можно установить при помощи известного критерия Сильвестра. Если V — форма нечетной степени, то она, очевидно, будет знакопеременной функцией. В приложениях V часто бывает аналитической функцией в области $|x_i| < h$, если h — достаточно малая величина. В таких случаях при решении вопроса о знакоопределенности функции бывает полезно следующее легко доказываемое утверждение [1]: если величина h достаточно мала, то в области $|x_i| < h$ знакоопределенность и знакопеременность формы сохраняются при добавлении к ней любой совокупности членов более высокого порядка.

При достаточно малых значениях $|c|$ поверхность $V(x_1,\ x_2, \ldots\ x_m) = c$, где V — знакоопределенная функция, является замкнутой поверхностью, содержащей внутри себя начало координат. Для доказательства примем для определенности, что V определенно-положительна, и обозначим a точную нижнюю грань функции V на границе области $|x_i| < h$. Так как функция V определенно-положительна, то $a > 0$. Итак, на границе области $|x_i| < h$ $V \geqslant a$. Рассмотрим теперь значения функции V на непрерывной кривой, соединяющей начало координат с какой-либо точкой, лежащей на границе области $|x_i| < h$. В начале этой кривой $V = 0$, а в конце кривой значения функции не меньше чем a. В силу непрерывности функции V в некоторой точке рассматриваемой кривой V обязательно принимает значение c, если только $c < a$, что и будем предполагать. Это означает, что выбранная кривая пересекает поверхность $V = c$. Так как рассматриваемая кривая может быть произвольной, то отсюда следует, что поверхность $V = c$ замкнута и окружает начало координат.

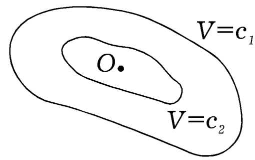

Рис. 174

Если V — определенно-положительная функция и $c_1 > c_2$, то поверхность $V = c_2$ находится внутри поверхности $V = c_1$, причем, в силу однозначности функции V, эти поверхности не имеют общих точек (рис. 174). Если $c \to 0$, то семейство замкнутых поверхностей $V = c$ стягивается в точку, совпадающую с началом координат.

Отметим, что если V будет знакопостоянной или знакопеременной функцией, то поверхности $V = c$ при достаточно малых c разомкнуты.

§ 2. Основные теоремы прямого метода Ляпунова

233. Теорема Ляпунова об устойчивости движения . В этом параграфе рассмотрены теоремы, составляющие основу прямого мето-

[1]См., например, §7 книги; Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.

да Ляпунова в теории устойчивости движения. Будем изучать только установившиеся движения. Сначала рассмотрим теорему Ляпунова об устойчивости.

Теорема. ***Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует знакоопределенная функция V, производная которой $\dot{V}$ в силу этих уравнений является или знакопостоянной функцией противоположного знака с V, или тождественно равной нулю, то невозмущенное движение устойчиво.***

Доказательство.

Пусть, например, V определенно-положительна. Тогда в окрестности

$$|x_i| < h \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ m), \tag{1}$$

где h — достаточно малая величина, точка $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0$ будет точкой строгого локального минимума функции V. Так как $\dot{V} \leqslant 0$, то на траекториях уравнений возмущенного движения в области (1) V будет невозрастающей функцией. Дальнейшее доказательство сводится к почти дословному повторению рассуждений, проведенных в п. 225 при доказательстве теоремы Лагранжа.

Теорема Ляпунова дает достаточные условия устойчивости движения. Применение этой теоремы требует знания функции V, обладающей вполне определенными свойствами. Общих методов построения таких функций нет. Однако во многих практически важных случаях функцию V можно построить, если известны первые интегралы уравнений возмущенного движения. Например, при доказательстве теоремы Лагранжа об устойчивости положения равновесия консервативной системы в качестве функции V годилась полная механическая энергия системы E.

Пусть $U_1,\ U_2, \ldots,\ U_k$ — первые интегралы уравнений возмущенного движения. Без ограничения общности можно считать, что функции $U_j(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_m)$ $(j = 1,\ 2, \ldots,\ k)$ обращаются в нуль в начале координат $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0$. Пусть ни одна из функций U_j не является знакоопределенной. Будем искать[1] функцию Ляпунова в виде связки первых интегралов U_j $(j = 1,\ 2, \ldots,\ k)$:

$$V = \lambda_1 U_1 + \ldots + \lambda_k U_k + \mu_1 U_1^2 + \cdots + \mu_k U_k^2,$$

где λ_j, μ_j $(j = 1,\ 2, \ldots,\ k)$ — неопределенные постоянные. Ясно, что V будет первым интегралом уравнений возмущенного движения.

