При выполнении неравенства

$$|\omega| \geqslant 2\sqrt{\frac{g}{\rho}} \tag{32}$$

функция Π^* *имеет строгий локальный минимум в точке* $q = 0$. *Поэтому, согласно теореме Рауса, при условии* (32) *стационарное движение диска* (29) *устойчиво. Если же неравенство* (32) *не выполняется, то функция* Π^* *в точке* $q = 0$ *не имеет минимума, и это узнается по членам второго порядка в разложении* (31). *Следовательно, согласно теореме* 1 *Ляпунова* (см. п. 226), *при невыполнении неравенства* (32) *имеет место неустойчивость*[1].

§ 2. Малые колебания

228. Линеаризация уравнений движения. Пусть консервативная система имеет положение равновесия, в котором все обобщенные координаты q_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ равны нулю. Предполагая потенциальную энергию системы $\Pi(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ аналитической функцией в окрестности положения равновесия, разложим ее в ряд Тейлора

$$\Pi = \Pi(0, 0, \ldots, 0) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\right)_0 q_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_k}\right)_0 q_i q_k + \ldots, \tag{1}$$

где индексом 0 отмечены значения производных функции Π в положении равновесия, т. е. при $q_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Без ограничения общности можно считать, что $\Pi\ (0, 0 \ldots, 0) = 0$. Первая сумма в разложении (1) равна нулю, так как в положении равновесия все обобщенные силы равны нулю:

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Таким образом, если ввести обозначения

$$c_{ik} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i\, \partial q_k}\right)_0,$$

[1]Впрочем, для доказательства неустойчивости при выполнении неравенства (32) применима и теорема 2 Ляпунова из п. 226, так как при этом функция Π^* в точке $q = 0$ имеет максимум, и это узнается по членам наинизшего (в нашем случае — второго) порядка в разложении (31).

то разложение потенциальной энергии в ряд будет начинаться с квадратичной формы, имеющей постоянные коэффициенты:

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik} q_i q_k + \ldots \tag{2}$$

Здесь многоточие обозначает совокупность членов, порядок которых относительно величин q_i $(i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$ больше второго. Будем предполагать, что квадратичная форма

$$\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik} q_i q_k \tag{3}$$

является определенно-положительной. Тогда точка $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0$ будет точкой строгого локального минимума функции $\Pi\,(q_1,\, q_2,\, \ldots,\, q_n)$ и, следовательно, согласно теореме Лагранжа, положение равновесия устойчиво.

В силу устойчивости положения равновесия величины q_i, $\dot q_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ будут малыми во все время движения, если достаточно малы их начальные значения. Используя малость величин q_i, $\dot q_i$, можно упростить дифференциальные уравнения движения системы вблизи ее положения равновесия. Для этого можно заменить полные уравнения движения приближенными, сохраняя в них только линейные члены относительно q_i, $\dot q_i$ $(i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$ и отбрасывая все нелинейные члены. Кинетическая энергия системы имеет вид

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(q_1,\, q_2,\, \ldots,\, q_n)\, \dot q_i\, \dot q_k.$$

Будем считать, что функции $a_{ik}\,(q_1,\, \ldots,\, q_n)$ аналитические в окрестности положения равновесия, и запишем их в виде рядов

$$a_{ik}(q_1,\, q_2,\, \ldots,\, q_n) = a_{ik} + \ldots$$

Здесь многоточие обозначает совокупность членов первого и более высоких порядков относительно q_i $(i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$, $a_{ik} = a_{ik}(0,\, 0,\, \ldots,\, 0)$ — постоянные коэффициенты. Функция T запишется в виде ряда

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \dot q_i \dot q_k + \ldots, \tag{4}$$

где многоточие обозначает члены не ниже третьего порядка относительно q_i, $\dot q_i$ $(1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Будем считать, что выбор обобщенных координат сделан так, что в положении равновесия определитель (18) п. 139 (при $m = n$) отличен от нуля. Тогда квадратичная форма

$$\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{i,k}\,\dot{q}_i\dot{q}_k \tag{5}$$

