*Здесь*

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3, \quad \Delta_3 = a_3 \Delta_2,$$

*и условия* (18) *означают, что*

$$a_1 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0. \tag{21}$$

*Эти неравенства показывают, что при $m > 2$ положительности коэффициентов уравнения* (14) *недостаточно для того, чтобы все его корни имели отрицательные вещественные части: при $m = 3$ нужно еще потребовать выполнения неравенства $a_1 a_2 > a_0 a_3$.*

Пример 4 (Уравнение четвертой степени).

$$a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0. \tag{22}$$

*Определители Гурвица имеют вид*

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3, \quad \Delta_3 = a_3 \Delta_2 - a_4 a_1^2, \quad \Delta_4 = a_4 \Delta_3.$$

*Условия отрицательности вещественных корней уравнения* (22) *запишутся, как нетрудно проверить, в виде неравенств*

$$a_1 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_4 > 0, \quad a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_4 a_1^2 > 0. \tag{23}$$

## § 4. Влияние диссипативных и гироскопических сил на устойчивость равновесия консервативной системы

**239. Влияние гироскопических сил и диссипативных сил с полной диссипацией на устойчивое положение равновесия голономной системы.** В п. 225 отмечалось, что при добавлении к консервативной голономной системе гироскопических и диссипативных сил теорема Лагранжа об устойчивости положения равновесия консервативной системы при наличии строгого локального минимума потенциальной энергии остается справедливой, т. е. устойчивое при одних потенциальных силах положение равновесия системы остается устойчивым и при наличии гироскопических и диссипатипных сил. Это утверждение содержит только часть результатов, полученных Томсоном, Тэтом и Четаевым в задаче о влиянии гироскопических и диссипативных сил на устойчивость положения равновесия голономной консервативной системы. В данном параграфе рассмотрим другие теоремы Томсона–Тэта–Четаева.

**Теорема.** *Если в некотором изолированном положении равновесия потенциальная энергия имеет строгий локальный минимум, то при добавлении гироскопических сил и диссипативпых сил с полной диссипацией это положение равновесия становится асимптотически устойчивым.*

*Доказательство.*

Без ограничения общности будем считать, что в положении равновесия все обобщенные координаты $q_i$ равны нулю. Для доказательства теоремы возьмем функцию $V$, совпадающую с полной механической энергией системы $E = T + \Pi$. По условию теоремы она будет определенно-положительной в окрестности начала координат $2n$-мерного пространства состояний $q_i$, $\dot{q}_i$ $(i = 1,\ 2, \ldots,\ n)$. Из условия теоремы следует, что

$$\dot{V} = N^*(q_j,\ \dot{q}_j) = \sum_{i=1}^{n} Q_i^*(q_j,\ \dot{q}_j)\dot{q}_i \leqslant 0, \tag{1}$$

где $Q_i^*$ — непотенциальная обобщенная сила, отвечающая обобщенной координате $q_i$ $(i = 1,\ 2, \ldots,\ n)$, и знак равенства достигается только при $\dot{q}_i = 0$ $(i = 1,\ 2, \ldots,\ n)$.

Из знакоопределенности функции $V$ и неравенства (1) на основании теоремы Ляпунова об устойчивости получаем, что положение равновесия устойчиво. Для доказательства асимптотической устойчивости теперь достаточно убедиться в том, что если начальная точка траектории взята достаточно близко к началу координат $q_i = 0$, $\dot{q}_i = 0$, то при $t \to \infty$ имеем $q_i \to 0$, $\dot{q}_i \to 0$ для всех $i = 1,\ 2, \ldots,\ n$.

Пусть движение происходит в столь малой окрестности начала координат, что последняя не содержит других положений равновесия, кроме $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0$, а мощность $N^*$ непотенциальных сил является определенно-отрицательной функцией обобщенных скоростей. Выбор такой окрестности всегда возможен в силу изолированности и устойчивости положения равновесия $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0$.