[1]См.: Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. По вопросу о методе интегральных связок Четаева см. также работу: Пожарицкий Г. К. О построении функции Ляпунова из интегралов уравнений возмущенного движения // ПММ. 1958. Т. 22, вып. 2. С. 145–154.

Если постоянные λ_j, μ_j удастся выбрать так, чтобы функция V была определенно-положительной, то она будет удовлетворять всем условиям теоремы Ляпунова об устойчивости движения. При этом в тех случаях, когда первые интегралы U_j $(j = 1, 2, \dots, k)$ могут быть найдены из каких-либо общих соображений (например, при помощи основных теорем динамики), отпадает необходимость составления самих уравнений возмущенного движения, что существенно упрощает исследование.

Пример 1 (Устойчивость стационарных вращений твердого тела в случае Эйлера). *Как показано в п. 99, при стационарных вращениях твердого тела в случае Эйлера вращение происходит с постоянной по величине угловой скоростью вокруг любой из главных осей инерции тела для неподвижной точки. Изучим устойчивость движения, в котором*

$$p = \omega = \mathrm{const}, \quad q = 0, \quad r = 0. \tag{2}$$

Движение (2) *соответствует вращению вокруг оси, отвечающей моменту инерции A. Как показано в п. 98, динамические уравнения Эйлера имеют два первых интеграла*

$$U_1 = 2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2, \quad U_2 = K_0^2 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2. \tag{3}$$

Введем возмущения x, y, z по формулам

$$p = \omega + x, \quad q = y, \quad r = z. \tag{4}$$

Уравнения возмущенного движения будут иметь первые интегралы

$$U_1 = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2A\omega x, \quad U_2 = A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 + 2A^2\omega x, \tag{5}$$

Последние выражения получены путем подстановки p, q, r из (4) *в интегралы* (3) *и отбрасыванием несущественных постоянных в получившихся выражениях для U_1 и U_2.*

Функцию V возьмем в виде

$$V = U_1^2 + U_2^2. \tag{6}$$

Ясно, что значения функции V неотрицательны при любых x, y, z. Покажем, что если A — наименьший или наибольший из моментов инерции, то функция V определенно-положительна. Для этого достаточно показать, что при малых x, y, z система уравнений

$$U_1 = 0, \quad U_2 = 0 \tag{7}$$

имеет единственное решение $x = y = z = 0$ *Из системы* (7) *следует, что*

$$AU_1 - U_2 \equiv B(A-B)y^2 + C(A-C)z^2 = 0.$$

Если A *— наименьший или наибольший из моментов инерции, то последнее равенство возможно только когда* $y = z = 0$. *Из* (7) *тогда следует, что* $x = 0$ *или* $x = -2\omega$, *и при достаточно малых* x, y, z *система* (7) *имеет единственное решение* $x = y = z = 0$.

Следовательно, стационарные вращения твердого тела в случае Эйлера вокруг оси наименьшего или наибольшего из моментов инерции устойчивы в смысле Ляпунова по отношению к возмущениям величин p, q, r. *Этот факт хорошо иллюстрируется картиной расположения полодий на эллипсоиде инерции* (см. рис. 99): *вблизи осей* Ox *и* Oz *эллипсоида инерции, отвечающих наибольшему и наименьшему моментам инерции, полодии являются замкнутыми кривыми, охватывающими соответствующие оси. Напротив, вблизи оси* Oy*, отвечающей среднему по величине моменту инерции, полодии не охватывают этой оси, и при малом возмущении стационарного вращения вокруг оси* Oy *вектор угловой скорости с течением времени покидает окрестность этой оси. Ниже в п.* 235 *мы строго докажем неустойчивость стационарного вращения вокруг оси среднего по величине момента инерции тела.*

Пример 2 (Устойчивость вращения тяжелого тела вокруг неподвижной точки в случае Лагранжа[1]). *Движение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки описывается системой дифференциальных уравнений* (32), (35) *п.* 105. *В случае Лагранжа* $A = B$, $a = b = 0$ *и уравнения движения имеют четыре первых интеграла*

$$\begin{aligned} U_1 &= A(p^2 + q^2) + Cr^2 + 2Pc\gamma_3 = \text{const},\\ U_2 &= A(p\gamma_1 + q\gamma_2) + Cr\gamma_3 = \text{const},\\ U_3 &= \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1,\\ U_4 &= r = \text{const}. \end{aligned} \tag{8}$$

