Доказательство.

Достаточно заметить, что при условиях теоремы 2 выполняются условия теоремы Четаева о неустойчивости. Действительно, пусть функция $\dot{V}$ определенно-положительна. Тогда, в силу того, что V не является знакопостоянной функцией, противоположного с $\dot{V}$ знака, существует область $V > 0$, расположенная сколь угодно близко к началу координат, и в этой области $\dot{V} > 0$.

Теорема (Вторая теорема Ляпунова о неустойчивости движения). *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует функция V такая, что ее производная, в силу этих уравнений, в области* (1) *может быть представлена в виде*

$$\dot{V} = æV + W, \tag{27}$$

где $æ$ — положительная постоянная, а W или тождественно обращается в нуль, или представляет собой знакопостоянную функцию, и если в последнем случае функция V не является знакопостоянной, противоположного с W знака, то невозмущенное движение неустойчиво.

Доказательство.

Как и в предыдущем случае, для доказательства теоремы 3 достаточно проверить, что при выполнении ее условий выполняются также и условия теоремы Четаева о неустойчивости.

Если W тождественно равна нулю, то из (27) сразу следует, что функция $\dot{V}$ положительна в области $V > 0$, которая обязательно существует в сколь угодно малой окрестности начала координат (при необходимости, когда, например, функция V определенно-отрицательна, надо вместо V взять функцию $-V$). Следовательно, если $W \equiv 0$, то условия теоремы Четаева выполнены.

Пусть теперь W не равна тождественно нулю и для определенности будем ее считать знакопостоянной (положительной). Тогда, в силу того, что V не является знакопостоянной, противоположного с W знака, в любой сколь угодно малой окрестности начала координат существует область $V > 0$. Но из (27) при $W \geqslant 0$ следует, что во всей окрестности (1)

$$\dot{V} \geqslant æV.$$

Следовательно, в области $V > 0$ производная $\dot{V}$ положительна. Поэтому и в этом случае условия теоремы Четаева выполнены.

§ 3. Устойчивость по первому приближению

236. Постановка задачи. Будем рассматривать устойчивость установившихся движений. Дифференциальные уравнения возмущенного движения запишем в виде

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \mathbf{A}\boldsymbol{x} + \mathbf{X}(\boldsymbol{x}), \tag{1}$$

где $\boldsymbol{x}$ — вектор-столбец, $\boldsymbol{x}' = (x_1, \ x_2, \ldots, \ x_m)$; $\mathbf{A}$ — постоянная квадратная матрица m-го порядка; $\mathbf{X}$ — вектор-функция от $x_1, x_2, \ldots, x_m$, $\mathbf{X}' = (X_1, X_2, \ldots, X_m)$; функции $X_i (i = 1, \ 2, \ldots, \ m)$ будем считать аналитическими в окрестности начала координат $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0$, причем их разложения в ряды начинаются с членов не ниже второго порядка малости относительно $x_1, \ x_2, \ldots, \ x_m$.

В приложениях вопрос об устойчивости движения очень часто исследуется при помощи уравнений первого приближения

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \mathbf{A}\boldsymbol{x}, \tag{2}$$

которые получаются из полных уравнений возмущенного движения (1), если в последних отбросить нелинейные относительно $x_1, \ x_2, \ldots, \ x_m$ члены.

Рассмотрим уравнения (2) подробнее. Пусть $\lambda_1, \ \lambda_2, \ldots, \ \lambda_m$ — корни характеристического уравнения[1]

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0, \tag{3}$$

а $\boldsymbol{h}_j$ — собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, отвечающий корню λ_j.

Если матрица $\mathbf{A}$ приводится к диагональной форме, то существуют m линейно независимых собственных векторов и общее решение системы (1) имеет вид[2]

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{m} c_j \boldsymbol{h}_j e^{\lambda_j t}, \tag{4}$$

где c_j — произвольные постоянные.

Если же матрица $\mathbf{A}$ к диагональной форме не приводится, то общее решение системы (2) будет записываться в виде

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{m} c_j \boldsymbol{k}_j e^{\lambda_j t}, \tag{5}$$

[1] Среди величин $\lambda_1, \ \lambda_2, \ldots, \ \lambda_m$ могут быть и равные.

[2] См., например, гл. 2 учебника: Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1970.

