обобщенные скорости равны нулю. Действительно, пусть при каких-либо значениях $q_{i0}(i = 1, 2, \ldots, n)$ обобщенных координат хотя бы одна из обобщенных сил Q_k^* не равна нулю, т. е. $Q_k^*(q_{i0},\, 0) \neq 0$. Но тогда в силу непрерывности существовала бы окрестность точки $q_i = q_{i0}$, $\dot{q}_i = 0$, в которой функция $Q_k^*(q_j,\, \dot{q}_j)$ не была бы равной нулю и, следовательно, ее значения имели бы один и тот же знак. Но ввиду независимости величин q_i и $\dot{q}_i$ $(i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$ их значения в указанной окрестности можно выбрать так, что

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i^*(q_j,\, \dot{q}_j)\dot{q}_i > 0,$$

а это противоречит условию (10). Из сказанного, в частности, следует, что при наличии гироскопических и диссипативных сил положение равновесия сохранится.

Так как интеграл энергии $E = T + \Pi = \mathrm{const}$ существует и при гироскопических силах (в отсутствие диссипативных сил; см. п. 142), то приведенное выше доказательство теоремы Лагранжа остается без изменений и при наличии гироскопических сил. Если же существуют диссипативные силы (или диссипативные и гироскопические силы одновременно), то, согласно п. 142,

$$\frac{dE}{dt} = N^* \leqslant 0,$$

т. е. при движении системы ее полная энергия E не превосходит своего начального значения E_0. Но если $E_0 < a$, то во все время движения $E < a$ и опять при всех $t \geqslant t_0$ справедливы неравенства (2).

Таким образом, *при добавлении к консервативной системе гироскопических и диссипативных сил теорема Лагранжа остается справедливой.*

226. Теоремы Ляпунова о неустойчивости положения равновесия консервативной системы. Теорема Лагранжа дает достаточные условия устойчивости положения равновесия. Вопрос о том, будет ли неустойчивым положение равновесия консервативной системы, если в этом положении потенциальная энергия не имеет минимума, является очень сложным, и до сих пор на него не получено исчерпывающего ответа[1]. Первые строгие результаты в решении этого вопроса получены Ляпуновым. Дадим без доказательства две его теоремы[2]. Функцию $\Pi(q_1, \ldots, q_n)$ предполагаем аналитической в окрестности положения равновесия.

Теорема 1. *Если потенциальная энергия консервативной системы в положении равновесия не имеет минимума и это узнается уже по членам второго порядка в разложении функции* Π *в ряд в окрестности положения равновесия без необходимости рассматривания членов высших порядков, то положение равновесия неустойчиво.*

Теорема 2. *Если в положении равновесия потенциальная энергия имеет максимум и это узнается по членам наименее высокого порядка, которые действительно присутствуют в разложении этой функции в ряд в окрестности положения равновесия, то это положение равновесия неустойчиво*[3].

Пример 1 (Устойчивость равновесия тяжелого твердого тела на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости). *Пусть тело ограничено произвольной выпуклой поверхностью σ и общая нормаль (вертикаль) к горизонтальной плоскости и к поверхности σ в некоторой ее точке D^* содержит центр тяжести тела G. Тогда тело на плоскости может находиться в состоянии равновесия, причем в точке D^* поверхность тела соприкасается с плоскостью.*

Обозначим $Gxyz$ жестко связанную с телом систему координат, ось Gz которой содержит отрезок прямой D^*G, а оси Gx и Gy направлены параллельно линиям кривизны поверхности тела в точке D^*. Тогда уравнение поверхности тела в окрестности точки D^* запишется в виде

$$f \equiv -h - z + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{r_1} + \frac{y^2}{r_2}\right) + \cdots = 0. \tag{11}$$

---

[1] Обзор полученных результатов содержится в монографии: Карапетян А. В., Румянцев В. В. Устойчивость консервативных и диссипативпых систем. М.: ВИНИТИ, 1983. (Итоги науки и техники. Сер. Общая механика: Т. 6).

[2] Доказательство можно найти в работе: Ляпунов А. М. О неустойчивости равновесия в некоторых случаях, когда функция сил не есть максимум // Собр. соч. Т. 2. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 391–400.

[3] Для применимости теоремы 2 в конкретных задачах необходимо, чтобы разложение функции Π начиналось с однородной функции (формы) $\Pi_k(q_1, \ldots, q_n)$ четной степени k, а функция Π_k должна быть отрицательной в некоторой окрестности положения равновесия (исключая само эти положение).

