границы атмосферы и др. Во всех случаях зависимость g от φ и z можно учесть путем перехода от высоты к вводимой ниже (см. п. 6) геопотенциальной высоте.

2 Основное уравнение статики атмосферы

Пусть атмосфера находится в состоянии покоя по отношению к земной поверхности. Такое состояние атмосферы называется *статическим*. Тогда горизонтальная составляющая градиента давления G_2 должна обращаться в нуль (в противном случае под влиянием этой силы воздух придет в движение). Для этого необходимо и достаточно, чтобы изобарические поверхности совпадали с уровенными.

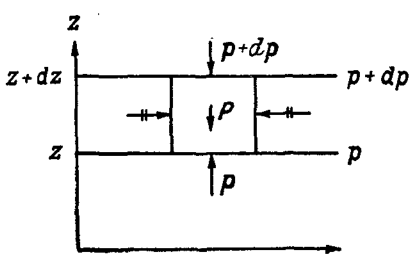

Рис. 3.1. К выводу основного уравнения статики атмосферы.

Выделим в атмосфере две изобарические поверхности, расположенные на высотах z и $z+dz$ (рис. 3.1). Давление на этих поверхностях обозначим через p и $p+dp$.

Между изобарическими поверхностями p и $p+dp$ выделим объем воздуха с горизонтальными основаниями 1 м². На нижнее основание выделенного объема воздуха действует сила давления $\mathbf{p}$, направленная снизу вверх, на верхнее основание — сила давления $\mathbf{p}+\mathbf{dp}$, направленная сверху вниз.[1] Силы давления, действующие на боковые грани объема воздуха, взаимно уравновешиваются.

Кроме сил давления, на объем воздуха действует сила тяжести $\mathbf{P}$, равная по модулю

$$P = g\rho\, dz \tag{2.1}$$

и направленная сверху вниз (по вертикали).

Спроектируем все силы, действующие на выделенный объем воздуха, на положительное направление вертикали z, вдоль которой действует (в отрицательном направлении) сила тяжести. Сумма этих проекций равна

$$p-(p+dp)-P. \tag{2.2}$$

[1] Сила давления — вектор, направление которого совпадает с нормалью к поверхности (внутрь объема). Давление воздуха — скаляр, равный отношению модуля силы давления к элементарной площади, на которую эта сила действует.

Поскольку выделенный объем воздуха находится в покое, векторная сумма всех действующих на объем сил, т. е. результирующая их, и сумма проекций этих сил на любое направление должны тождественно обращаться в нуль:

$$p-(p+dp)-P=0. \tag{2.3}$$

Подставив вместо P его выражение по соотношению (2.1), получим *основное уравнение статики атмосферы*[1]

$$-dp-g\rho\,dz=0 \text{ или } -dp=g\rho\,dz. \tag{2.4}$$

Разделив левую и правую части (2.4) на dz, получим второй вид основного уравнения статики атмосферы:

$$-dp/dz=g\rho. \tag{2.5}$$

Величина $-dp/dz=G_1$ представляет собой вертикальную составляющую градиента давления. В случае статического равновесия $G_2=0$, поэтому G_1 равно полному градиенту давления: $G_1=G$. Правая часть (2.5) представляет собой силу тяжести, действующую на единичный объем воздуха, масса которого равна ρ. Таким образом, *основное уравнение статики физически выражает собой равновесие двух сил* — градиента давления и силы тяжести.

Из основного уравнения статики атмосферы можно сделать три важных вывода.

1. Если высота возрастает ($dz>0$), то в правой части (2.4) стоит произведение только положительных множителей: $g\rho\,dz>0$. Поэтому и левая часть (2.4) также больше нуля:

$$-dp>0 \text{ или } dp<0. \tag{2.6}$$

Таким образом, увеличению высоты ($dz>0$) всегда соответствует отрицательное приращение давления ($dp<0$). Это значит, что в атмосфере давление *всегда убывает с увеличением высоты*. Вывод о том, что этот закон справедлив всегда, вытекает из того, что основное уравнение статики выполняется с высокой степенью точности и в случае движения атмосферы.

2. Выделим в атмосфере вертикальный столб воздуха с поперечным сечением 1 м^2 и высотой от данного уровня z до верхней границы атмосферы z_a. *Вес этого столба обозначим* через Q. Так как вес элементарного столба высотой dz равен $g\rho dz$ (ρdz — масса элементарного столба), то вес всего столба

$$Q=\int_z^{z_a} g\rho\,dz. \tag{2.7}$$

[1] Это уравнение справедливо и для гидросферы.