где компоненты векторов $\boldsymbol{k}_j$ являются многочленами относительно t. Например, общее решение системы

$$\dot{x}_1 = \lambda x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = \lambda x_2$$

имеет вид

$$\left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right\| = c_1 \left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\| e^{\lambda t} + c_2 \left\| \begin{matrix} t \\ 1 \end{matrix} \right\| e^{\lambda t}.$$

Если бы уравнения возмущенного движения были линейными, то по их общему решению, (4) или (5), вопрос об устойчивости невозмущенного движения решался бы очень просто; в частности, необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости была бы отрицательность вещественных частей всех корней характеристического уравнения; при наличии же хотя бы одного корня с положительной вещественной частью движение было бы неустойчивым.

Но, как правило, уравнения возмущенного движения нелинейны. Поэтому возникает задача об определении условий, при которых выводы об устойчивости, полученные из анализа уравнений первого приближения (2), справедливы и для полных уравнений возмущенного движения (1) при любых нелинейных членах $X_1, X_2, \ldots, X_m$. Эта задача была полностью решена Ляпуновым.

237. Теорема об устойчивости по первому приближению. Один из основных результатов, полученных Ляпуновым при решении задачи об устойчивости по первому приближению, можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема. *Если все корни характеристического уравнения* (3) *имеют отрицательные вещественные части, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво независимо от нелинейных членов в* (1). *Если же среди корней характеристического уравнения есть хотя бы один с положительной вещественной частью, то невозмущенное движение неустойчиво — тоже независимо от нелинейных членов в* (1).

Доказательство.

Если в уравнениях (1) сделать замену переменных по формуле

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{C}\boldsymbol{y} \quad (\det \mathbf{C} \neq 0), \tag{6}$$

то они станут такими:

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = \mathbf{B}\boldsymbol{y} + \mathbf{Y}(\boldsymbol{y}), \tag{7}$$

где $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$, а $\mathbf{Y}(\boldsymbol{y}) = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{X}(\mathbf{C}\boldsymbol{y})$. Матрицу $\mathbf{C}$ (которая, вообще говоря, комплексная) выберем так, чтобы матрица $\mathbf{B}$ была нормальной жордановой формой матрицы **A**, т. е. чтобы матрица **B** состояла из одной или нескольких жордановых клеток, расположенных по ее главной диагонали, а все элементы, не входящие в жордановы клетки, равнялись бы нулю[1]:

$$\mathbf{B} = \begin{Vmatrix} \mathbf{J}_1 & & & \\ & \mathbf{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{J}_m \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{J}_k = \begin{Vmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_k & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_k \end{Vmatrix}$$

В уравнениях (7) сделаем еще одну вспомогательную замену переменных по формулам

$$y_j = \mu^j z_j \quad (j = 1,\ 2, \dots,\ m),$$

где μ — положительное, вообще говоря, малое число; условие для более конкретного его выбора будет видно из дальнейшего. В переменных $z_1,\ z_2, \dots,\ z_m$ система (7) запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= \lambda_1 z_1 + \mu a_1 z_2 + Z_1, \\ \frac{dz_2}{dt} &= \qquad \lambda_2 z_2 + \mu a_2 z_3 + Z_2, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dz_m}{dt} &= \qquad\qquad \lambda_m z_m + Z_m. \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь a_j, равняется 0 или 1; $Z_1,\ Z_2, \dots,\ Z_m$ — нелинейные члены относительно переменных $z_1,\ z_2, \dots,\ z_m$, являющихся, вообще говоря, комплексными.

Пусть r_j и s_j — действительная и мнимая части корня λ_j характеристического уравнения (3), т. е. $\lambda_j = r_j + is_j$ $(j = 1,\ 2, \dots,\ m)$; здесь i — мнимая единица.

а) Пусть $r_j < 0$ для всех $j = 1,\ 2, \dots,\ m$. Для доказательства асимптотической устойчивости невозмущенного движения рассмотрим функцию

$$V = \sum_{j=1}^{m} z_j \overline{z}_j, \tag{9}$$

[1]См. гл. 6 книги: Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.

где чертой обозначена комплексно сопряженная величина. Функция (9) является определенно-положительной функцией исходных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Для ее производной в силу уравнений (8) получаем выражение

$$\dot{V} = 2\sum_{j=1}^{m} r_j z_j \overline{z}_j + \mu F + \sum_{j=1}^{m}(\overline{z}_j Z_j + z_j \overline{Z}_j), \tag{10}$$

где F — вещественная квадратичная форма, которая тождественно равна нулю, если все коэффициенты a_j в системе (8) равны нулю, т. е. если матрица A приводится к диагональной форме.

Функция (10) является вещественной функцией исходных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Так как $r_j < 0$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$, то квадратичная часть функции $\dot{V}$ будет определенно-отрицательной функцией, если число μ достаточно мало. А так как последняя сумма в правой части выражения (10) содержит совокупность членов не ниже третьего порядка, то и вся функция V при достаточно малых μ будет определенно-отрицательной.

