§ 5. Об устойчивости гамильтоновых систем

241. Общие замечания. Пусть дифференциальные уравнения возмущенного движения записываются и виде системы уравнений Гамильтона

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{1}$$

Считаем, что функция Гамильтона аналитична в окрестности точки $q_j = p_j = 0$ $(j = 1,\ 2, \ldots,\ n)$ и представима в виде ряда

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \ldots, \tag{2}$$

где H_m — формы степени m относительно q_j, p_j $(j = 1,\ 2, \ldots,\ n)$, коэффициенты которых постоянны или 2π-периодичны по t. К рассмотрению системы (1) приводят многие задачи об устойчивости движения в потенциальном поле сил.

Решение задачи об устойчивости невозмущенного движения (ему отвечает решение $q_j = p_j = 0$ $(j = 1,\ 2, \ldots,\ n)$ системы (1)) зависит от свойств функции Гамильтона. Очень просто вопрос об устойчивости решается в том случае, когда время t не содержится в уравнениях (1), а функция H является знакоопределенной в окрестности точки $q_j = p_j = 0$ $(j = 1,\ 2, \ldots,\ n)$. В этом случае функция H будет интегралом системы (1) и невозмущенное движение устойчиво. Этот вывод непосредственно следует из теоремы Ляпунова об устойчивости; для применения этой теоремы в качестве функции Ляпунова V можно принять функцию H.

Если же функция H не является знакоопределенной или зависит от времени, то задача об устойчивости становится весьма сложной. Для системы (1) справедлива теорема Лиувилля о сохранении фазового объема, поэтому невозмущенное движение не может быть асимптотически устойчивым; в системах, описываемых дифференциальными уравнениями Гамильтона, возможна либо устойчивость, либо неустойчивость. Следовательно, если линеаризованные уравнения не дают строгого решения вопроса об устойчивости (как, например, в случае установившихся движений при наличии у характеристического уравнения хотя бы одного корня с положительной вещественной частью), то возникает необходимость рассмотрения нелинейных членов в уравнениях (1), т. е. мы имеем критический случай теории устойчивости.

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые вопросы теории устойчивости движения в системах, описываемых гамильтоновыми дифференциальными уравнениями. При этом ограничимся случаем, когда уравнения возмущенного движения (1) линейные[1]. Часто вместо термина «устойчивость невозмущенного движения» мы будем применять термин «устойчивость системы (1)» или просто «устойчивость гамильтоновой системы».

242. Устойчивость линейных гамильтоновых систем с постоянными коэффициентами. Запишем линейную гамильтонову систему дифференциальных уравнений в матричной форме (см. п. 189)

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \mathbf{JH}\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}' = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n}), \tag{3}$$

где x_k, x_{n+k} $(k = 1, 2, \dots, n)$ — канонически сопряженные переменные (x_k — координаты, x_{n+k} — импульсы). Квадратная матрица $\mathbf{J}$ порядка $2n$ имеет вид

$$\mathbf{J} = \begin{Vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E}_n \\ -\mathbf{E}_n & \mathbf{0} \end{Vmatrix} \quad (\mathbf{J}' = \mathbf{J}^{-1} = -\mathbf{J},\ \mathbf{J}^2 = -\mathbf{E}_{2n},\ \det\mathbf{J} = 1). \tag{4}$$

В системе (3) $\mathbf{H}$ — вещественная симметрическая матрица порядка $2n$. Она либо постоянна, либо является непрерывной 2π-периодической по t.

Пусть матрица $\mathbf{H}$ в системе (3) постоянна. Рассмотрим характеристическое уравнение

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{JH} - \lambda\mathbf{E}_{2n}) = 0. \tag{5}$$

Как показано в п. 189, многочлен $p(\lambda)$ — четная функция λ. Поэтому если уравнение (5) имеет корень $\lambda = a$ с отличной от нуля вещественной частью, то система (3) неустойчива, так как либо сам этот корень, либо противоположный ему по знаку корень $\lambda = -a$ имеет положительную вещественную часть. Согласно теореме об устойчивости по первому приближению (п. 237), в этом случае неустойчива и полная нелинейная система уравнений возмущенного движения (1).

Таким образом, для устойчивости системы (3) необходимо, чтобы корни ее характеристического уравнения (5) были чисто мнимыми. Это условие будет и достаточным, если дополнительно потребовать, чтобы матрица $\mathbf{JH}$ приводилась к диагональной форме.

243. О линейных системах с периодическими коэффициентами. Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}' = (x_1, \dots, x_m), \tag{6}$$

[1]Теория устойчивости нелинейных гамильтоновых систем изложена в работах: Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // УМН, 1963. Т. 18, вып. 6. С. 91–192; Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973; Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978.

где $\mathbf{A}(t)$ — непрерывная, 2π-периодическая по t вещественная матрица. Структура решений системы (6) описывается следующей теоремой Флоке.

Теорема. *Для системы* (6) *фундаментальная матрица решений* $\mathbf{X}(t)$, *нормированная условием* $\mathbf{X}(0) = \mathbf{E}_m$, *представима в виде*

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{Y}(t)e^{\mathbf{B}t} \tag{7}$$

где $\mathbf{B}$ *— постоянная матрица, а* $\mathbf{Y}(t)$ *— непрерывно дифференцируемая,* 2π*-периодическая по* t *матрица.*

Доказательство.