будет определенно-положительной относительно $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Уравнения движения запишем в виде уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Рассматривая эти уравнения при малых значениях величин q_i, $\dot{q}_i$, заменим в функции Лагранжа $L = T - \Pi$ величины T и Π их разложениями (4) и (2). Тогда получим уравнения движения в виде

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}\ddot{q}_k + c_{ik}q_k) + \ldots = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{7}$$

где многоточием обозначена совокупность членов второго и более высоких порядков. Если их отбросить, то придем к линейной системе с постоянными коэффициентами:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}\ddot{q}_k + c_{ik}q_k) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{8}$$

Эти линейные уравнения получаются из уравнений (6), если считать, что в функции Лагранжа величины T и Π заменены их приближенными выражениями (5) и (3). Теория малых колебаний консервативной системы вблизи устойчивого положения равновесия опирается на такую линеаризацию и рассматривает приближенные выражения (5) и (3) для T и Π как точные.

Когда говорят «малые колебания», то обычно имеют в виду движения, описываемые системой дифференциальных уравнений, полученной в результате линеаризации полных (нелинейных) уравнений движения. В случае движений в окрестности положения равновесия консервативной системы линеаризация сводится, как мы видим, к получению T и Π в виде квадратичных форм (5) и (3).

Для упрощения записи уравнения (8) удобно представить в векторно-матричной форме. Пусть

$$\boldsymbol{q} = \left\| \begin{matrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{matrix} \right\|, \quad \mathbf{A} = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix} \right\|,$$

$$\mathbf{C} = \left\| \begin{matrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{matrix} \right\|.$$

Тогда

$$T = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{q}} \cdot \dot{\boldsymbol{q}}), \qquad \Pi = \frac{1}{2}(\mathbf{C}\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{q}), \tag{9}$$

и уравнения (8) запишутся в виде

$$\mathbf{A}\ddot{\boldsymbol{q}} + \mathbf{C}\boldsymbol{q} = 0. \tag{10}$$

229. Главные координаты и главные колебания. Выясним структуру решений уравнений (8) (или (10)), описывающих малые колебания в окрестности положения равновесия. Для этого рассмотрим пару квадратичных форм

$$(\mathbf{A}\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{q}) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} q_i q_k, \qquad (\mathbf{C}\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{q}) = \sum_{i,k=1}^{n} c_{ik} q_i q_k. \tag{11}$$

Обе эти формы определенно-положительны. Из линейной алгебры известно[1], что если даже одна из форм (11) была бы определенно-положительной (за такую форму мы будем принимать первую из квадратичных форм (11)), то существует вещественная неособенная замена переменных

$$\boldsymbol{q} = \mathbf{U}\boldsymbol{\theta} \quad (\det \mathbf{U} \neq 0,\ \boldsymbol{\theta}' = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)), \tag{12}$$

приводящая к сумме квадратов сразу обе квадратичные формы (11):

$$(\mathbf{A}\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{q}) = \sum_{j=1}^{n} \theta_j^2, \qquad (\mathbf{C}\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{q}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \theta_j^2. \tag{13}$$

[1]См., например, гл. VI книги: Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1975.

При этом величины λ_j с точностью до порядка следования однозначно определяются первоначальными квадратичными формами и не зависят от выбора замены переменных (12). В нашем случае все λ_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ положительны в силу того, что П определенно-положительна.

Отметим, что если в окрестности точки $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0$ координатного пространства $q_1, q_2, \ldots, q_n$ ввести евклидову структуру при помощи удвоенной кинетической энергии $2T$, т. е. принять за скалярное произведение векторов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ величину $(\mathbf{A}\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})$, то преобразование (12) можно выбрать ортогональным в смысле этой евклидовой структуры. Это означает, что, если $\boldsymbol{u}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ — j-й столбец матрицы $\mathbf{U}$, т. е. замена переменных (12) имеет вид

$$\boldsymbol{q} = \sum_{j=1}^{n} \theta_j \boldsymbol{u}_j, \tag{14}$$

то выполняется условие нормировки

$$(\mathbf{A}\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_j) = \delta_{ij}, \tag{15}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера ($\delta_{ij} = 1$, если $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$). Так как обобщенные скорости $\dot{q}_i$ и $\dot{\theta}_j$ связаны теми же соотношениями, что и обобщенные координаты q_i и θ_j:

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \mathbf{U}\dot{\boldsymbol{\theta}},$$

то в первой из формул (13) можно величины q_i заменить на $\dot{q}_i$, а величины θ_j, на $\dot{\theta}_j$. В новых переменных кинетическая и потенциальная энергия имеют вид

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \dot{\theta}_j^2, \qquad \Pi = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \theta_j^2. \tag{16}$$

Обобщенные координаты θ_j называются *главными*, или *нормальными координатами*. В главных координатах уравнения движения (8) запишутся в виде n не связанных одно с другим уравнений второго порядка

$$\ddot{\theta}_j + \lambda_j \theta_j = 0, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{17}$$

Так как все λ_j положительны, то каждое из этих уравнений описывает колебания гармонического осциллятора:

$$\theta_j = c_j \sin(\omega_j t + \alpha_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{18}$$

Здесь $\omega_j = \sqrt{\lambda_j}$ — частоты колебаний, c_j, α_j — произвольные постоянные.

Из (14) и (18) получаем общее решение уравнений (8) (или (10))

$$\boldsymbol{q} = \sum_{j=1}^{n} c_j \boldsymbol{u}_j \sin(\omega_j t + \alpha_j). \tag{19}$$

Эта формула охватывает все решения системы (8). Пусть среди постоянных c_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ отлична от нуля только одна постоянная c_k. Тогда из (19) получаем

$$\boldsymbol{q}_k = c_k \boldsymbol{u}_k \sin(\omega_k t + \alpha_k). \tag{20}$$

Это решение описывает колебание системы, которое называют k-м *главным*, или *нормальным колебанием.* Вектор $\boldsymbol{u}_k$ называют *амплитудным вектором k-го главного колебания* . В k-м главном колебании все обобщенные координаты совершают гармонические колебания с одной и той же частотой ω_k, отношение амплитуд колебаний отдельных обобщенных координат определяется отношением соответствующих компонент амплитудных векторов.

При практическом нахождении решения (19) можно поступать следующим образом. Ищем решение системы (10) в виде

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{u} \sin(\omega t + \alpha).$$

Подставив это выражение для $\boldsymbol{q}$ в уравнение (10) и сократив затем на $\sin(\omega t + \alpha)$, получим уравнение для амплитудного вектора $\boldsymbol{u}$

$$(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{A})\boldsymbol{u} = 0 \qquad (\lambda = \omega^2). \tag{21}$$

Чтобы это уравнение имело нетривиальное решение относительно компонент амплитудного вектора $\boldsymbol{u}$, надо потребовать, чтобы величина λ удовлетворяла уравнению

$$\det(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{A}) = 0. \tag{22}$$

Это уравнение называется *уравнением частот*, или *вековым уравнением.* Из предыдущего изложения теории главных колебаний следует, что оно имеет только положительные решения; каждому корню λ_j этого уравнения соответствует амплитудный вектор $\boldsymbol{u}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, причем если какой-либо корень λ_k уравнения (22) будет кратным, то всегда можно найти ровно столько соответствующих ему линейно независимых амплитудных векторов, какова его кратность. Амплитудные векторы из уравнения (21) находятся с точностью до произвольного постоянного множителя. Их нормировка (если она требуется) производится в соответствии с условием (15).

Пример 1 (Малые колебания двойного маятника). *Рассмотрим двойной маятник, движущийся в вертикальной плоскости в поле тяжести* (рис. 15). *Потенциальная энергия маятника найдена в примере* 3 *п.* 54:

$$\Pi = -\frac{1}{2}mgl(3\cos\varphi + \cos\psi).$$

Кинетическая энергия вычисляется по формуле (*см. пример* 2 *п.* 215)

$$T = \frac{1}{2}ml^2\left[\frac{4}{3}\dot\varphi^2 + \dot\varphi\dot\psi\cos(\varphi - \psi) + \frac{1}{3}\dot\psi^2\right].$$