Приращение $\Delta V$ на любом конечном интервале времени $\Delta t$ отрицательно, так как $N^* = 0$ только при $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \ldots = \dot{q}_n = 0$, и в выбранной окрестности вне начала координат эти равенства не могут иметь места в течение конечного времени $\Delta t$, так как начало координат является изолированным положением равновесия. Действительно, если бы на интервале $\Delta t$ выполнялись равенства $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \ldots = \dot{q}_n = 0$, но не все $q_i$ были бы равны 0, то, как показано в п. 225, все гироскопические и диссипативные силы $Q_i^*(q_j,\ \dot{q}_j)$ были бы равны нулю и из уравнений Лагранжа второго рода (28) п. 142 следовало бы, что $\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0$ $(i = 1,\ 2, \ldots,\ n)$ вне начала координат, т. е. изучаемое положение равновесия не было бы изолированным. Таким образом, в достаточно малой окрестности начала координат функция $V$ монотонно убывает. С возрастанием $t$ она стремится к некоторому неотрицательному пределу $b$. Аналогично п. 234 можно показать, что случай $b \neq 0$ невозможен и, следовательно, $V \to 0$ при $t \to \infty$. Но так как $V$ — знакоопределенная функция величин $q_i$, $\dot{q}_i$ $(i = 1,\ 2, \ldots,\ n)$, то отсюда следует, что $q_i \to 0$, $\dot{q}_i \to 0$, при $t \to \infty$. Теорема доказана.

**240. Влияние гироскопических и диссипативных сил на неустойчивое равновесие.** Пусть положение равновесия консервативной системы неустойчиво. Нельзя ли добавлением диссипативных сил стабилизировать его, т. е. нельзя ли так подобрать диссипативные силы, чтобы неустойчивое при наличии одних потенциальных сил положение равновесия стало устойчивым или даже, может быть, асимптотически устойчивым? Ответ на этот вопрос отрицательный.

Введем некоторые вспомогательные понятия. Как и в задаче о малых колебаниях, будем считать, что кинетическая энергия консервативной системы в окрестности положения равновесия является определенно-положительной квадратичной формой относительно обобщенных скоростей:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,\ k=1}^{n} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k, \tag{2}$$

где $a_{ik}$ — постоянные коэффициенты. Пусть, далее, потенциальная энергия в окрестности положения равновесия $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0$ разлагается в ряд по степеням $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n$ и квадратичная часть этого ряда не равна тождественно нулю. Тогда считаем, что

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,\ k=1}^{n} c_{ik} q_i q_k, \tag{3}$$

где $c_{ik}$ — постоянные величины. Квадратичные формы (2) и (3) можно одновременно привести к сумме квадратов при помощи вещественной линейной замены переменных $\boldsymbol{q} \to \boldsymbol{\theta}$ (см., например, п. 229, где рассматривались главные координаты и главные колебания консервативной системы в окрестности положения равновесия). В новых переменных

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \dot{\theta}_i^2, \qquad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \theta_i^2. \tag{4}$$

Величины $\lambda_i$ Пуанкаре предложил называть *коэффициентами устойчивости.* Если, как в п. 229, функция (3) определенно-положительна, то все величины $\lambda_i$ положительны и положение равновесия устойчиво. Если же хотя бы одна из величин $\lambda_i$ отрицательна, то положение равновесия неустойчиво[1]. Число отрицательных коэффициентов устойчивости называется *степенью неустойчивости.* В дальнейшем важна будет не сама степень неустойчивости, а ее четность или нечетность. Пусть $\mathbf{C}$ — матрица квадратичной формы (3). Тогда $\det \mathbf{C} = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$. Отсюда следует, что если $\det \mathbf{C} > 0$, то степень неустойчивости четная (или равняется нулю), а если $\det \mathbf{C} < 0$, то степень неустойчивости нечетная.