Заметим прежде всего, что так как $\mathbf{X}(t)$ — фундаментальная матрица решений уравнений (6), то, в силу 2π-периодичности матрицы $\mathbf{A}(t)$, фундаментальной будет также матрица $\mathbf{X}(t+2\pi)$. А это означает, что справедливо равенство

$$\mathbf{X}(t+2\pi) = \mathbf{X}(t)\mathbf{C}, \tag{8}$$

где $\mathbf{C}$ — постоянная матрица. Положив в равенстве (8) $t = 0$, получим, что $\mathbf{C} = \mathbf{X}(2\pi)$. Таким образом,

$$\mathbf{X}(t+2\pi) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}(2\pi). \tag{9}$$

Так как $\mathbf{X}(t)$ — фундаментальная матрица решений, то $\det \mathbf{X}(2\pi) \neq 0$, и, следовательно, для матрицы $\mathbf{X}(2\pi)$, как и для всякой невырожденной матрицы, существует логарифм[1] и поэтому она представима в виде:

$$\mathbf{X}(2\pi) = e^{2\pi\mathbf{B}}. \tag{10}$$

Теперь положим

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{X}(t)e^{-\mathbf{B}t}. \tag{11}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}(t+2\pi) &= \mathbf{X}(t+2\pi)e^{-2\pi\mathbf{B}-\mathbf{B}t} = \\ &= \mathbf{X}(t)\mathbf{X}(2\pi)e^{-2\pi\mathbf{B}}e^{-\mathbf{B}t} = \mathbf{X}(t)e^{-\mathbf{B}t} = \mathbf{Y}(t).\end{aligned}$$

Таким образом, матрица $\mathbf{Y}(t)$ 2π-периодична, а из (11) следует, что она непрерывно дифференцируема. Из (11) следует также, что фундаментальная матрица решений $\mathbf{X}(t)$ представима в виде (7). Теорема Флоке доказана.

[1]См. гл. 8 книги: Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.

Для дальнейшего введем некоторые определения. Собственные числа λ_j матрицы $\mathbf{B}$ называются *характеристическими показателями* системы (6). Собственные числа ρ_j матрицы $\mathbf{X}(2\pi)$ называются *мультипликаторами* системы (6). Из формулы (10) следует, что

$$\rho_j = e^{2\pi\lambda_j}, \tag{12}$$

или

$$\lambda_j = \frac{1}{2\pi}(\ln|\rho_j| + i\arg\rho_j + i2k\pi) \quad (k = 0,\ \pm1,\ \pm2, \ldots). \tag{13}$$

Характеристическое уравнение матрицы $\mathbf{X}(2\pi)$, т. е. уравнение

$$\det(\mathbf{X}(2\pi) - \rho\mathbf{E}_m) = 0, \tag{14}$$

называется *характеристическим уравнением* системы (6). Отметим без доказательства[1] два утверждения о характеристическом уравнении (14): 1) характеристическое уравнение не зависит от выбора фундаментальной матрицы решений; 2) характеристическое уравнение не изменится, если систему (6) подвергнуть невырожденному линейному преобразованию с 2π-периодической матрицей.

Система (6) называется *приводимой*, если существует замена переменных

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{L}(t)\boldsymbol{y}, \tag{15}$$

такая, что система (6) преобразуется в систему с постоянными коэффициентами, а 2π-периодическая матрица $\mathbf{L}(t)$ — непрерывно дифференцируемая, ограниченная при всех t, и такими же свойствами обладает обратная матрица $\mathbf{L}^{-1}(t)$. Имеет место следующая теорема Ляпунова.

Теорема. *Линейная система* (6) *с непрерывной периодической матрицей* $\mathbf{A}(t)$ *приводима.*

Доказательство.

Примем за матрицу $\mathbf{L}(t)$ преобразования (15) матрицу $\mathbf{Y}(t)$, определенную равенством (11). Она непрерывно дифференцируема и ограничена при всех t вместе со своей обратной. Остается только показать, что преобразованная система будет системой с постоянными коэффициентами. В этом легко убедиться, подставив

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{X}(t)e^{-\mathbf{B}t}\boldsymbol{y} \tag{16}$$

[1] Доказательство можно найти, например, в гл. 5 книги: Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.

в систему (6). Произведя выкладки, получим

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = \mathbf{B}\boldsymbol{y}. \tag{17}$$

Из формулы (17) видно, что характеристические показатели суть корни характеристического уравнения преобразованной системы.

Ясно, что задачи об устойчивости систем (6) и (17) эквивалентны. Поэтому система (6) устойчива тогда и только тогда, когда все ее мультипликаторы принадлежат замкнутому единичному кругу $|\rho| \leqslant 1$, причем в случае существования кратных мультипликаторов, лежащих на окружности $|\rho| = 1$, матрица $\boldsymbol{X}(2\pi)$ приводится к диагональной форме.

244. Устойчивость линейных гамильтоновых систем с периодическими коэффициентами. Пусть в системе (3) матрица $\boldsymbol{H}$ является непрерывной 2π-периодической по t, вещественной симметрической матрицей. Задача об устойчивости линейных гамильтоновых систем обладает рядом специфических особенностей по сравнению с задачей об устойчивости общих линейных систем, рассмотренных в предыдущем пункте. Эти особенности вытекают из теоремы Ляпунова–Пуанкаре о характеристическом уравнении гамильтоновых систем с периодическими коэффициентами.

Прежде чем сформулировать теорему, введем определение. Уравнение

$$f(z) \equiv a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_{m-1} z + a_m = 0 \quad (a_0 \neq 0) \tag{18}$$

называется *возвратным*, если коэффициенты его, равноотстоящие от крайних членов, равны между собой, т. е. если в (18) $a_k = a_{m-k}$. Для возвратного уравнения имеет место тождество

$$f(z) \equiv z^m f\left(\frac{1}{z}\right) \quad (z \neq 0). \tag{19}$$

И наоборот, если имеет место тождество (19), то уравнение (18) возвратное. Из тождества (19) следует, что возвратное уравнение нечетной степени обязательно имеет своим корнем число $z = -1$. Если m — четное число, то при помощи подстановки

$$\omega = z + \frac{1}{z}$$

возвратное уравнение сводится к уравнению степени $m/2$ относительно ω.