Уравнения движения имеют частное решение

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = r_0 = \text{const}, \quad \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1, \tag{9}$$

которому отвечает вращение твердого тела вокруг вертикально расположенной оси Oz *с постоянной угловой скоростью* r_0. *Рассмотрим устойчивость такого движения тела по отношению к возмущениям величин* p, q, r, γ_1, γ_2, γ_3. *Положим*

$$p = x_1, \quad q = x_2, \quad r = r_0 + x_3, \quad \gamma_1 = x_4, \quad \gamma_2 = x_5, \quad \gamma_3 = 1 + x_6.$$

[1]См.: Четаев Н. Г. Об устойчивости вращения твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Лагранжа // ПММ.—1954.—Т. 18, вып. 1. — С. 123–124.

Отсюда и из (8) *получаем, что дифференциальные уравнения возмущенного движения имеют следующие первые интегралы:*

$$\begin{aligned} U_1 &= A(x_1^2 + x_2^2) + C(x_3^2 + 2r_0 x_3) + 2Pcx_6 = \text{const}, \\ U_2 &= A(x_1 x_4 + x_2 x_5) + C(x_3 x_6 + x_3 + r_0 x_6) = \text{const}, \\ U_3 &= x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + 2x_6 = \text{const}, \\ U_4 &= x_3 = \text{const}. \end{aligned} \tag{10}$$

Для получения условий устойчивости ищем функцию Ляпунова V в виде квадратичной связки первых интегралов (10) (λ — *неопределенная вещественная постоянная*)

$$V = U_1 + 2\lambda U_2 - (Pc + Cr_0\lambda)U_3 + \frac{C(C-A)}{A}U_4^2 - 2(r_0 + \lambda)CU_4.$$

Функцию V можно представить в виде суммы трех квадратичных форм:

$$V = f(x_1,\ x_4) + f(x_2,\ x_5) + f(\frac{C}{A}x_3,\ x_6), \tag{11}$$

где

$$f(x,\ y) = Ax^2 + 2\lambda Axy - (Pc + Cr_0\lambda)y^2. \tag{12}$$

Из критерия Сильвестра получаем, что квадратичная форма (12) *определенно-положительна при выполнении неравенства*

$$A\lambda^2 + Cr_0\lambda + Pc < 0, \tag{13}$$

которое для вещественных λ может удовлетворяться только тогда, когда

$$C^2 r_0^2 > 4APc. \tag{14}$$

При условии (14) *постоянную λ можно подобрать так, чтобы удовлетворялось неравенство* (13). *Тогда квадратичные формы в выражении* (11) *будут определенно-положительными, каждая относительно «своих» переменных, а функция V будет определенно-положительна относительно всех переменных x_i* ($i = 1,\ 2, \ldots,\ 6$). *Таким образом, согласно теореме Ляпунова, условие* (14) *будет достаточным для устойчивости движения* (9) *по отношению к возмущениям величин p, q, r, γ_1, γ_2, γ_3.*

Условие (14) *называют условием Маиевского–Четаева. Отметим, что если $c < 0$ («висящее» твердое тело; центр масс расположен ниже* *точки подвеса), то условие* (14) *всегда выполнено, а если* $c > 0$*, то для выполнения условия* (14) *требуется, чтобы угловая скорость вращения тела вокруг вертикали превосходила величину, равную* $\dfrac{\sqrt{4APc}}{C}$.

234. Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости. Ляпунов получил следующую теорему, дающую достаточные условия асимптотической устойчивости движения.

Теорема. *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует знакоопределенная функция* $V(x_1, x_2, \ldots, x_m)$*, производная которой* $\dot{V}$ *в силу этих уравнений есть знакоопределенная функция противоположного знака с* V*, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.*

Прежде чем доказывать эту теорему, обратим внимание на дополнительное, по сравнению с теоремой предыдущего пункта, условие, которое обеспечивает асимптотическую устойчивость невозмущенного движения. Это условие состоит в том, что производная $\dot{V}$ должна быть знакоопределенной функцией противоположного с V знака. В предыдущем же пункте функция $\dot{V}$ была лишь знакопостоянной.

