Глава XV
Устойчивость движения

§ 1. Основные понятия и определения

231. Уравнения возмущенного движения. Определение устойчивости. Пусть уравнения движения механической системы представлены в виде системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} = Y_i(y_1,\ y_2, \dots,\ y_m,\ t) \quad (i = 1,\ 2, \dots,\ m), \tag{1}$$

правые части которых удовлетворяют условиям существования и единственности решения.

Рассмотрим движение механической системы, которому отвечает некоторое частное решение системы (1)

$$y_i^* = f_i(t) \quad (i = 1,\ 2, \dots,\ m) \tag{2}$$

при начальных условиях

$$y_{i0} = f_i(t_0) \quad (i = 1,\ 2, \dots,\ m). \tag{3}$$

Нас интересует вопрос о движении системы при отклонении начальных условий y_{i0} от значений (3). Решением этого вопроса занимается теория устойчивости движения, элементы которой излагаются в этой главе.

Движение системы, описываемое функциями (2), будем называть *невозмущенным движением.* Все другие движения механической системы, возможные для нее при тех же силах, что и рассматриваемое движение, описываемое формулами (2), будем называть *возмущенными движениями.* Разности

$$x_i = y_i - f_i(t) \quad (i = 1,\ 2, \dots,\ m) \tag{4}$$

значений y_i для возмущенного и невозмущенного движений называются *возмущениями.*

Если в уравнениях (1) сделать замену переменных по формулам (4), то получим уравнения

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1,\ x_2, \dots,\ x_m,\ t) \quad (i = 1,\ 2, \dots,\ m), \tag{5}$$

которые называются *дифференциальными уравнениями возмущенного движения.* Очевидно, что

$$X_i = Y_i(x_1 + f_1(t),\ x_2 + f_2(t), \dots,\ x_m + f_m(t),\ t) - \\ - Y_i(f_1(t),\ f_2(t), \dots,\ f_m(t),\ t).$$

Уравнения (5) имеют частное решение $x_i \equiv 0$ $(i = 1,\ 2, \dots,\ m)$, отвечающее невозмущенному движению (2). Если функции X_i явно не зависят от t, то невозмущенное движение будем называть *установившимся*, в противном случае — *неустановившимся.*

Примем следующее определение Ляпунова. Невозмущенное движение называется *устойчивым* по отношению к переменным y_i $(i = 1,\ 2, \dots,\ m)$, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что для всех возмущенных движений, для которых в начальный момент времени t_0 выполняются неравенства

$$|x_i(t_0)| < \delta \quad (i = 1,\ 2, \dots,\ m), \tag{6}$$

при всех $t > t_0$ выполняются неравенства

$$|x_i(t)| < \varepsilon \quad (i = 1,\ 2, \dots,\ m). \tag{7}$$

Дадим еще определение асимптотической устойчивости в смысле Ляпунова. Невозмущенное движение называется *асимптотически устойчивым* по отношению к переменным y_i $(i = 1,\ 2, \dots,\ m)$, если оно устойчиво и число δ можно выбрать настолько малым, что для всех возмущенных движений, удовлетворяющих неравенствам (6), будут выполняться условия

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t) = 0 \quad (i = 1,\ 2, \dots,\ m). \tag{8}$$

232. Функции Ляпунова. Наиболее эффективным методом исследования устойчивости движения является прямой метод Ляпунова. Этот метод не предполагает нахождения тех или иных решений уравнений возмущенного движения, а связан с отысканием некоторых функций V переменных $x_1,\ x_2, \dots,\ x_m,\ t$ и изучением свойств самих этих функций и их производных. Функции V будем в дальнейшем называть *функциями Ляпунова.* В основе прямого метода Ляпунова лежат соображения, использованные Дирихле в его доказательстве теоремы Лагранжа об устойчивости положения равновесия консервативной системы (см. п. 225).

Для простоты будем изучать только установившиеся движения. Функции $X_i(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_m)$ в уравнениях возмущенного движения (5) считаем непрерывными в области

$$|x_i| < H \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ m), \tag{9}$$

где H — некоторая постоянная, и такими, что уравнения (5) при начальных значениях x_{i0} из области (9) допускают единственное решение.