Имеют место следующие легко проверяемые свойства корней возвратного уравнения: если у него есть корень $z = 1$, то кратность этого корня четная; если есть корень $z = -1$, то его кратность четная при четном m и нечетная при нечетном m; если уравнение имеет корень $z_k \neq \pm 1$, то оно имеет и взаимно обратный корень $z_l = 1/z_k$ той же кратности.

Теорема (Ляпунова–Пуанкаре). *Характеристическое уравнение* (14) *линейной гамильтоновой системы* (3) *с 2π-периодической по t матрицей $\mathbf{H}(t)$ возвратное.*

Доказательство.

Так как преобразование фазового пространства, задаваемое движениями гамильтоновой системы, является унивалентным каноническим преобразованием, то (см. п. 171) матрица $\mathbf{X}(t)$ фундаментальных решений системы (3) является симплектической, т. е. при всех t справедливо равенство

$$\mathbf{X}'\mathbf{J}\mathbf{X} = \mathbf{J}. \tag{20}$$

Так как $\mathbf{X}(0) = \mathbf{E}_{2n}$, то из (20) следует, что при всех t, в том числе и при $t = 2\pi$, $\det\ \mathbf{X} = 1$.

Рассмотрим следующую цепочку тождеств:

$$f(\rho) \equiv \det(\mathbf{X}(2\pi) - \rho\mathbf{E}_{2n}) = \det\mathbf{X}(2\pi)(\mathbf{E}_{2n} - \rho\boldsymbol{X}^{-1}(2\pi)) \equiv$$

$$\equiv \det(\mathbf{E}_{2n} - \rho\mathbf{J}^{-1}\mathbf{X}'(2\pi)\mathbf{J}) = \det\mathbf{J}^{-1}\det(\mathbf{E}_{2n} - \rho\mathbf{X}'(2\pi))\det\mathbf{J} \equiv$$

$$\equiv \det(\mathbf{E}_{2n} - \rho\mathbf{X}(2\pi))' \equiv \det(\mathbf{E}_{2n} - \rho\mathbf{X}(2\pi)) \equiv$$

$$\equiv \rho^{2n}\det\Big(\mathbf{X}(2\pi) - \frac{1}{\rho}\mathbf{E}_{2n}\Big) \equiv \rho^{2n} f\Big(\frac{1}{\rho}\Big).$$

Отсюда следует, что характеристическое уравнение (14) возвратное, и теорема Ляпунова–Пуанкаре доказана.

Укажем важнейшие следствия этой теоремы.

Следствие 1. *Линейная гамильтонова система* (3) *устойчива тогда и только тогда, когда все ее мультипликаторы ρ_j расположены на единичной окружности $|\rho| = 1$ и матрица $\mathbf{X}(2\pi)$ приводится к диагональной форме.*

Следствие 2. *Мультипликаторы ρ_j и $1/\rho_j$ имеют одинаковую кратность.*

Следствие 3. *Если характеристическое уравнение* (14) *имеет корень $\rho = 1$ или $\rho = -1$, то эти корни имеют четную кратность.*

245. Алгоритм нормализации гамильтоновой системы линейных уравнений с периодическими коэффициентами. Снова рассмотрим систему (3), предполагая матрицу $\mathbf{H}(t)$ вещественной и непрерывной 2π-периодической по t. Согласно теореме Ляпунова, система (3) приводима. Но матрица $\mathbf{L}(t)$ замены переменных (15), приводящей систему (3) к системе с постоянными коэффициентами, определяется неоднозначно. Опишем алгоритм построения такой матрицы $\mathbf{L}(t)$, чтобы соответствующее ей преобразование (15) было вещественным, каноническим, 2π-периодическим по t и приводило бы систему (3) к нормальной форме. Будем предполагать, что характеристические показатели λ_k системы (3) чисто мнимые ($\lambda_k = i\sigma_k$, где i — мнимая единица, σ_k — вещественные числа). Мультипликаторы $\rho_k = \exp(i2\pi\sigma_k)$, $\rho_{n+k} = \exp(-i2\pi\sigma_k)$ $(k = 1,\ 2,\dots,\ n)$ считаем различными. Как и в п. 189 в случае линейной гамильтовой системы с постоянными коэффициентами, нормальной формой 2π-периодической по t системы (3) мы называем такую линейную систему, которой отвечает функция Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k(y_k^2 + y_{n+k}^2). \tag{21}$$

Ограничимся только описанием алгоритмической части процедуры построения матрицы $\mathbf{L}(t)$ [1]. Пусть $\mathbf{X}(t)$ — фундаментальная матрица системы (3), нормированная условием $\mathbf{X}(0) = \mathbf{E}_{2n}$, а $\boldsymbol{r}_k$ и $\boldsymbol{s}_k$ — действительная и мнимая части собственного вектора матрицы $\mathbf{X}(2\pi)$, соответствующего мультипликатору ρ_k. Векторы $\boldsymbol{r}_k$ и $\boldsymbol{s}_k$ удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\begin{aligned}(\mathbf{X}(2\pi) - \cos 2\pi\sigma_k\mathbf{E}_{2n})\boldsymbol{r}_k + \sin 2\pi\sigma_k\boldsymbol{s}_k = 0,\\ -\sin 2\pi\sigma_k\boldsymbol{r}_k + (\mathbf{X}(2\pi) - \cos 2\pi\sigma_k\mathbf{E}_{2n})\boldsymbol{s}_k = 0.\end{aligned} \tag{22}$$

Из этой системы векторы $\boldsymbol{r}_k$ и $\boldsymbol{s}_k$ определяются с точностью до постоянного множителя. Нормируем их так, чтобы выполнялось равенство

$$4(\boldsymbol{r}_k\cdot\mathbf{J}\boldsymbol{s}_k) = 1 \quad (k = 1,\ 2,\dots,\ n). \tag{23}$$

Такая нормировка всегда возможна. При проведении нормировки в случае необходимости (как и в п. 188) следует соответствующим образом выбирать знаки величин σ_k в функции Гамильтона (21) нормализованной системы.