На основании теоремы Ляпунова об асимпотической устойчивости получаем отсюда вывод об асимптотической устойчивости невозмущенного движения, если вещественные части всех корней характеристического уравнения отрицательны.

б) Пусть теперь $r_1 > 0, r_2 > 0, \ldots, r_k > 0, r_{k+1} \leqslant 0, \ldots, r_m \leqslant 0$. Для доказательства неустойчивости невозмущенного движения воспользуемся второй теоремой Ляпунова о неустойчивости. Пусть

$$V = -\sum_{j=1}^{k} z_j \overline{z}_j + \sum_{j=k+1}^{m} z_j \overline{z}_j. \tag{11}$$

Ее производную в силу уравнений (8)

$$\begin{aligned}\dot{V} = &-2\sum_{j=1}^{k} r_j z_j \overline{z}_j + 2\sum_{j=k+1}^{m} r_j z_j \overline{z}_j + \mu G - \\ &-\sum_{j=1}^{k}(\overline{z}_j Z_j + z_j \overline{Z}_j) + \sum_{j=k+1}^{m}(\overline{z}_j Z_j + z_j \overline{Z}_j)\end{aligned}$$

можно записать в виде

$$\dot{V} = æV + W, \tag{12}$$

где æ — пока неопределенное положительное число, а

$$
\begin{aligned}
W = \sum_{j=1}^{k}(æ - 2r_j)z_j\bar{z}_j + \sum_{j=k+1}^{m}(2r_j - æ)z_j\bar{z}_j + \mu G - \\
- \sum_{j=1}^{k}(\bar{z}_j Z_j + z_j \overline{Z}_j) + \sum_{j=k+1}^{m}(\bar{z}_j Z_j + z_j \overline{Z}_j).
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Здесь G — квадратичная форма, появляющаяся в выражении для $\dot{V}$ тогда, когда не все коэффициенты a_j в системе (8) равны нулю.

Выберем число æ так, чтобы для $j = 1, 2, \ldots, k$ выполнялись неравенства $0 < æ < 2r_j$. Тогда при достаточно малых μ функция W будет определенно-отрицательной. Но функция V, очевидно, знакопеременная и, следовательно, не является знакопостоянной, противоположного с W знака. На основании второй теоремы Ляпунова о неустойчивости получаем отсюда вывод о том, что при наличии хотя бы одного корня характеристического уравнения с положительной вещественной частью невозмущенное движение неустойчиво. Теорема доказана.

Замечание 1. *Ляпунов также показал*[1]*, что если у характеристического уравнения* (3) *нет ни одного корня с положительной вещественной частью, но есть корни, у которых вещественная часть равна нулю, то можно так подобрать нелинейные члены в уравнениях возмущенного движения* (1)*, чтобы имела место устойчивость или неустойчивость, по желанию.*

Все случаи, которые могут представиться при решении задачи об устойчивости, можно разбить на некритические и критические. В некритических случаях вопрос об устойчивости решается рассмотрением уравнений первого приближения (2). В критических случаях уравнений первого приближения недостаточно: для решения задачи об устойчивости обязательно требуется привлечение нелинейных членов в уравнениях возмущенного движения (1). Из доказанной выше теоремы следует, что критическими будут те и только то случаи, когда характеристическое уравнение (2) не имеет корней с положительными вещественными частями, но имеет корни с вещественными частями, равными нулю.

238. Критерий Рауса–Гурвица. Для практического использования теоремы об устойчивости по первому приближению важно определить знаки вещественных частей характеристического уравнения. В частности, желательно иметь критерий, позволяющий по коэффициен-

[1] Ляпунов А. М. К вопросу об устойчивости движения // Собр. соч. Т. 2, М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 267–271.

там характеристического уравнения определить, будут ли все его корни иметь отрицательные вещественные части или нет.

Запишем характеристическое уравнение (3) в виде

$$a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \ldots + a_{m-1}\lambda + a_m = 0. \tag{14}$$

Коэффициенты $a_0,\ a_1, \ldots ,\ a_m$, этого уравнения — вещественные числа. Не ограничивая общности, будем в дальнейшем считать, что старший коэффициент a_0 положителен.