**Теорема 1.** ***Если среди коэффициентов устойчивости хотя бы один является отрицательным, то изолированное положение равновесия не может быть стабилизировано диссипативными силами с полной диссипацией.***

*Доказательство.*

Пусть $V = -E = -T - \Pi$. Тогда

$$\dot{V} = -N^* \geqslant 0, \tag{5}$$

где $N^*$ — мощность диссипативных сил, являющаяся по условию теоремы определенно-отрицательной функцией обобщенных скоростей.

Приращение $\Delta V$ на любом конечном интервале времени $\Delta t$ положительно; это показывается совершенно аналогично тому, как показана отрицательность $\Delta V$ в теореме предыдущего пункта. Далее, так как среди величин $\lambda_i$, есть хотя бы одна отрицательная, то в любой сколь угодно малой окрестности начала координат $2n$-мерного пространства состояний $q_i$, $\dot{q}_i$ $(i = 1,\ 2, \ldots,\ n)$ существует область $V > 0$. Дальнейшие рассуждения аналогичны проведенным в п. 235 при доказательстве теоремы Четаева о неустойчивости.

Итак, диссипативными силами с полной диссипацией стабилизации добиться невозможно. А нельзя ли стабилизировать положение равновесия при помощи гироскопических сил? Частичный ответ на этот вопрос содержится в следующей теореме. Будем рассматривать гироскопические силы, линейные относительно обобщенных скоростей.

---

[1]И не только в первом приближении, а для полных нелинейных уравнений возмущенного движения, что следует из теоремы об устойчивости по первому приближению, так как при наличии отрицательных коэффициентов $\lambda_i$ среди корней характеристического уравнения есть и положительные корни. Заметим, что это является также доказательством сформулированной (но не доказанной) в п. 226 первой теоремы Ляпунова о неустойчивости положения равновесия консервативной системы.

**Теорема 2.** *Если степень неустойчивости изолированного положения равновесия консервативной системы нечетна, то стабилизация его добавлением гироскопических сил невозможна, если же степень неустойчивости четна, то гироскопическая стабилизация возможна.*

*Доказательство.*

Для доказательства невозможности гироскопической стабилизации при нечетной степени неустойчивости достаточно рассмотреть линеаризованную систему уравнений возмущенного движения и показать, что ее характеристическое уравнение и при наличии гироскопических сил имеет хотя бы один положительный корень.

В переменных $\theta_i$ $(i = 1,\ 2, \dots ,\ n)$ уравнения движения имеют вид

$$\ddot{\theta}_i + \lambda_i \theta_i = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik} \dot{\theta}_k \quad (i = 1,\ 2, \dots ,\ n), \tag{6}$$

где $\gamma_{ik} = -\gamma_{ki}$ — постоянные величины. Характеристическое уравнение системы (6) будет таким:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda^2 + \lambda_1 & -\gamma_{12}\lambda & \dots & -\gamma_{1n}\lambda \\ \gamma_{12}\lambda & \lambda^2 + \lambda_2 & \dots & -\gamma_{2n}\lambda \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{1n}\lambda & \gamma_{2n}\lambda & \dots & \lambda^2 + \lambda_n \end{vmatrix} = 0.$$

При $\lambda \to +\infty$ имеем $\Delta(\lambda) \to +\infty$. Но $\Delta(0) = \lambda_1\ \lambda_2 \dots\ \lambda_n$ и в силу нечетности степени неустойчивости $\Delta(0) < 0$. Следовательно, характеристическое уравнение имеет хотя бы один положительный корень и, согласно теореме п. 237 об устойчивости по первому приближению, положение равновесия $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$ неустойчиво независимо от нелинейных членов в уравнениях возмущенного движения, т. е. если степень неустойчивости нечетна, то стабилизация гироскопическими силами невозможна.