Существует положение равновесия маятника, когда оба стержня занимают вертикальное положение, а $\varphi = \psi = 0$. *В этом положении потенциальная энергия маятника минимальна и равновесие устойчиво. Исследуем малые колебания маятника вблизи этого положения равновесия.*

Если отбросить несущественное постоянное слагаемое $-2mgl$ *в разложении функции* Π *в ряд в окрестности положения равновесия* $\varphi = \psi = 0$ *и сохранить только члены второго порядка малости, то получим*

$$\Pi = \frac{1}{2}mgl\left(\frac{3}{2}\varphi^2 + \frac{1}{2}\psi^2\right).$$

Аналогично, учитывая только члены второго порядка малости в разложении кинетической энергии в ряд, имеем

$$T = \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{4}{3}\dot\varphi^2 + \dot\varphi\dot\psi + \frac{1}{3}\dot\psi^2\right).$$

Если ввести обозначение $\boldsymbol{q}' = (\varphi,\, \psi)$, *то матрицы* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{C}$ *в выражениях* (9) *будут такими:*

$$\mathbf{A} = ml^2\left\|\begin{matrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{matrix}\right\|, \qquad \mathbf{C} = mgl\left\|\begin{matrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{matrix}\right\|.$$

Уравнение частот (22) *может быть записано в виде*

$$7\lambda^2 - 42\left(\frac{g}{l}\right)\lambda + 27\left(\frac{g}{l}\right)^2 = 0.$$

Оно имеет корни

$$\lambda_1 = 3\left(1 + \frac{2\sqrt{7}}{7}\right)\frac{g}{l}, \qquad \lambda_2 = 3\left(1 - \frac{2\sqrt{7}}{7}\right)\frac{g}{l}. \tag{23}$$

Частоты ω_j *главных колебаний вычисляются по формулам* $\omega_j = \sqrt{\lambda_j}$ $(j = 1,\, 2)$. *Из уравнения* (21) *и условий нормировки* (15) *получаем следующие выражения для амплитудных векторов* $\boldsymbol{u}_j$, *отвечающих частотам* ω_j $(j = 1,\, 2)$:

$$\boldsymbol{u}_1 = \varkappa \left\| \begin{matrix} -1-\sqrt{7} \\ 5+\sqrt{7} \end{matrix} \right\|, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \varkappa \left\| \begin{matrix} -1+\sqrt{7} \\ 5-\sqrt{7} \end{matrix} \right\| \left(\varkappa = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{3}{7m}} \right). \quad (24)$$

Таким образом, общее решение уравнений малых колебаний двойного маятника будет таким:

$$\left\| \begin{matrix} \varphi \\ \psi \end{matrix} \right\| = c_1 \left\| \begin{matrix} -1-\sqrt{7} \\ 5+\sqrt{7} \end{matrix} \right\| \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + c_2 \left\| \begin{matrix} -1+\sqrt{7} \\ 5-\sqrt{7} \end{matrix} \right\| \sin(\omega_2 t + \alpha_2), \tag{25}$$

где c_j, α_j $(j = 1,\, 2)$ — *произвольные постоянные.*

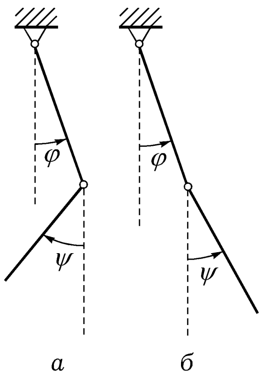

Рис. 173

Первое и второе главные колебания отвечают значениям постоянных $c_1 \neq 0,\, c_2 = 0$ *и* $c_1 = 0,\, c_2 \neq 0$ *соответственно. Отношения* k_j $(j = 1,\, 2)$ *амплитуд колебаний углов* φ *и* ψ *в первом и втором главных колебаниях и направления отклонений стержней от вертикали характеризуются величинами*

$$k_1 = -\frac{1+\sqrt{7}}{5+\sqrt{7}} = \frac{1-2\sqrt{7}}{9} \simeq -0{,}48,$$

$$k_2 = -\frac{1-\sqrt{7}}{5-\sqrt{7}} = \frac{1+2\sqrt{7}}{9} \simeq 0{,}70,$$

которые называются коэффициентами форм главных колебаний. При первом главном колебании (с большей частотой ω_1*) стержни в любой момент времени будут отклонены от вертикали в разные стороны* (рис. 173, а)*, а при втором главном колебании (с меньшей частотой* ω_2*) — в одну и ту же сторону* (рис. 173, б).