Переходя к доказательству, заметим сначала, что если условия сформулированной теоремы выполнены, то выполнены и условия теоремы Ляпунова из предыдущего пункта, а значит, невозмущенное движение устойчиво. Согласно определению асимптотической устойчивости, нам надо только доказать, что всякое возмущенное движение, для которого начальные возмущения достаточно малы, асимптотически приближается к невозмущенному, т. е. что

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t) = 0. \tag{15}$$

Без ограничения общности будем считать, что функция V определенно-положительна; тогда в области (1) $V \geqslant 0$, а $\dot{V} \leqslant 0$, причем знаки равенства возможны только при $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0$. Рассмотрим какое-либо возмущенное движение, которому отвечают настолько малые начальные значения $x_{i0} = x_i(t_0)$ $(i = 1,\ 2, \ldots,\ m)$, что поверхность $V = V_0$, где $V_0 = V(x_{10},\ x_{20}, \ldots,\ x_{m0})$, лежит в области

$$|x_i| < \varepsilon, \tag{16}$$

где $\varepsilon < h$. Такой выбор величин x_{i0} всегда возможен ввиду непрерывности функции V. Покажем, что тогда возмущенные движения $x_i(t)$ $(i = 1,\ 2, \ldots,\ m)$ удовлетворяют условиям (15), т. е. невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

Действительно, при $\varepsilon < h$ в области (16) функция $\dot{V}(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t))$ остается отрицательной, не обращаясь в нуль ни при каких значениях t. Это следует из того, что, в силу единственности решения уравнений возмущенного движения при заданных начальных условиях, функции $x_i(t)$ $(i = 1,\ 2, \ldots, m)$ не могут все одновременно обратиться в нуль при каком-либо значении $t = t^*$; в противном случае было бы два разных решения с нулевыми значениями при $t = t^*$: рассматриваемое и тривиальное $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0$. Так как $\dot{V} < 0$, то функция $V(x_1(t),\ x_2(t), \ldots, x_m(t))$ монотонно убывает, оставаясь положительной. Но так как функция V ограниченная, то существует предел

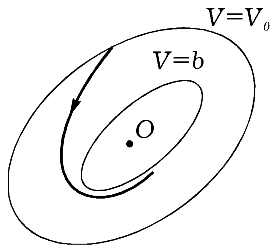

Рис. 175

$$\lim_{t\to\infty} V(x_1(t),\ x_2(t), \ldots, x_m(t)) = b \geqslant 0.$$

В m-мерном пространстве $x_1,\ x_2, \ldots, x_m$ траектория уравнений возмущенного движения стремится к поверхности $V = b$, оставаясь вне ее (рис. 175).

Покажем, что $b = 0$, т. е. поверхность $V = b$ вырождается в точку $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0$ и, следовательно, невозмущенное движение асимптотически устойчиво. Предположим обратное, т. е. что $b \neq 0$. Пусть $-d$ — точная верхняя грань функции $\dot{V}$ в замкнутой области, границами которой являются поверхности $V = b$ и $V = V_0$, т. е. в этой области

$$\dot{V} \leqslant -d. \tag{17}$$

Отсюда следует, что

$$V(x_1(t),\ x_2(t), \ldots, x_m(t)) = V_0 + \int_{t_0}^{t} \dot{V}\, dt \leqslant V_0 - d(t - t_0), \tag{18}$$

но это невозможно, так как при выполнении неравенства (18) определенно-положительная функция $V(x_1(t),\ x_2(t), \ldots, x_m(t))$ для достаточно больших t должна была бы стать отрицательной. Противоречие доказывает теорему.

Пример 1 (Асимптотическая устойчивость равновесия твердого тела, имеющего неподвижную точку, в среде с сопротивлением). *Пусть тело вращается вокруг неподвижной точки O в среде, создающей* *момент сопротивления*

$$\boldsymbol{M}_0 = -f(\omega)\cdot\boldsymbol{\omega}, \tag{19}$$

где $f(\omega) > 0$. *Если существуют другие силы, приложенные к твердому телу, то их главный момент относительно точки* O *считаем равным нулю. Динамические уравнения Эйлера имеют вид*

$$\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} + (C-B)qr &= -f(\omega)p, \\ B\frac{dq}{dt} + (A-C)rp &= -f(\omega)q, \\ C\frac{dr}{dt} + (B-A)pq &= -f(\omega)r. \end{aligned} \tag{20}$$

Уравнения (20) *имеют частное решение* $p = q = r = 0$, *отвечающее покою тела. Рассмотрим устойчивость этого частного движения тела по отношению к переменным* p, q, r.