Здесь x, y, z *— координаты точки* D *поверхности* σ, *которой тело касается плоскости при малом его отклонении от положения равновесия* (рис. 119), h *— расстояние центра тяжести тела от опорной горизонтальной плоскости в положении равновесия* ($x = y = 0$, $z = -h$), r_1 *и* r_2 *— главные радиусы кривизны поверхности тела в точке* D^*; *так как поверхность* σ *выпуклая и целиком находится выше опорной плоскости, то величины* r_1, r_2 *положительны. Многоточие в уравнении* (11) *обозначает совокупность членов, порядок которых относительно* x, y *выше порядка членов, выписанных явно.*

Потенциальная энергия тела вычисляется по формуле

$$\Pi = mgl, \tag{12}$$

где $l = -(\boldsymbol{n} \cdot \overline{GD})$ *— расстояние от центра тяжести до касательной плоскости к поверхности тела, а* $\boldsymbol{n}$ *— единичная внутренняя нормаль в точке* D. *Из уравнения* (11) *и формулы* (25) *п.* 114 *имеем следующие выражения для компонент вектора* $\boldsymbol{n}$:

$$\gamma_1 = -\frac{x}{r_1} + \cdots, \quad \gamma_2 = -\frac{y}{r_2} + \cdots, \quad \gamma_3 = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{r_1^2} + \frac{y^2}{r_2^2}\right) + \cdots \tag{13}$$

Учитывая, что $\overline{GD'} = (x,\ y,\ z)$, *и пренебрегая в выражении для* Π *несущественной аддитивной постоянной* mgh, *получаем из* (11)–(13)

$$\Pi = \frac{1}{2}mg\left(\frac{r_1 - h}{r_1^2}x^2 + \frac{r_2 - h}{r_2^2}y^2\right) + \cdots \tag{14}$$

Отсюда и из теоремы Лагранжа следует, что если центр тяжести тела находится ниже обоих главных центров кривизны поверхности тела в точке его касания с опорной плоскостью, то положение равновесия устойчиво. Если же центр тяжести лежит выше хотя бы одного из главных центров кривизны, то, согласно теоремам 1 *и* 2 *Ляпунова, имеет место неустойчивость.*

227. Стационарные движения консервативной системы с циклическими координатами и их устойчивость. Пусть в голономной системе с n степенями свободы обобщенные координаты q_α ($\alpha = k + 1, \ldots, n$) являются циклическими. Остальные обобщенные координаты q_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) называются (при наличии циклических координат) *позиционными.* Потенциальная энергия Π и коэффициенты a_{ik} кинетической энергии

$$T = T_2 = \frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$$

будут функциями только от позиционных координат.

Согласно п. 164, существуют первые интегралы, отвечающие циклическим координатам:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_\alpha} = c_\alpha = \text{const} \qquad (\alpha = k+1, \ldots, n), \tag{15}$$

где $L = T - \Pi$ — функция Лагранжа.

Считая, что гессиан (6) п. 165 отличен от нуля, составим функцию Рауса

$$R = \sum_{\alpha=k+1}^{n} c_\alpha \dot{q}_\alpha - L \tag{16}$$

и выразим ее через позиционные координаты q_i, их производные $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ и постоянные c_α $(\alpha = k+1, \ldots, n)$. Введем обозначение

$$R^* = -R + \Pi. \tag{17}$$

Тогда уравнения Рауса запишутся в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R^*}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial R^*}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k). \tag{18}$$

Функция R^* может быть представлена в виде суммы

$$R^* = R_2^* + R_1^* + R_0^*, \tag{19}$$

где R_2^* — квадратичная форма производных позиционных координат[1],

$$R_2^* = \frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{k} a_{ij}(q_1, \ldots, q_k)\dot{q}_i \dot{q}_j. \tag{20}$$

Функция R_1^* линейна относительно $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ [2]:

$$R_1^* = \sum_{i=1}^{k} a_i^*(q_1, \ldots, q_k, c_\alpha) = \dot{q}_i \qquad (\alpha = k+1, \ldots, n), \tag{21}$$

[1]Можно показать, что R_2^* — определенно-положительная квадратичная форма относительно $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. См., например: Гантмахер Ф. Г. Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966, гл. 7, а также: Меркин Д. Р. Гироскопические системы. М.: Наука, 1974, гл. 1,

[2]Если выражение кинетической энергии не содержит произведений позиционных скоростей $\dot{q}_i$ на циклические скорости $\dot{q}_\alpha$, т. е. если $a_{i\alpha} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k;$ $\alpha = k+1, \ldots, n)$, то функция R_1^* тождественно равна нулю. В этом случае рассматриваемая система называется ***гироскопически несвязанной.***

R_0^* зависит только от позиционных координат и величин c_α.