230. Колебания консервативной системы под влиянием внешних периодических сил.

Пусть к точкам консервативной системы приложены внешние силы, которым отвечают обобщенные силы $Q_i = Q_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Влияние этих сил на колебания системы вблизи устойчивого положения равновесия удобно исследовать, если воспользоваться главными координатами $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$, введенными в предыдущем пункте. Силам $Q_i(t)$ в координатах q_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ отвечают обобщенные силы $\Theta_j(t)$ в главных координатах $\theta_j (j = 1, 2, \ldots, n)$. Для нахождения величин $\Theta_j(t)$ приравняем выражение для элементарной работы сил в координатах q_i и θ_j:

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i = \sum_{j=1}^{n} \Theta_j \delta\theta_j, \tag{26}$$

но согласно замене переменных (12)

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij}\theta_j, \qquad \delta q_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij}\delta\theta_j.$$

Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} Q_i \sum_{j=1}^{n} u_{ij}\delta\theta_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} u_{ij} Q_i \right) \delta\theta_j. \tag{27}$$

Из равенств (26) и (27) следует, что

$$\Theta_j(t) = \sum_{i=1}^{n} u_{ij} Q_j(t) \quad (j = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{28}$$

В нормальных координатах малые колебания консервативной системы с учетом внешних сил будут описываться уравнениями

$$\ddot{\theta}_j + \omega_j^2 \theta_j = \Theta_j(t) \quad (j = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{29}$$

Пусть внешние силы $Q_i(t)$ — периодические функции времени с периодом $2\pi/\Omega$ и такие, что обобщенные силы (28) представимы в виде рядов Фурье

$$\Theta_j = \sum_{k=0}^{\infty} b_{jk} \sin(k\Omega t + \alpha_{jk}) \quad (j = 1,\ 2, \ldots,\ n) \tag{30}$$

Здесь b_{jk}, α_{jk} $(j = 1,\ 2, \ldots,\ n;\ k = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$ — постоянные величины.

Общее решение уравнений (29) (при $k\Omega \neq \omega_j$) имеет вид

$$\theta_j = c_j \sin(\omega_j t + \alpha_j) + \theta_j^*(t), \tag{31}$$

где c_j, α_j — произвольные постоянные, а через $\theta_j^*(t)$ обозначены слагаемые

$$\theta_j^* = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{jk}}{\omega_j^2 - k^2\Omega^2} \sin(k\Omega t + \alpha_{jk}) \quad (j = 1,\ 2, \ldots,\ n), \tag{32}$$

которые появились в общем решении из-за наличия внешних периодических сил.

Из (14) и (31) получаем

$$\boldsymbol{q} = \sum_{j=1}^{n} c_j \boldsymbol{u}_j \sin(\omega_j t + \alpha_j) + \sum_{j=1}^{n} \theta_j^*(t) \boldsymbol{u}_j. \tag{33}$$

Первая сумма в (33) представляет свободные колебания, а вторая — вынужденные колебания системы, возникающие из-за влияния внешних периодических сил.

Если же при каком-либо значении числа k окажется, что $k\Omega = \omega_j$ для некоторого j, то при $b_{jk} \neq 0$ решение в форме (31), (32) непригодно, так как в сумме (32) будет слагаемое с нулевым знаменателем. Говорят, что в этом случае имеет место резонанс в вынужденных колебаниях системы.