Так как в невозмущенном движении $p = q = r = 0$, *то уравнения* (20) *будут дифференциальными уравнениями возмущенного движения. В качестве функции Ляпунова возьмем кинетическую энергию тела*

$$V = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2). \tag{21}$$

Для производной функции V *получаем выражение*

$$\dot V = -f(\omega)(p^2 + q^2 + r^2). \tag{22}$$

Так как V *— определенно-положительная, а* $\dot V$ *— определенно-отрицательная функции, то, согласно теореме Ляпунова, равновесие твердого тела в среде, создающей момент сопротивления* (9), *асимптотически устойчиво по отношению к переменным* p, q, r.

235. Теоремы о неустойчивости. В этом пункте рассмотрены три теоремы о неустойчивости движения, полученные Ляпуновым и Четаевым. Исторически сначала были получены две теоремы Ляпунова. Эти теоремы были обобщены Четаевым, получившим теорему, которая нашла широкое применение при решении задачи об устойчивости в конкретных задачах механики, а также в теоретических исследованиях вопросов устойчивости. Мы сначала изложим теорему Четаева и затем выведем из нее обе теоремы Ляпунова о неустойчивости движения.

Переходя к изложению теорем, заметим, что для обнаружения неустойчивости невозмущенного движения достаточно установить существование хотя бы одной траектории уравнений возмущенного движения, отвечающей сколь угодно малым значениям начальных возмущений и покидающей в некоторый момент времени окрестность начала координат, определяемую неравенствами (1), в которых h — некоторая заданная величина.

Введем определение. *Областью* $V > 0$ назовем какую-либо область окрестности (1), в которой $V(x_1,\ x_2, \dots ,\ x_m) > 0$. Поверхность $V = 0$ назовем *границей области* $V > 0$.

Теорема (Четаева о неустойчивости). *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует функция* $V(x_1,\ x_2, \dots ,\ x_m)$ *такая, что в сколь угодно малой окрестности* (1) *существует область* $V > 0$ *и во всех точках области* $V > 0$ *производная* $\dot V$ *в силу этих уравнений принимает положительные значения, то невозмущенное движение неустойчиво.*

Доказательство.

Зададимся окрестностью (1) начала координат. Выберем начальную точку $x_{10},\ x_{20}, \dots ,\ x_{m0}$ какой-либо траектории уравнений возмущенного движения в области $V > 0$. Так как граница области $V > 0$ проходит через точку $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0$, то начальную точку можно взять сколь угодно близко к началу координат (см. рис. 176, где $m = 2$).

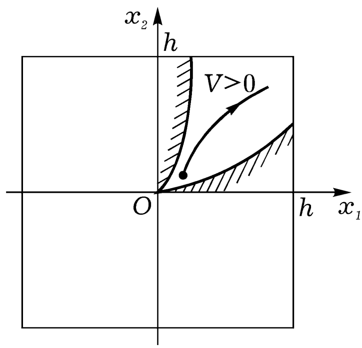

Рис. 176

Так как по условию теоремы в области $V > 0$ производная $\dot V$ положительна, то вдоль выбранной траектории функция V монотонно возрастает. Следовательно, при $t > t_0$ будем иметь

$$V(x_1(t),\ x_2(t), \dots ,\ x_m(t)) > V_0 > 0,$$

где $V_0 = V(x_{10},\ x_{20}, \dots ,\ x_{m0})$. Поэтому траектория, начавшаяся в точке $x_{10}, x_{20}, \dots , x_{m0}$, не может выйти из области $V > 0$ через ее границу $V = 0$. Покажем, что с течением времени траектория выйдет из окрестности (1). Предположим обратное, т. е. что траектория при всех t остается внутри окрестности (1). Но тогда она должна находиться в области $V > 0$. Но это невозможно. Действительно, функция V, как непрерывная и не зависящая явно от t, будет в области (1) при достаточно малых h ограничена, т. е.

$$V \leqslant L, \tag{23}$$

где L — некоторое положительное число. В области G, являющейся пересечением областей $V > 0$ и $V > V_0$, функция $\dot V$ положительна и тоже ограничена. Пусть l — точная нижняя грань функции $\dot{V}$ в этой области. Тогда при всех $t > t_0$

$$\dot{V} \geqslant l > 0. \tag{24}$$

Отсюда следует, что

$$V(x_1(t),\ x_2(t), \ldots ,\ x_m(t)) \geqslant V_0 + l(t - t_0),$$

т. е. с течением времени функция V неограниченно возрастает, а это противоречит неравенству (23). Противоречие доказывает теорему.