[1] Более подробное изложение можно найти в статье: Маркеев А. П. О нормализации гамильтоновой системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // ПММ. 1972. Т, 36, вып. 5. С. 805–810.

После нормировки векторов $\boldsymbol{r}_k$ и $\boldsymbol{s}_k$ образуем постоянную квадратную матрицу $\mathbf{P}$ порядка $2n$. Ее k-м столбцом возьмем вектор $-2\boldsymbol{s}_k$ а $(n+k)$-м — вектор $2\boldsymbol{r}_k$.

Образуем, далее, квадратную матрицу $\mathbf{Q}(t)$ порядка $2n$. Она имеет такую структуру:

$$\mathbf{Q}(t) = \left\| \begin{matrix} \mathbf{D}_1(t) & -\mathbf{D}_2(t) \\ \mathbf{D}_2(t) & \mathbf{D}_1(t) \end{matrix} \right\|, \tag{24}$$

где $\mathbf{D}_1(t)$ и $\mathbf{D}_2(t)$ — диагональные матрицы вида

$$\mathbf{D}_1(t) = \left\| \begin{matrix} \cos\sigma_1 t & & \\ & \ddots & \\ & & \cos\sigma_n t \end{matrix} \right\|, \quad \mathbf{D}_2(t) = \left\| \begin{matrix} \sin\sigma_1 t & & \\ & \ddots & \\ & & \sin\sigma_n t \end{matrix} \right\|. \tag{25}$$

Матрица $\mathbf{L}(t)$ искомого нормализующего преобразования (15) записывается в виде произведения трех матриц

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{P}\mathbf{Q}(t). \tag{26}$$

Фактическое построение матрицы (26) возможно, как правило, только на вычислительной машине.

246. Задача о параметрическом резонансе. Линейные гамильтоновы системы, содержащие малый параметр. В приложениях матрица $\mathbf{H}(t)$ системы (3) обычно зависит от одного или нескольких параметров. Задача о параметрическом резонансе дли системы (3) состоит в определении тех значений параметров, при которых ее характеристическое уравнение (14) имеет корни (мультипликаторы) с модулями, большими единицы. Иными словами, эта задача состоит в нахождении тех значений параметров, при которых система (3) неустойчива. Ограничимся рассмотрением того частного случая, когда функция Гамильтона H, соответствующая системе (3), представляется в виде сходящегося ряда по степеням малого параметра ε:

$$H = H^{(0)} + \varepsilon H^{(1)} + \varepsilon^2 H^{(2)} + \ldots, \tag{27}$$

где $H^{(0)}$, $H^{(1)}$, $H^{(2)}, \ldots$ — квадратичные формы переменных x_1, $x_2, \ldots$, x_{2n}, причем коэффициенты формы $H^{(0)}$ постоянны, а коэффициенты форм $H^{(1)}$, $H^{(2)}, \ldots$ — непрерывные вещественные функции t с общим периодом 2π. Кроме того, коэффициенты форм $H^{(0)}$, $H^{(1)}$, $H^{(2)}, \ldots$ зависят от одного или нескольких параметров.

Рассмотрим зависимость мультипликаторов системы (3) (а следовательно, и ее характеристических показателей) от малого параметра ε. Так как правые части системы (3) аналитичны по ε, то и фундаментальная матрица решений $X(t, \varepsilon)$ также аналитична по ε. Отсюда следует, что коэффициенты характеристического уравнения (14) — аналитические функции ε. Но мультипликаторы (и характеристические показатели) не обязательно аналитичны. Они будут обязательно аналитическими, если характеристическое уравнение при $\varepsilon = 0$ имеет только простые корни. Если же при $\varepsilon = 0$ уравнение (14) имеет кратные корни, то аналитичность его корней относительно ε при $\varepsilon \neq 0$ может не иметь места. Отметим, однако, что независимо от наличия при $\varepsilon = 0$ кратных корней корни уравнения (14) при $\varepsilon \neq 0$, во всяком случае, непрерывны по ε.[1]

При $\varepsilon = 0$ система уравнений (3) имеет постоянные коэффициенты. Как установлено в п. 242, при наличии хотя бы одного корня характеристического уравнения (5) с отличной от нуля вещественной частью система (3) неустойчива. В этом случае уравнение (14) при $\varepsilon = 0$ имеет хотя бы один корень, модуль которого больше единицы. Ввиду непрерывности мультипликаторов относительно ε характеристическое уравнение (14) при достаточно малых ε также имеет корень, модуль которого превосходит единицу, и, следовательно, система (3) при достаточно малых ε неустойчива. Как видим, в этом случае задача о параметрическом резонансе проста и неинтересна.

Пусть теперь при $\varepsilon = 0$ характеристическое уравнение (5) системы (3) имеет только чисто мнимые корни $\pm i\sigma_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда уравнение (14) при $\varepsilon = 0$ имеет только такие корни (мультипликаторы), модули которых равны единице. Изучим поведение мультипликаторов при малых ε, отличных от нуля.