Используя представление (19), запишем уравнения Рауса (18) в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R_2^*}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial R_2^*}{\partial q_i} = -\frac{\partial(\Pi - R_0^*)}{\partial q_i} - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial R_1^*}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial R_1^*}{\partial q_i}\right) \quad (i = 1,\, 2,\, \ldots,\, k). \tag{22}$$

Из равенства (21) следует, что

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R_1^*}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial R_1^*}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{k} \gamma_{ij}^* \dot{q}_j \qquad (i = 1,\, 2,\, \ldots,\, k), \tag{23}$$

где

$$\gamma_{ij}^* = \frac{\partial a_i^*}{\partial q_j} - \frac{\partial a_j^*}{\partial q_i}, \quad \gamma_{ij}^* = -\gamma_{ji}^* \qquad (i,\, j = 1,\, 2,\, \ldots,\, k), \tag{24}$$

т. е. выражение во второй круглой скобке правой части (22) приводит к появлению гироскопических сил, линейных относительно позиционных скоростей.

Итак, уравнения (22) можно рассматривать как дифференциальные уравнения движения некоторой приведенной системы с k степенями свободы, кинетическая энергия которой равна R_2^*, а обобщенные силы состоят из гироскопических сил и потенциальных сил, производных от потенциала $\Pi^* = \Pi - R_0^*$. Потенциал Π^* приведенной системы называют *приведенным потенциалом* (*приведенной потенциальной энергией*), или *потенциалом Рауса.* Если исходная система является гироскопически несвязанной, то в приведенной системе гироскопические силы отсутствуют.

Стационарными движениями исходной консервативной системы с циклическими координатами называются такие ее движения, при которых позиционные координаты q_i $(i = 1,\, 2,\, \ldots,\, k)$ и циклические скорости $\dot{q}_\alpha$ $(\alpha = k+1,\, \ldots,\, n)$ постоянны. Из (15) и (22) следует, что стационарные движения существуют в том и только в том случае, когда отвечающие им значения позиционных координат удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1,\, 2,\, \ldots,\, k), \tag{25}$$

т. е. стационарные движения исходной системы соответствуют положениям равновесия приведенной системы.

Пусть для каких-либо значений постоянных $c_\alpha = c_{\alpha 0}$ система уравнений (25) имеет решение $q_i = q_{i0} = \text{const}$. Тогда в стационарном движении $q_i = q_{i0}$, $\dot{q}_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, $c_\alpha = c_{\alpha 0}$ $(\alpha = k+1, \ldots n)$. Допустим, что в начальный момент времени $t = t_0$ величины q_i, $\dot{q}_i$ мало отличаются от их значений, отвечающих стационарному движению. Будут ли тогда величины $q_i - q_{i0}, \dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ оставаться малыми для всех $t \geqslant t_0$? Иными словами, будет ли рассматриваемое стационарное движение устойчиво по отношению к переменным q_i, $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$? Ответ на этот вопрос можно получить, используя теорему Лагранжа.

Так как наличие гироскопических сил не нарушает закона сохранения полной энергии, то для приведенной системы существует интеграл $E^* = R_2^* + \Pi^*$. Если теперь в п. 225 заменить E на E^* и повторить рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы Лагранжа, то придем к следующей теореме Рауса об устойчивости стационарных движений голономной консервативной системы с циклическими координатами.

Теорема. *Если в стационарном движении потенциальная энергия* $\Pi^*(q_1, \ldots, q_k, c_{\alpha 0})$ *приведенной системы имеет строгий локальный минимум, то это движение устойчиво по отношению к переменным* q_i, $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

Замечание 2. *Применяя теорему Лагранжа, мы фиксировали постоянные* c_α, *оставляя их такими же, как и в самом стационарном движении. Ляпунову принадлежит существенное дополнение к теореме Рауса, которое допускает малое изменении постоянных* c_α. *Именно, если* Π^* *имеет минимум как при* $c_\alpha = c_{\alpha 0}$, *так и при значениях* $c_\alpha = c_{\alpha 0} + \mu_\alpha$ $(|\mu_\alpha| \ll 1,\ \alpha = k+1, \ldots, n)$, *причем позиционные координаты* $q_{i0}(c_\alpha)$ *в точке минимума* Π^* *непрерывны как функции* c_α, *то стационарное движение устойчиво по отошению к возмущениям величин* q_i, $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ [1].

Пример 1 (Устойчивость вращения диска вокруг вертикали). *Пусть круговой однородный диск рндиусом* ρ *и массой* m *движется в однородном поле тяжести по абсолютно гладкой горизонтальной плоскости, касаясь ее одной точкой своего края. Как отмечалось в п.* 114, *при движении твердого тела по абсолютно гладкой плоскости проекция его центра масс на плоскость движется равномерно и прямолинейно. Без ограничения общности можно считать ее неподвижной; тогда центр масс тела будет двигаться по заданной вертикали. Ориентацию диска относительно неподвижной системы координат зададим при по-*

[1]Подробности см. в упомянутой монографии А. В. Карапетяна и В. В. Румянцева.