Каким будет решение уравнения (29) при резонансе? Для примера рассмотрим одно уравнение вида

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = a \sin \omega t. \tag{34}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\theta = c \sin(\omega t + \alpha) + \theta^*(t), \tag{35}$$

где c, α — произвольные постоянные, а

$$\theta^*(t) = -\frac{a}{2\omega} t \cos \omega t. \tag{36}$$

Функция $\theta^*(t)$ является неограниченной. Колебания, описываемые уравнением (34), уже не будут малыми. А потому для описания движения вблизи положения равновесия уравнения (34) должны быть заменены другими уравнениями, учитывающими отброшенные при линеаризации нелинейные члены в полных уравнениях движения. Так в данном конкретном примере мы приходим к необходимости теории нелинейных колебаний.

Пример 1 (Плоские колебания твердого тела на эллиптической орбите). *Дифференциальное уравнение, описывающее плоские движения твердого тела в центральном ньютоновском гравитационном поле, имеет вид* (см. п. 128)

$$(1 + e\cos\nu)\frac{d^2\varphi}{d\nu^2} - 2e\sin\nu\frac{d\varphi}{d\nu} + 3\frac{A-B}{C}\sin\varphi\cos\varphi = 2e\sin\nu, \qquad (37)$$

где A и B — моменты инерции тела относительно его главных центральных осей инерции Ox и Oy, которые для плоских движений все время расположены в плоскости орбиты, C — момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости орбиты; φ — угол между осью Oy и осью OZ, направленной вдоль радиуса-вектора центра масс тела относительно притягивающего центра, e *— эксцентриситет орбиты, $0 \leqslant e < 1$.*

На круговой орбите существует положение равновесия твердого тела в орбитальной системе координат, отвечающее решению $\varphi = 0$ уравнения (37) *при $e = 0$. При условии $A > B$ положение равновесия устойчиво. Предполагая это условие выполненным, рассмотрим малые плоские колебания твердого тела вблизи положения $\varphi = 0$, вызываемые эллиптичностью орбиты. Эксцентриситет орбиты считаем малой величиной.*

Линеаризуя уравнение (37), *получаем*

$$(1 + e\cos\nu)\frac{d^2\varphi}{d\nu^2} - 2e\sin\nu\frac{d\varphi}{d\nu} + \omega_0^2\varphi = 2e\sin\nu. \qquad (38)$$

Здесь введено обозначение $\omega_0^2 = 3\dfrac{A-B}{C}$. Так как моменты инерции удовлетворяют неравенству треугольника $A - B \leqslant C$ и по предположению $A > B$, то

$$0 < \omega_0^2 \leqslant 3. \qquad (39)$$

Вынужденные колебания спутника, описываемые дифференциальным уравнением (38), *ищем в виде ряда по степеням e*

$$\varphi^* = e\varphi_1 + e^2\varphi_2 + \ldots \qquad (40)$$

Подставив это разложение в уравнение (38) *и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях* e *в его обеих частях, получим линейные неоднородные дифференциальные уравнения для функций φ_1, $\varphi_2, \ldots$. Для функции φ_1 имеем уравнение*

$$\frac{d^2\varphi_1}{d\nu^2} + \omega_0^2\varphi_1 = 2\sin\nu. \qquad (41)$$

Из (40), (41) *находим решение, описывающее вынужденные колебания тела, в виде*

$$\varphi^* = \frac{2e}{\omega_0^2 - 1}\sin\nu + \ldots \tag{42}$$

Эти колебания вызваны неравномерностью движения центра масс тела по эллиптической орбите. В динамике спутников они носят название эксцентриситетных колебаний.

Утверждение о существовании эксцентриситетных колебаний (42) *мы делаем здесь без обоснования. Можно, однако, строго показать*[1], *что при* $\omega_0 \neq 1$ *нелинейное уравнение* (37) *действительно имеет решение, аналитическое по* e *при достаточно малых* e *и переходящее при* $e = 0$ *в положение равновесия* $\varphi = 0$, *причем разложение этого решения в ряд начинается с члена первой степени по* e, *явно выписанного в формуле* (42).