Сначала рассмотрим случай, когда при $\varepsilon = 0$ нет кратных мультипликаторов, т. е. когда, согласно (12), выполняются неравенства

$$\sigma_k \pm \sigma_l \neq N \quad (k, l = 1, 2, \ldots, n;\ N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \qquad (28)$$

В силу непрерывности мультипликаторов, они останутся некратными и при достаточно малых ε, отличных от нуля. Кроме того, при достаточно малых ε мультипликаторы не могут иметь модулей, больших единицы. Этот важный вывод является простым следствием теоремы Ляпунова–Пуанкаре о характеристическом уравнении (14) системы (3) (п. 244). Согласно этой теореме, мультипликаторы расположены симметрично относительно единичной окружности. При малых ε мультипликаторы не могут сойти с окружности, не нарушив указанной симметрии.

[1] См. по этому поводу монографию: Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956.

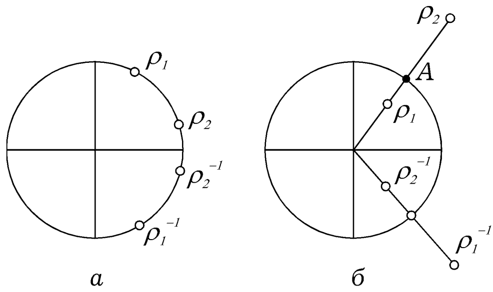

Рис. 177

Действительно, рассмотрим для наглядности случай $n = 2$. Характеристическое уравнение (14) будет уравнением четвертого порядка. Пусть ρ_j $(j = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ — его корни при $\varepsilon = 0$. Будем изображать их на комплексной плоскости ρ (рис. 177, a). Пусть при малых ε один из корней, например ρ_1, сошел с окружности и стал по модулю больше единицы. Из-за вещественности коэффициентов уравнения (14) комплексно сопряженный корень ρ_1^{-1} с необходимостью сместился бы в точку, симметричную относительно вещественной оси. А так как число всех корней равно четырем и смещения корней ρ_2, ρ_2^{-1} при малых ε малы, то у сместившегося корня ρ_1 не оказалось бы обратного по величине, что противоречит теореме Ляпунова–Пуанкаре.

Таким образом, если при $\varepsilon = 0$ кратные мультипликаторы отсутствуют или, что то же, выполняются условия (28), то система (3) при достаточно малых значениях ε устойчива.

Если же при $\varepsilon = 0$ существуют кратные мультипликаторы, расположенные в некоторой точке A единичной окруж ности, то при $\varepsilon \neq 0$ они могут, вообще говоря, сойти с окружности. При этом они могут расположиться как изображено на рис. 177, б, и симметрия мультипликаторов относительно единичной окружности не будет нарушена. Но смещение мультипликаторов с единичной окружности происходит не всегда, и, следовательно, в случае кратных мультипликаторов система не обязательно неустойчива при $\varepsilon \neq 0$. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Предположим, что характеристические показатели $i\sigma_k$ при $\varepsilon = 0$ таковы, что все величины σ_k $(k = 1,\ 2, \ldots,\ n)$ различны. Тогда, согласно п. 189, при $\varepsilon = 0$ систему (3) при помощи линейной вещественной канонической замены переменных можно привести к нормальпой форме. В новых переменных функция $H^{(0)}$ приведется к форме (21) и функция Гамильтона (27) запишется в виде

$$H = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \sigma_k (y_k^2 + y_{n+k}^2) + \varepsilon H^{(1)} + \varepsilon^2 H^{(2)} + \ldots , \tag{29}$$

где $H^{(1)}$, $H^{(2)}, \ldots$ — квадратичные формы от новых переменных y_1, $y_2, \ldots$, y_{2n} с непрерывными 2π-периодическими по t коэффициентами. Задачи о параметрическом резонансе в старых и новых переменных эквивалентны. Но теперь существенно, что величины σ_k в (29) имеют вполне определенные знаки, полученные в процессе нормализации системы (3) при $\varepsilon = 0$.

Сформулируем без доказательства[1] следующее утверждение.

Теорема. *Для достаточно малых ε линейная система с функцией Гамильтона* (29) *устойчива тогда и только тогда, когда величины σ_j не связаны соотношениями*

$$\sigma_k + \sigma_l = N \quad (k, l = 1,\ 2, \ldots ,\ n;\ N = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots). \tag{30}$$

Иными словами, знак минус в соотношениях (28) *можно опустить, а при выполнении хотя бы одного из равенств* (30) *всегда можно так подобрать функции $H^{(1)}$, $H^{(2)}, \ldots$ в* (29)*, что система будет неустойчива.*

247. Нахождение областей параметрического резонанса. Пусть величины σ_k в функции Гамильтона (29) зависят от некоторого параметра α. И пусть при $\alpha = \alpha_0$ выполняется хотя бы одно из соотношений

$$\sigma_k + \sigma_l = N \quad (k, l = 1,\ 2, \ldots ,\ n;\ N = \pm 1,\ \pm 2, \ldots). \tag{31}$$

Когда равенство (31) выполняется при $k = l$, т. е. когда

$$2\sigma_k = N, \tag{32}$$

то говорят, что имеет место *простой* резонанс. Параметрический резонанс, для которого в (31) $k \neq l$, называется *комбинационным.* Покажем, что при условии (31) для сколь угодно малых значений ε может существовать область неустойчивости, и найдем ее границы с точностью до первой степени ε включительно. Будем предполагать, что $n = 2$ и что при $\varepsilon = 0$ выполняется одно из резонансных соотношений (31).

[1]Доказательство можно найти в статье: J. Moser. New aspects in the theory of stability of Hamiltonian system // Comm. Pure Appl. Math. 1958. V. 11, № 1. P. 81–114 и в монографии: Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения.— М.: Наука, 1972.