В области $|x_i| < h$ $(i = 1,\ 2, \ldots,\ m)$, где h — достаточно малое положительное число, будем рассматривать функции $V(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_m)$, предполагая их непрерывно дифференцируемыми, однозначными и обращающимися в нуль в начале координат $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0$.

Производной dV/dt функции V в силу уравнений возмущенного движения (5) называется выражение

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i. \tag{10}$$

Следовательно, dV/dt будет также функцией переменных $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_m$, которая непрерывна в области $|x_i| < h$ и обращается в нуль при $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0$.

Кроме того, функции V могут обладать более специальными свойствами. Введем некоторые определения.

Функцию $V(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_m)$ назовем *определенно-положительной* в области $|x_i| < h$, если всюду в этой области, кроме начала координат (где функция V равна нулю), выполняется неравенство $V > 0$. Если же выполняется неравенство $V < 0$, то функция V называется *определенно-отрицательной.* В том и другом случае функция V называется *знакоопределенной.*

Если в области $|x_i| < h$ функция V может принимать значения только одного знака ($V \geqslant 0$ или $V \leqslant 0$), но может обращаться в нуль не только в начале координат, то она называется *знакопостоянной* (*положительной* или *отрицательной*).

Если в области $|x_i| < h$ функция V может принимать как положительные, так и отрицательные значения, то она называется *знакопеременной* в этой области.

Например, при $m = 2$ функция $V = x_1^2 - x_2^2$ знакопеременна, а функция $V = x_1^2 + x_2^2$ определенно-положительна; функция же $V = x_1^2$ знакопостоянна, так как она обращается в нуль на оси Ox_2, а вне этой оси положительна.

Как узнать, будет функция V знакоопределенной или нет? Если V представляет собой квадратичную форму, то знакоопределенность ее можно установить при помощи известного критерия Сильвестра. Если V — форма нечетной степени, то она, очевидно, будет знакопеременной функцией. В приложениях V часто бывает аналитической функцией в области $|x_i| < h$, если h — достаточно малая величина. В таких случаях при решении вопроса о знакоопределенности функции бывает полезно следующее легко доказываемое утверждение [1]: если величина h достаточно мала, то в области $|x_i| < h$ знакоопределенность и знакопеременность формы сохраняются при добавлении к ней любой совокупности членов более высокого порядка.

При достаточно малых значениях $|c|$ поверхность $V(x_1, x_2, \ldots x_m) = c$, где V — знакоопределенная функция, является замкнутой поверхностью, содержащей внутри себя начало координат. Для доказательства примем для определенности, что V определенно-положительна, и обозначим a точную нижнюю грань функции V на границе области $|x_i| < h$. Так как функция V определенно-положительна, то $a > 0$. Итак, на границе области $|x_i| < h$ $V \geqslant a$. Рассмотрим теперь значения функции V на непрерывной кривой, соединяющей начало координат с какой-либо точкой, лежащей на границе области $|x_i| < h$. В начале этой кривой $V = 0$, а в конце кривой значения функции не меньше чем a. В силу непрерывности функции V в некоторой точке рассматриваемой кривой V обязательно принимает значение c, если только $c < a$, что и будем предполагать. Это означает, что выбранная кривая пересекает поверхность $V = c$. Так как рассматриваемая кривая может быть произвольной, то отсюда следует, что поверхность $V = c$ замкнута и окружает начало координат.

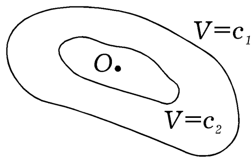

Рис. 174

Если V — определенно-положительная функция и $c_1 > c_2$, то поверхность $V = c_2$ находится внутри поверхности $V = c_1$, причем, в силу однозначности функции V, эти поверхности не имеют общих точек (рис. 174). Если $c \to 0$, то семейство замкнутых поверхностей $V = c$ стягивается в точку, совпадающую с началом координат.

Отметим, что если V будет знакопостоянной или знакопеременной функцией, то поверхности $V = c$ при достаточно малых c разомкнуты.

§ 2. Основные теоремы прямого метода Ляпунова

233. Теорема Ляпунова об устойчивости движения . В этом параграфе рассмотрены теоремы, составляющие основу прямого мето-

[1] См., например, §7 книги; Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.