Чтобы показать возможность гироскопической стабилизации в случае четной степени неустойчивости, рассмотрим простой пример. Пусть движение системы с двумя степенями свободы описывается такими дифференциальными уравнениями:

$$\ddot{q}_1 + \lambda_1 q_1 - \gamma \dot{q}_2 = 0, \quad \ddot{q}_2 + \lambda_2 q_2 + \gamma \dot{q}_1 = 0, \tag{7}$$

где $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \gamma$ — постоянные величины, $\lambda_i < 0$ $(i = 1,\ 2)$. Последние слагаемые в уравнениях (7) представляют собой гироскопические силы; если они равны нулю, то положение равновесия $q_1 = q_2 = 0$ неустойчиво, а степень неустойчивости равна двум. Покажем, что гироскопические силы, т. е. величину $\gamma$ в (7), можно подобрать так, что положение равновесия станет устойчивым.

Характеристическое уравнение линейной системы (7) имеет вид

$$\begin{vmatrix} \lambda^2+\lambda_1 & -\gamma\lambda \\ \gamma\lambda & \lambda^2+\lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda^4 + (\lambda_1+\lambda_2+\gamma^2)\lambda^2 + \lambda_1\lambda_2 = 0. \tag{8}$$

Нетрудно убедиться, что при выполнении неравенства

$$|\gamma| > \sqrt{-\lambda_1} + \sqrt{-\lambda_2} \tag{9}$$

корни уравнения (8) чисто мнимые и различны, и, следовательно, при условии (9) положение равновесия $q_1 = q_2 = 0$ устойчиво.

**Теорема 3.** *Если изолированное положение равновесия консервативной системы имеет отличную от нуля степень неустойчивости, то оно остается неустойчивым при добавлении гироскопических сил и диссипативных сил с полной диссипацией.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Из рассмотренных в этом параграфе теорем следует, что: 1) добавление диссипативных сил не нарушает устойчивости или неустойчивости изолированного положения равновесия консервативной системы; 2) добавление же гироскопических сил, не нарушая устойчивости положения равновесия, в некоторых случаях (при четной степени неустойчивости) может стабилизировать неустойчивое положение равновесия; 3) однако если неустойчивое положение равновесия стабилизировано гироскопическими силами, то при добавлении диссипативных сил с полной диссипацией положение равновесия снова будет неустойчивым.

Устойчивость, существующую при одних потенциальных силах, называют *вековой*, а устойчивость, полученную с помощью гироскопических сил,— *временной*.

Пример 1 (Устойчивость поступательного движения твердого тела на круговой орбите). *Пусть твердое тело обладает динамической симметрией ($A = B$), а его центр масс движется по круговой орбите в центральном ньютоновском гравитационном поле. Согласно п.* 126 *уравнения движения тела относительно центра масс могут быть записаны в виде*

$$\begin{gathered} A\frac{dp}{dt} + (C-A)qr = 3n^2(C-A)a_{32}a_{33}, \\ A\frac{dq}{dt} - (C-A)rp = -3n^2(C-A)a_{33}a_{31}, \\ \frac{dr}{dt} = 0, \end{gathered} \tag{10}$$

*где*

$$p = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi + na_{21},$$
$$q = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi + na_{22}, \qquad (11)$$
$$r = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi} + na_{23}.$$

*В уравнениях* (10) *и* (11) $n$ — *среднее движение центра масс тела по орбите, а величины* $a_{ij}$ *выражаются через углы Эйлера* $\psi$, $\theta$, $\varphi$ *по формулам* (3) *п.* 19.

*Из третьего уравнения системы* (10) *следует, что имеет место интеграл*

$$r = r_0 = \mathrm{const}.$$

*Уравнения движения имеют частное решение*

$$\theta = \pi/2, \quad \psi = \pi. \qquad (12)$$

*Для этого частного решения*

$$p = 0, \quad q = 0, \quad \dot{\varphi} = -n + r_0. \qquad (13)$$

*Будем считать, что постоянная* $r_0$ *равна нулю; тогда частное решение* (12) *отвечает поступательному движению твердого тела в абсолютном пространстве (в орбитальной же системе координат тело вращается вокруг оси динамической симметрии с угловой скоростью* $\dot{\varphi} = -n$*).*