Пусть в (29) квадратичная форма $H^{(1)}$ записана в виде

$$H^{(1)} = \sum_{\nu=2} h_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}(t) y_1^{\nu_1} y_2^{\nu_2} y_3^{\mu_1} y_4^{\mu_2} \quad (\nu = \nu_1 + \nu_2 + \mu_1 + \mu_2). \tag{33}$$

Будем считать, что функции $h_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}(t)$ в их представлении в виде рядов Фурье не содержат нулевых гармоник; в противном случае часть $H^{(1)}$, не зависящую от t, мы включили бы в $H^{(0)}$. Найдем область изменения параметра α вблизи резонансного значения α_0, для которой линейная система дифференциальных уравнений, соответствующая функции Гамильтона (29), неустойчива. Предполагаем, что при $\alpha = \alpha_0$ выполнено неравенство

$$\frac{d(\sigma_k + \sigma_l)}{d\alpha} \neq 0.$$

Будем применять методы теории возмущений, рассмотренные в §7 гл. XI. Нахождение областей неустойчивости основано на нескольких следующих одно за другим канонических преобразованиях, приводящих функцию Гамильтона (29) к некоторой простейшей форме, отражающей резонансный характер задачи и позволяющей весьма просто построить искомые области неустойчивости.

Сначала введем комплексно сопряженные канонические переменные q_k, p_k $(k = 1,\ 2)$ по формулам

$$\begin{aligned} q_1 &= y_3 + iy_1, & q_2 &= y_4 + iy_2,\\ p_1 &= y_3 - iy_1, & p_2 &= y_4 - iy_2. \end{aligned} \tag{34}$$

Новая функция Гамильтона равна $2iH$. Разлагая $\sigma_k(\alpha)$ в ряд в окрестности точки α_0, получаем

$$\begin{aligned} 2iH = {} & i\sigma_1(\alpha_0) q_1 p_1 + i\sigma_2(\alpha_0) q_2 p_2 + \\ & + i(\alpha - \alpha_0)\left(\frac{d\sigma_1}{d\alpha_0} q_1 p_1 + \frac{d\sigma_2}{d\alpha_0} q_2 p_2\right) + \varepsilon \sum_{\nu=2} a_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} + \ldots \end{aligned} \tag{35}$$

Здесь многоточием обозначены члены не ниже второго порядка малости относительно ε и $\alpha - \alpha_0$. Комплекснозначные коэффициенты $a_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ линейным образом выражаются через $h_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$.

Сделаем замену переменных q_k, $p_k \to q_k'$, p_k' согласно формулам

$$q_k' = \frac{\partial S}{\partial p_k'}, \quad p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k} \quad (k = 1,\ 2), \tag{36}$$

где производящая функция S имеет вид

$$S = q_1p_1' + q_2p_2' + \varepsilon W = q_1p_1' + q_2p_2' + \varepsilon \sum_{\nu=2} w_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} {p_1'}^{\mu_1} {p_2'}^{\mu_2}. \tag{37}$$

Функции $w_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ подберем 2π-периодическими по t и такими, чтобы в новой функции Гамильтона

$$H' = 2iH + \frac{\partial S}{\partial t} \tag{38}$$

члены порядка ε приняли по возможности наиболее простой вид. Из (36) и (37) получаем явный вид преобразования $q_k,\ p_k \to q_k',\ p_k'$ с точностью до членов порядка ε включительно:

$$q_k = q_k' - \varepsilon \frac{\partial W}{\partial p_k'}, \quad p_k = p_k' + \varepsilon \frac{\partial W}{\partial q_k'} \quad (k = 1,\ 2), \tag{39}$$

где в функции W переменные q_k заменены на q_k'. Из (35) и (37)–(39) получаем выражение для коэффициента при первой степени ε в H'

$$\begin{gathered} \sum_{\nu=2} {a'}_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}(t) {q_1'}^{\nu_1} {q_2'}^{\nu_2} {p_1'}^{\mu_1} {p_2'}^{\mu_2} \equiv \\ \equiv DW + \sum_{\nu=2} a_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}(t) {q_1'}^{\nu_1} {q_2'}^{\nu_2} {p_1'}^{\mu_1} {p_2'}^{\mu_2}, \end{gathered} \tag{40}$$

где

$$DW = i \sum_{k=1}^{2} \sigma_k \left(q_k' \frac{\partial W}{\partial q_k'} - p_k' \frac{\partial W}{\partial p_k'} \right).$$

Приравняв в тождестве (40) коэффициенты при ${q_1'}^{\nu_1} {q_2'}^{\nu_2} {p_1'}^{\mu_1} {p_2'}^{\mu_2}$, получим дифференциальное уравнение для $w_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$:

$$\begin{gathered} \frac{dw_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}}{dt} + i[\sigma_1(\nu_1 - \mu_1) + \sigma_2(\nu_2 - \mu_2)] w_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} = \\ = {a'}_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} - a_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}. \end{gathered} \tag{41}$$

Если ввести обозначение

$$b = \sigma_1(\nu_1 - \mu_1) + \sigma_2(\nu_2 - \mu_2) \tag{42}$$

и для простоты записи у функций, входящих в уравнение (41), не писать индексы, то его общее решение может быть записано в виде

$$w(t) = w(0)e^{-ibt} + e^{-ibt} \int_0^t e^{ibx}(a' - a)\, dx. \tag{43}$$

Из (43) видно, что если число b не целое, то при любой функции $a'(t)$ решение $w(t)$ уравнения (41) 2π-периодическое при условии

$$w(0) = \frac{1}{1 - e^{i2\pi b}} \int\limits_0^{2\pi} e^{ibt}(a - a')\, dt.$$

Таким образом, если число b не целое, то в (40) можно положить $a'(t) \equiv 0$.

Если же число b целое, то при $a'(t) \equiv 0$ периодического решения уравнения (41), вообще говоря, не существует. Для существования периодического решения следует функцию $a'(t)$ выбрать вполне определенным образом, именно надо положить, что

$$a'(t) = ce^{-ibt},$$

где

$$c = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{ibt} a(t)\, dt, \tag{44}$$

и периодическое решение уравнения (41) будет иметь вид

$$w(t) = w(0)e^{-ibt} + e^{-ibt} \int\limits_0^{t} (c - a(x)e^{ibx})\, dx$$

при произвольном значении $w(0)$.