мощи углов Эйлера (рис. 137). *Кинетическая и потенциальная энергия диска определяются формулами* (см. п. 157)

$$T = \frac{1}{8}m\rho^2(1+4\cos^2\theta)\dot\theta^2 + \frac{1}{8}m\rho^2\sin^2\theta\dot\psi^2 + \frac{1}{4}m\rho^2(\dot\psi\cos\theta+\dot\varphi)^2,$$

$$\Pi = mg\rho\sin\theta.$$

Переменные ψ *и* φ *будут циклическими координатами. Им соответствуют первые интегралы* $(L = T - \Pi)$:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\psi} = \frac{1}{4}m\rho^2\sin^2\theta\dot\psi + \frac{1}{2}m\rho^2(\dot\psi\cos\theta+\dot\varphi)\cos\theta = c_\psi = \text{const}, \tag{26}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = \frac{1}{2}m\rho^2(\dot\psi\cos\theta+\dot\varphi) = c_\varphi = \text{const}. \tag{27}$$

Приведенная система имеет одну степень свободы, а функция (19) *имеет вид*

$$R^* = \frac{1}{8}m\rho^2(1+4\cos^2\theta)\dot\theta^2 - 2\frac{(c_\psi - c_\varphi\cos\theta)^2}{m\rho^2\sin^2\theta} - \frac{c_\varphi^2}{m\rho^2}.$$

Если отбросить последнее слагаемое, несущественное для уравнений движения, то для потенциальной энергии приведенной системы имеем выражение

$$\Pi^* = mg\rho\sin\theta + 2\frac{(c_\psi - c_\varphi\cos\theta)^2}{m\rho^2\sin^2\theta}. \tag{28}$$

Существует такое движение, при котором один из диаметров диска расположен вертикально, а сам диск вращается вокруг этого диаметра с произвольной по величине постоянной угловой скоростью. Для этого движения

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \dot\varphi = 0, \quad \dot\psi = \omega = \text{const}, \tag{29}$$

причем

$$c_\psi = \frac{1}{4}m\rho^2\omega, \quad c_\varphi = 0. \tag{30}$$

Подставляя в функцию Π^* *значения постоянных* c_ψ *и* c_φ *из* (30), *полагая* $\theta = \frac{\pi}{2} + q$ *и разлагая* Π^* *в ряд по степеням* q, *получаем* (*несущественную постоянную в функции* Π^* *отбрасываем*)

$$\Pi^* = \frac{1}{8}(m\rho^2\omega^2 - 4mg\rho)q^2 + \frac{1}{24}(2m\rho^2\omega^2 + mg\rho)q^4 + \cdots \tag{31}$$

При выполнении неравенства

$$|\omega| \geqslant 2\sqrt{\frac{g}{\rho}} \tag{32}$$

функция Π^* *имеет строгий локальный минимум в точке* $q = 0$. *Поэтому, согласно теореме Рауса, при условии* (32) *стационарное движение диска* (29) *устойчиво. Если же неравенство* (32) *не выполняется, то функция* Π^* *в точке* $q = 0$ *не имеет минимума, и это узнается по членам второго порядка в разложении* (31). *Следовательно, согласно теореме* 1 *Ляпунова* (см. п. 226), *при невыполнении неравенства* (32) *имеет место неустойчивость*[1].

§ 2. Малые колебания

228. Линеаризация уравнений движения. Пусть консервативная система имеет положение равновесия, в котором все обобщенные координаты q_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ равны нулю. Предполагая потенциальную энергию системы $\Pi(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ аналитической функцией в окрестности положения равновесия, разложим ее в ряд Тейлора

$$\Pi = \Pi(0, 0, \ldots, 0) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\right)_0 q_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_k}\right)_0 q_i q_k + \ldots, \tag{1}$$

где индексом 0 отмечены значения производных функции Π в положении равновесия, т. е. при $q_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Без ограничения общности можно считать, что $\Pi\ (0, 0 \ldots, 0) = 0$. Первая сумма в разложении (1) равна нулю, так как в положении равновесия все обобщенные силы равны нулю:

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Таким образом, если ввести обозначения

$$c_{ik} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i\, \partial q_k}\right)_0,$$

[1] Впрочем, для доказательства неустойчивости при выполнении неравенства (32) применима и теорема 2 Ляпунова из п. 226, так как при этом функция Π^* в точке $q = 0$ имеет максимум, и это узнается по членам наинизшего (в нашем случае — второго) порядка в разложении (31).