Получим сначала одно очень простое необходимое условие отрицательности вещественных частей всех корней $\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots ,\ \lambda_m$ уравнения (14): *для того чтобы при $a_0 > 0$ все корни уравнения* (14) *имели отрицательные вещественные части, необходимо, чтобы все его коэффициенты были положительны.* Доказательство этого утверждения непосредственно вытекает из формул Виета:

$$\begin{aligned} &\frac{a_1}{a_0} = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m), \\ &\frac{a_2}{a_0} = \lambda_1\lambda_2 + \ldots + \lambda_{m-1}\lambda_m, \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ &\frac{a_m}{a_0} = (-1)^m\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_m. \end{aligned} \tag{15}$$

Но положительность всех коэффициентов уравнения (14) не является достаточным условием того, что его корни имеют отрицательные вещественные части. Необходимое и достаточное условие дается критерием Рауса–Гурвица. Сформулируем соответствующую теорему, не приводя ее доказательства[1]. Назовем *матрицей Гурвица* квадратную матрицу m-го порядка

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & a_m \end{matrix} \right\| . \tag{16}$$

Эта матрица строится следующим образом: по ее главной диагонали стоят коэффициенты a_i ($i = 1,\ 2, \ldots ,\ m$) в порядке возрастания значений индекса i; в каждом столбце элементы, стоящие выше главной диагонали, расположены так, что соответствующие им коэффициенты a_j

[1]Доказательство см., например, в гл. 16 книги: Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.; Наука, 1967.

идут в порядке последовательного возрастания индекса j на единицу, а ниже главной диагонали — в порядке последовательного убывания индекса j; те места матрицы, куда при таком правиле образования ее элементов следовало бы вписать коэффициенты a_j для $j < 0$ или $j > m$, заполняются нулями.

Составим главные миноры матрицы (16) (*определители Гурвица*)

$$\Delta_1 = a_1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \dots,\ \Delta_m = a_m \Delta_{m-1}. \quad (17)$$

Теорема (Критерий Рауса–Гурвица). *Для того чтобы все корни уравнения* (14) *с вещественными коэффициентами и положительным старшим коэффициентом* a_0 *имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства*

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \dots, \quad \Delta_m > 0. \quad (18)$$

Отметим, также без доказательства, что если при $a_0 > 0$ хотя бы одно из неравенств (18) имеет противоположный смысл, то уравнение (14) имеет корни, вещественные части которых положительны.

Рассмотрим простейшие частные случаи (везде предполагается, что $a_0 > 0$).

Пример 1 (Уравнение первой степени ($m = 1$)).

$$a_0\lambda + a_1 = 0.$$

Условия (18) *сводятся к неравенству*

$$a_1 > 0. \quad (19)$$

Пример 2 (Уравнение второй степени ($m = 2$)).

$$a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0.$$

Определители Гурвица (17) *будут такими:*

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = a_1 a_2.$$

Условия (18) *запишутся в виде неравенств*

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0. \quad (20)$$

Пример 3 (Уравнение третьей степени).

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0.$$

Здесь

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3, \quad \Delta_3 = a_3 \Delta_2,$$

и условия (18) *означают, что*

$$a_1 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0. \tag{21}$$

Эти неравенства показывают, что при $m > 2$ *положительности коэффициентов уравнения* (14) *недостаточно для того, чтобы все его корни имели отрицательные вещественные части: при* $m = 3$ *нужно еще потребовать выполнения неравенства* $a_1 a_2 > a_0 a_3$.

Пример 4 (Уравнение четвертой степени).

$$a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0. \tag{22}$$

Определители Гурвица имеют вид

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3, \quad \Delta_3 = a_3 \Delta_2 - a_4 a_1^2, \quad \Delta_4 = a_4 \Delta_3.$$

Условия отрицательности вещественных корней уравнения (22) *запишутся, как нетрудно проверить, в виде неравенств*

$$a_1 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_4 > 0, \quad a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_4 a_1^2 > 0. \tag{23}$$

§ 4. Влияние диссипативных и гироскопических сил на устойчивость равновесия консервативной системы

239. Влияние гироскопических сил и диссипативных сил с полной диссипацией на устойчивое положение равновесия голономной системы. В п. 225 отмечалось, что при добавлении к консервативной голономной системе гироскопических и диссипативных сил теорема Лагранжа об устойчивости положения равновесия консервативной системы при наличии строгого локального минимума потенциальной энергии остается справедливой, т. е. устойчивое при одних потенциальных силах положение равновесия системы остается устойчивым и при наличии гироскопических и диссипатипных сил. Это утверждение содержит только часть результатов, полученных Томсоном, Тэтом и Четаевым в задаче о влиянии гироскопических и диссипативных сил на устойчивость положения равновесия голономной консервативной системы. В данном параграфе рассмотрим другие теоремы Томсона–Тэта–Четаева.