*Рассмотрим устойчивость этого движения тела по отношению к переменным* $\psi$, $\theta$, $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$. *Пусть*

$$\theta = \frac{\pi}{2} + q_1, \quad \psi = \pi + q_2, \quad \dot{\theta} = \dot{q}_1, \quad \dot{\psi} = \dot{q}_2.$$

*Произведя линеаризацию первых двух уравнений системы* (10) *и разрешив их относительно старших производных, получим*

$$q_1'' = (4 - 3\alpha)q_1 + 2q_2', \quad q_2'' = q_2 - 2q_1'. \qquad (14)$$

*Здесь штрихом обозначено дифференцирование по переменной* $\nu = nt$ *и введено обозначений* $\alpha = C/A$. *Так как моменты инерции удовлетворяют неравенству треугольника* $A + B \geqslant C$, *то* $0 \leqslant \alpha \leqslant 2$.

*Первые слагаемые в правых частях уравнений* (14) *являются потенциальными силами, порождаемыми потенциалом*

$$\Pi = -\frac{1}{2}(4 - 3\alpha)q_1^2 - \frac{1}{2}q_2^2, \qquad (15)$$

*а последние слагаемые представляют собой гироскопические силы.*

*Если бы гироскопические силы отсутствовали, то положение равновесия* $q_1 = q_2 = 0$ (*оно отвечает невозмущенному движению* (12)) *было бы неустойчивым, причем при* $\alpha < {}^4\!/_3$ *степень неустойчивости четная, а при* ${}^4\!/_3 < \alpha \leqslant 2$ *нечетная. Поэтому из теоремы* 2 *следует, что при* ${}^4\!/_3 < \alpha \leqslant 2$ *гироскопическая стабилизация невозможна, и, следовательно, в этом случае движение* (12) *неустойчиво по Ляпунову.*

*Из той же теоремы* 2 *следует, что при* $\alpha < {}^4\!/_3$ *гироскопическая стабилизация в принципе возможна. Чтобы узнать, осуществляется ли она в рассматриваемой задаче, при заданных конкретных гироскопических силах, рассмотрим характеристическое уравнение системы* (14)

$$\lambda^4 + (3\alpha - 1)\lambda^2 + (4 - 3\alpha) = 0. \tag{16}$$

*При выполнении системы неравенств*

$$3\alpha - 1 > 0, \quad 4 - 3\alpha > 0, \quad (3\alpha - 1)^2 - 4(4 - 3\alpha) > 0 \tag{17}$$

*корни уравнения* (16) *будут чисто мнимыми и, следовательно, движение* (12) *будет устойчиво в линейном приближении по отношению к переменным* $\psi$, $\theta$, $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$. *Если же хотя бы одно из неравенств* (17) *имеет противоположный смысл, то у уравнения* (16) *будут корни с положительными вещественными частями и движение* (12) *неустойчиво по Ляпунову.*

*Система неравенств* (17), *как нетрудно проверить, приводится к виду*

$$1 < \alpha < \frac{4}{3}. \tag{18}$$

*Следовательно, в нашей конкретной задаче в случае четной степени неустойчивости при выполнении условия* (18) *гироскопическая стабилизация осуществляется, а при* $\alpha < 1$ *— нет.*

*Таким образом, показано, что поступательное движение твердого тела на круговой орбите при* $\alpha < 1$ *и* $\alpha > {}^4\!/_3$ *неустойчиво по Ляпунову, а при* $1 < \alpha < {}^4\!/_3$ *оно устойчиво в линейном приближении. Более детальное исследование позволяет показать, что на самом деле при выполнении условия* (18) *движение будет устойчиво по Ляпунову не только в линейном приближении, но и в рамках полных нелинейных уравнений возмущенного движения*[1].

[1] См.: Маркеев А. П. Резонансные эффекты и устойчивость стационарных вращений спутника // Космические исследования. 1967. Т. 5, № 3. С. 365–375.