При $\omega_0 = 1$ *имеет место резонанс в вынужденных колебаниях. Решение* (42), *полученное при помощи линеаризации, не имеет смысла при резонансе, и для исследования движения тела вблизи положения* $\varphi = 0$ *надо использовать нелинейное уравнение движения* (37). *Будем считать, что* ω_0 *мало отличается от единицы:*

$$\omega_0 = 1 + \mu \quad (0 \leqslant |\mu| \ll 1). \tag{43}$$

В уравнении (37) *сделаем*[2] *замену переменных* $\varphi = \varepsilon\xi$, *где* $\varepsilon = e^{1/3}$. *Подставим это значение* φ *в уравнение* (37) *и представив обе его части в виде рядов по степеням* ε, *получим* (*после деления обеих частей на* ε) *такое уравнение:*

$$\frac{d^2\xi}{d\nu^2} + \omega_0^2\xi = \varepsilon^2\left(\frac{2}{3}\omega_0^2\xi^3 + 2\sin\nu\right) + \ldots, \tag{44}$$

где многоточие обозначает члены выше второго порядка малости относительно ε.

---

[1] См.: Сарычев В. А. Вопросы ориентации искусственных спутников. М.: ВИНИТИ, 1978. — (Итоги науки и техники. Сер. «Исследование космического пространства»; Т. 11).

[2] Мы не даем здесь обоснования исследования колебаний при резонансе и в случае, близком к резонансному. О строгом обосновании излагаемой процедуры см. статьи: Маркеев А. П., Чеховская Т. Н. О резонансных периодических решениях гамильтоновых систем, рождающихся из положения равновесия // ПММ. 1982. Т. 46, вып. 1. С. 27–33.; Холостова О. В. О движении гамильтоновой системы с одной степенью свободы при резонансе в вынужденных колебаниях // Известия РАН. МТТ, 1996, № 3, С. 167–175.

Для приближенного исследования этого уравнения будем применять теорию возмущений (см. § 7 гл. XI). *Положим*

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{\omega_0}} q, \quad \frac{d\xi}{d\nu} = \sqrt{\omega_0} p. \tag{45}$$

Тогда уравнение (44) *может быть записано в эквивалентной форме в виде канонических уравнений с функцией Гамильтона* (q — *координата,* p — *импульс*)

$$H = \frac{1}{2}\omega_0(q^2 + p^2) - \varepsilon^2 \left(\frac{1}{6} q^4 + \frac{2\sin\nu}{\sqrt{\omega_0}} q \right) + \ldots \tag{46}$$

Введем новые канонически сопряженные переменные Q, P *при помощи унивалентного канонического преобразования* (см. пример 6 п. 170)

$$q = \sqrt{2P} \sin Q, \quad p = \sqrt{2P} \cos Q. \tag{47}$$

Тогда

$$\begin{aligned} H = \omega_0 P - \varepsilon^2 \Big\{ &\frac{1}{12} P^2 (3 - 4\cos 2Q + \cos 4Q) + \\ &+ \sqrt{\frac{2P}{\omega_0}} [\cos(Q - \nu) - \cos(Q + \nu)] \Big\} + \ldots \end{aligned} \tag{48}$$

Для упрощения уравнений движения введем переменные Q^*, P^* *при помощи близкого к тождественному унивалентного канонического преобразования* Q, $P \to Q^*$, P^*, *задаваемого при помощи производящей функции*

$$QP^* + \varepsilon^2 S_2(Q, P^*, \nu) + \ldots$$

Новая функция Гамильтона H^* *определяется по формуле* (см. п. 174)

$$H^* = H + \varepsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial \nu} + \ldots,$$

в правой части которой старые переменные Q, P *должны быть заменены на их выражения через новые переменные* Q^*, P^*, *получаемые из равенств*

$$Q^* = Q + \varepsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial P^*} + \ldots, \quad P = P^* + \varepsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial Q} + \ldots \tag{49}$$

Вычисления показывают, что если функцию S_2 *взять в виде*

$$S_2 = -\sqrt{\frac{2P^*}{\omega_0}} \frac{1}{\omega_0 + 1} \sin(Q + \nu) - \frac{1}{48\omega_0} P^{*2} (8\sin 2Q - \sin 4Q),$$