Пусть при $\alpha = \alpha_0$ имеет место комбинационный резонанс

$$\sigma_1(\alpha_0) + \sigma_2(\alpha_0) = N.$$

Согласно изложенному выше, полученная после преобразования (36) функция Гамильтона (38) может быть приведена к виду

$$\begin{aligned} H' = i\sigma_1(\alpha_0)q_1'p_1' + i\sigma_2(\alpha_0)q_2'p_2' + i(\alpha - \alpha_0)\left(\frac{d\sigma_1}{d\alpha_0}q_1'p_1' + \frac{d\sigma_2}{d\alpha_0}q_2'p_2'\right) + \\ + \varepsilon(c_{1100}e^{-iNt}q_1'q_2' + c_{0011}e^{iNt}p_1'p_2') + \ldots \end{aligned} \tag{45}$$

Теперь введем вещественные переменные φ_k, r_k по формулам

$$q_k' = \sqrt{2r_k}e^{i\varphi_k}, \quad p_k' = \sqrt{2r_k}e^{-i\varphi_k} \quad (k = 1,\, 2). \tag{46}$$

Замена переменных q'_k, $p'_k \to \varphi_k$, r_k (φ_k — координаты, r_k — импульсы), задаваемая этими формулами, является каноническим преобразованием с валентностью $1/(2i)$. В переменных φ_k, r_k функция Гамильтона примет вид

$$H^* = \sigma_1(\alpha_0)r_1 + \sigma_2(\alpha_0)r_2 + (\alpha-\alpha_0)\left(\frac{d\sigma_1}{d\alpha_0}r_1 + \frac{d\sigma_2}{d\alpha_0}r_2\right) + \\ + \varepsilon\sqrt{r_1r_2}[\beta\cos(\varphi_1+\varphi_2-Nt) + \gamma\sin(\varphi_1+\varphi_2-Nt)] + \ldots \tag{47}$$

Постоянные величины β, γ, содержащиеся в (47), выражаются через коэффициенты Фурье, отвечающие N-й гармонике некоторой линейной комбинации функций $h_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}(t)$, входящих в функцию Гамильтона (29). Вычисления, проведенные согласно каноническим преобразованиям (34), (39) и (46), дают следующие выражения для величин β, γ:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}[(h_{0011}-h_{1100})\cos Nt + (h_{1001}+h_{0110})\sin Nt]\,dt, \\ \gamma &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}[(h_{1001}+h_{0110})\cos Nt - (h_{0011}-h_{1100})\sin Nt]\,dt. \end{aligned} \tag{48}$$

Сделаем еще одно каноническое преобразование φ_k, $r_k \to \Psi_k$, R_k:

$$\begin{aligned} &\varphi_1 = \sigma_1(\alpha_0)t + \Psi_1, \quad &&\varphi_2 = \sigma_2(\alpha_0)t + \Psi_2 + \theta, \\ &r_1 = R_1, &&r_2 = R_2, \end{aligned} \tag{49}$$

где

$$\sin\theta = -\frac{\beta}{\delta}, \quad \cos\theta = -\frac{\gamma}{\delta}, \quad \delta = \sqrt{\beta^2+\gamma^2}.$$

Изменение переменных Ψ_k, R_k со временем будет описываться дифференциальными уравнениями, задаваемыми функцией Гамильтона

$$\widetilde{H} = (\alpha-\alpha_0)\left(\frac{d\sigma_1}{d\alpha_0}R_1 + \frac{d\sigma_2}{d\alpha_0}R_2\right) + \varepsilon\delta\sqrt{R_1R_2}\sin(\Psi_1+\Psi_2) + \ldots \tag{50}$$

Из соответствующей канонической системы дифференциальных уравнений с точностью до членов первого порядка относительно ε и $\alpha-\alpha_0$ включительно имеем

$$\begin{aligned} &\frac{dR_1}{dt} = \frac{dR_2}{dt} = -\varepsilon\delta\sqrt{R_1R_2}\cos(\Psi_1+\Psi_2), \\ &\frac{d(\Psi_1+\Psi_2)}{dt} = (\alpha-\alpha_0)\frac{d(\sigma_1+\sigma_2)}{d\alpha_0} + \frac{1}{2}\varepsilon\delta\frac{R_1+R_2}{\sqrt{R_1R_2}}\sin(\Psi_1+\Psi_2). \end{aligned} \tag{51}$$

Ясно, что в первом приближении по ε и $\alpha - \alpha_0$ задача об устойчивости по отношению к переменным y_j $(j = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ в исходной системе с функцией Гамильтона (29) эквивалентна задаче об устойчивости по отношению к переменным $R_1,\ R_2$ в системе (51). Покажем, что в первом приближении по ε область параметрического резонанса (область неустойчивости) задается неравенствами

$$-\frac{\varepsilon\delta}{\left|\dfrac{d(\sigma_1+\sigma_2)}{d\alpha_0}\right|} + \alpha_0 < \alpha < \alpha_0 + \frac{\varepsilon\delta}{\left|\dfrac{d(\sigma_1+\sigma_2)}{d\alpha_0}\right|} \tag{52}$$

и что при невыполнении этих неравенств имеет место устойчивость.