Функцию V, удовлетворяющую теореме Четаева о неустойчивости, называют *функцией Четаева.*

Пример 1 (Неустойчивость стационарного вращения твердого тела в случае Эйлера вокруг оси среднего по величине момента инерции[1]). *Рассмотрим устойчивость вращения* (2) *твердого тела в случае Эйлера, предполагая, что ось вращения отвечает среднему по величине главному моменту инерции тела для неподвижной точки O. Для определенности будем считать, что $C > A > B$ и $\omega > 0$.*

Введя возмущения x, y, z по формулам (4), *из динамических уравнении Эйлера получим дифференциальные уравнения возмущенного движения в виде*

$$\dot{x} = \frac{B - C}{A} yz, \quad \dot{y} = \frac{C - A}{B}(\omega + x)z, \quad \dot{z} = \frac{A - B}{C}(\omega + x)y. \tag{25}$$

Производная функции $V = yz$ в силу уравнений (25) *будет такой:*

$$\dot{V} = (\omega + x)\left(\frac{C - A}{B} z^2 + \frac{A - B}{C} y^2\right). \tag{26}$$

Если $\omega + x > 0$, то в области $V > 0$, определяемой неравенствами $y > 0, z > 0$, производная $\dot{V}$ положительна. На основании теоремы Четаева отсюда следует вывод о неустойчивости вращения тела вокруг оси, отвечающей среднему по величине моменту инерции.

Теперь получим теоремы Ляпунова о неустойчивости.

Теорема (Первая теорема Ляпунова о неустойчивости движения). *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует функция $V(x_1,\ x_2, \ldots ,\ x_m)$ такая, что ее производная $\dot{V}$ в силу этих уравнений есть функция знакоопределенная, а сама функция V не является знакопостоянной, противоположного с $\dot{V}$ знака, то невозмущенное движение неустойчиво.*

---

[1]См. уже упомянутую книгу Н. Г. Четаева «Устойчивость движения. Работы по аналитической механике».

Доказательство.

Достаточно заметить, что при условиях теоремы 2 выполняются условия теоремы Четаева о неустойчивости. Действительно, пусть функция $\dot{V}$ определенно-положительна. Тогда, в силу того, что V не является знакопостоянной функцией, противоположного с $\dot{V}$ знака, существует область $V > 0$, расположенная сколь угодно близко к началу координат, и в этой области $\dot{V} > 0$.

Теорема (Вторая теорема Ляпунова о неустойчивости движения). *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует функция V такая, что ее производная, в силу этих уравнений, в области* (1) *может быть представлена в виде*

$$\dot{V} = æV + W, \tag{27}$$

где æ — положительная постоянная, а W или тождественно обращается в нуль, или представляет собой знакопостоянную функцию, и если в последнем случае функция V не является знакопостоянной, противоположного с W знака, то невозмущенное движение неустойчиво.

Доказательство.

Как и в предыдущем случае, для доказательства теоремы 3 достаточно проверить, что при выполнении ее условий выполняются также и условия теоремы Четаева о неустойчивости.

Если W тождественно равна нулю, то из (27) сразу следует, что функция $\dot{V}$ положительна в области $V > 0$, которая обязательно существует в сколь угодно малой окрестности начала координат (при необходимости, когда, например, функция V определенно-отрицательна, надо вместо V взять функцию $-V$). Следовательно, если $W \equiv 0$, то условия теоремы Четаева выполнены.

Пусть теперь W не равна тождественно нулю и для определенности будем ее считать знакопостоянной (положительной). Тогда, в силу того, что V не является знакопостоянной, противоположного с W знака, в любой сколь угодно малой окрестности начала координат существует область $V > 0$. Но из (27) при $W \geqslant 0$ следует, что во всей окрестности (1)

$$\dot{V} \geqslant æV.$$

Следовательно, в области $V > 0$ производная $\dot{V}$ положительна. Поэтому и в этом случае условия теоремы Четаева выполнены.

§ 3. Устойчивость по первому приближению

236. Постановка задачи. Будем рассматривать устойчивость установившихся движений. Дифференциальные уравнения возмущен-