то

$$H^* = \omega_0 P^* - \varepsilon^2 \left[\frac{1}{4}P^{*2} + \sqrt{\frac{2P^*}{\omega_0}}\cos(Q^* - \nu)\right] + \ldots \tag{50}$$

Сделаем еще одну каноническую замену Q^*, $P^* \to \Psi$, R по формулам

$$Q^* = \Psi + \nu, \quad P^* = R. \tag{51}$$

Тогда, учитывая равенство (43) и пренебрегая членами выше второго порядка малости относительно ε и μ, получаем приближенное выражение для новой функции Гамильтона в виде

$$\mathcal{H} = \mu R - \varepsilon^2 \left(\frac{1}{4}R^2 + \sqrt{2R}\cos\Psi\right). \tag{52}$$

Соответствующая приближенная система дифференциальных уравнений второго порядка, описывающая плоское движение твердого тела при резонансе или в случае, близком к резонансному, имеет вид

$$\frac{d\Psi}{d\nu} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial R} = \mu - \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2}R + \frac{1}{\sqrt{2R}}\cos\Psi\right), \ \frac{dR}{d\nu} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\Psi} = -\varepsilon^2\sqrt{2R}\sin\Psi. \tag{53}$$

Эта система уравнений имеет первый интеграл $\mathcal{H} = h = const$ и, следовательно, интегрируется в квадратурах.

Если $\omega_0 = 1$ (т. е. $\mu = 0$), то при описании движения тела в рамках линеаризованных уравнений движения мы получаем, что отклонение тела от его равновесного положения $\varphi = 0$ неограниченно возрастает со временем, так как уравнение (41) имеет частное решение вида (36) (при $\omega = \omega_0$, $a = 2$). При нелинейной трактовке задачи о движении твердого тела при резонансе ситуация иная. В самом деле, пусть в начальный момент $\varphi = 0$, $\dot\varphi = 0$. Тогда (с погрешностью, порядок которой не ниже чем ε^3) и $R = 0$ при $t = 0$. Следовательно, в интеграле $\mathcal{H} = h$ постоянная h равна нулю и во все время движения

$$\frac{1}{4}R^2 + \sqrt{2R}\cos\Psi = 0.$$

Учитывая, что $|\cos\Psi| \leqslant 1$, получаем отсюда, что $R \leqslant R_{max} = 2^{5/3}$. Если учесть цепочку замен переменных, при помощи которых исходное уравнение движения (37) приведено к приближенной системе (53), то получим, что отклонение угла φ от его равновесного значения $\varphi = 0$ не превосходит величины $\sqrt{2R_{max}}e^{1/3} = 2\sqrt[3]{2e}$.

Решения $R = R_0 = \mathrm{const}$, $\Psi = \Psi_0 = \mathrm{const}$ *системы* (53) *отвечают* 2π*-периодическим колебаниям спутника в исходных переменных. Из* (53) *следует, что* Ψ_0 *может равняться только 0 или* π, *а величина* R_0 *может быть найдена из уравнения третьей степени*

$$u^3 + 3cu^2 + 2b = 0 \quad (u = \sqrt{2R_0}\cos\Psi_0). \tag{54}$$

Здесь

$$c = -\frac{4\mu}{3\varepsilon^2} = -\frac{4\mu}{3e^{2/3}}, \quad b = 2.$$

Уравнение (54) *имеет один или три вещественных корня в зависимости от того, положителен или отрицателен дискриминант* $D = b^2 + c^3$ *этого уравнения*[1]*. Отсюда следует, что при выполнении неравенства*

$$e > \frac{4\sqrt{3}}{9}\mu^{3/2} \tag{55}$$

существует одно, а при обратном знаке в неравенстве (55) — *три периодических движения твердого тела, переходящих при* $e = 0$ *в его равновесное положение* $\varphi = 0$ *в орбитальной системе координат*[2]*.*

Отметим, что при точном резонансе, когда $\mu = 0$, *существует только одно* 2π*-периодическое колебание тела и, согласно* (54), *амплитуда этого колебания равна* $\sqrt[3]{4e}$.

---

[1]См. гл. 9 книги: Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука,1975.

[2]Условие (55) иным путем получено в гл. 2 монография: Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965.