Действительно, второе утверждение следует из того, что функция $V = (R_1 - R_2)^2 + \widetilde{H}^2$ является интегралом системы (51), который, как нетрудно видеть, будет знакоопределенным по переменным R_1 и R_2, если неравенства (52) не выполняются. Следовательно, согласно теореме Ляпунова об устойчивости, система (51) устойчива по отношению к переменным $R_1,\ R_2$. Утверждение о неустойчивости следует из существования при выполнении неравенств (52) неограниченно растущего со временем частного решения системы (51):

$$R_1(t) = R_2(t) = R_2(0)e^{\varepsilon\delta\sqrt{1-d^2}t}, \quad \Psi_1 + \Psi_2 = \pi + \arcsin d,$$
$$\left(d = \frac{\alpha - \alpha_0}{\varepsilon\delta}\frac{d(\sigma_1+\sigma_2)}{d\alpha_0}\right).$$

Случай простого параметрического резонанса, например $2\sigma_1 = N$, рассматривается аналогично. Область неустойчивости задается неравенствами

$$-\frac{\varepsilon\delta}{\left|\dfrac{d\sigma_1}{d\alpha_0}\right|} + \alpha_0 < \alpha < \alpha_0 + \frac{\varepsilon\delta}{\left|\dfrac{d\sigma_2}{d\alpha_0}\right|}, \tag{53}$$

где $\delta = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}$, а

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} [(h_{0020} - h_{2000})\cos Nt + h_{1010}\sin Nt]\,dt, \\ \gamma &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} [h_{1010}\cos Nt - (h_{0020} - h_{2000})\sin Nt]\,dt. \end{aligned} \tag{54}$$

248. Уравнение Матье. *Уравнением Матье* называют дифференциальное уравнение второго порядка с периодическими коэффициентами вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (\alpha + \beta \cos t)x = 0, \tag{55}$$

где α и β — постоянные величины. Это уравнение часто встречается в различных задачах механики, например в теории движения Луны, в задаче трех тел, в теории колебании упругих систем и т. п. Поэтому уравнение Матье изучено очень подробно[1].

Мы рассмотрим уравнение Матье для случая, когда оно мало отличается от дифференциального уравнения гармонического осциллятора:

$$\frac{d^2x}{dt} + (\omega^2 + \varepsilon \cos t)x = 0 \quad (0 \leqslant \varepsilon \ll 1). \tag{56}$$

При $\varepsilon = 0$ уравнение описывает колебания с собственной частотой ω. Согласно предыдущему пункту, при $\varepsilon \neq 0$ в плоскости параметров ω, ε могут возникать области неустойчивости, причем для малых значений ε области неустойчивости исходят из тех точек оси $\varepsilon = 0$, которые отвечают целым или полуцелым значениям частоты собственных колебаний:

$$2\omega = N \quad (N = 1,\ 2,\ 3, \ldots). \tag{57}$$

Например, если качели в процессе их раскачивания моделировать маятником с периодически изменяющейся длиной, то интенсивное раскачивание качелей (т. е. неустойчивость их вертикального положения равновесия) возникает, когда удвоенная частота собственных колебаний маятника кратна частоте изменения его длины. На практике обычно наблюдается случай, когда в формуле (57) $N = 1$, т. е. когда частота изменения длины маятника вдвое больше частоты его собственных колебаний.

Используя общие формулы для областей параметрического резонанса, полученные в предыдущем пункте, найдем в первом приближении по ε области неустойчивости, отвечающие резонансу

$$2\omega = 1. \tag{58}$$

Если ввести импульс p_x, отвечающий координате x, по формуле $p_x = \dot{x}$, то уравнение (56) будет эквивалентно канонической системе двух уравнений с функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}({p_x}^2 + \omega^2 x^2)\frac{1}{2}\varepsilon \cos t x^2. \tag{59}$$

[1]См., например: Стокер Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. М.: ИЛ, 1953; Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М.: Наука, 1967.

Введем новые переменные q и p при помощи канонического преобразования

$$p_x = \sqrt{\omega}p, \quad x = \frac{1}{\sqrt{\omega}}q. \tag{60}$$

Новая функция Гамильтона запишется в виде

$$H = \frac{1}{2}\omega(p^2 + q^2) + \frac{\varepsilon}{2\omega}\cos t q^2. \tag{61}$$

Из формул (53), (54), в которых $N = 1$, а

$$h_{2000} = \frac{1}{2\omega}\cos t, \quad h_{0020} = h_{1010} = 0,$$

получаем область неустойчивости в первом приближении по ε:

$$-\frac{1}{2}\omega + \frac{1}{2} < \omega < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon. \tag{62}$$

Пример 1 (Устойчивость эксцентриситетных колебаний твердого тела на эллиптической орбите). *В п.* 230 *найдены плоские периодические колебания твердого тела, вызванные эллиптичностью орбиты его центра масс. В обозначениях п.* 128, 230 *эти колебания имеют вид*

$$\varphi^* = \frac{2e}{\omega^2 - 1}\sin\nu + \ldots \quad (\omega_0 \neq 1), \tag{63}$$

где многоточием обозначены члены выше первого порядка относительно эксцентриситета орбиты e.

Для исследования устойчивости движения (63) *введем возмущение x по формуле*

$$\varphi = \varphi^* + \frac{x}{1 + e\cos\nu}. \tag{64}$$

Подставив это значение φ в уравнение (37) *п.* 230 *и произведя его линеаризацию относительно x, получим, что с точностью до первой степени e линейное уравнение возмущенного движения будет иметь вид уравнения Матье*

$$\frac{d^2x}{d\nu^2} + [\omega_0^2 + e(1 - \omega_0^2)\cos\nu]x = 0. \tag{65}$$

При значении ω_0, близком $1/2$, возникает область неустойчивости. В соответствии с формулой (62) *она задается неравенствами*[1]

$$-\frac{3}{8}e + \frac{1}{2} < \omega_0 < \frac{1}{2} + \frac{3}{8}e. \tag{66}$$

[1]Совершенно из других соображений область неустойчивости (66) получена в гл. 2 книги: Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965.