Проинтегрировав правую и левую части (2.4) в пределах от z, где давление p, до z_a, где давление равно нулю (по определению верхней границы), получим

$$\int_{p}^{0} -dp = \int_{z}^{z_a} g\rho\, dz \quad \text{или} \quad p = Q. \tag{2.8}$$

Таким образом, приходим ко второму определению понятия давления. *Атмосферное давление, или давление воздуха, на каждом уровне равно весу столба воздуха единичного поперечного сечения и высотой от данного уровня до верхней границы атмосферы.*

Полученное следствие делает физически ясным и вывод об убывании давления с высотой: увеличение высоты приводит к уменьшению вертикальной протяженности вышележащей части столба воздуха, и, следовательно, к уменьшению давления (по сравнению с нижележащими уровнями). В закрытых (но негерметизированных) помещениях давление на каком-либо уровне практически не отличается, согласно закону Паскаля, от давления вне помещения на том же уровне.

3. Основное уравнение статики позволяет сделать выводы и относительно скорости убывания давления с высотой. Согласно (2.4), при подъеме на одну и ту же высоту ($dz = \text{const}$) уменьшение давления ($-dp$) тем больше, чем больше плотность воздуха ρ и ускорение свободного падения g. Основную роль играет плотность воздуха. С увеличением высоты плотность воздуха, как правило, убывает. Это значит, что *чем выше расположен уровень, тем меньше убывание давления при подъеме на одну и ту же высоту dz.*

Если точки A и B расположены на одной и той же изобарической поверхности, то плотность воздуха в точках A и B будет зависеть только от температуры воздуха в этих точках. Если $T_A > T_B$, то (при $p = \text{const}$) по уравнению состояния $\rho_A < \rho_B$. Это в свою очередь означает, что при подъеме на одну и ту же высоту ($dz = \text{const}$) понижение давления в точке A с более высокой температурой меньше, чем в точке B с более низкой температурой.

Таким образом, приходим к следующему выводу: *при увеличении высоты на одно и то же значение относительно некоторой изобарической поверхности понижение давления в более холодной воздушной массе больше, чем в теплой массе, т. е. в холодной массе давление убывает с высотой быстрее, чем в более теплой воздушной массе.* Подтверждением этого вывода является тот факт, что на высотах (в средней и верхней тропосфере) в холодных воздушных массах преобладает низкое, а в теплых массах — высокое давление.

Оценим значение вертикального градиента давления G_1. При нормальных условиях вблизи уровня моря $\rho = 1{,}29$ кг/м³, $g = 9{,}81$ м/с². Подставив эти значения в (2.5), найдем

$$G_1 = 12{,}5 \text{ гПа}/100 \text{ м}.$$

Таким образом, вблизи уровня моря при подъеме на 100 м давление убывает примерно на 12,5 гПа. Это значение изменяется в зависимости от температуры и давления. При увеличении высоты значение G_1 уменьшается.

3 Барометрические формулы

Основное уравнение статики является *одним из важнейших* уравнений метеорологии, на основе которого устанавливаются закономерности распределения давления, плотности и массы воздуха по высоте. В своем дифференциальном виде основное уравнение статики (2.4) позволяет выполнить расчет изменения давления лишь для малых приращений высоты dz.

На практике всегда необходимо иметь данные о распределении давления в слоях атмосферы конечной толщины или определить толщину таких слоев по измеренным значениям давления. Для этой цели основное уравнение статики следует записать в конечном (интегральном) виде, т. е. найти его интегралы. Интегралы основного уравнения статики атмосферы, полученные при разных предположениях относительно изменения температуры и плотности воздуха с высотой, носят общее название *барометрических формул*. На основе барометрических формул решаются такие важные практические *задачи, как расчет распределения давления* и плотности по высоте, определение высот различных летательных аппаратов по измеренному давлению, приведение давления к уровню моря и др.

Для получения интегральной формы основного уравнения статики проинтегрируем левую и *правую части* (2.4) *в пределах от* уровня моря $z = 0$ (или земной поверхности), где давление p_0, до произвольной высоты z, где давление p. Имеем

$$\int_{p_0}^{p} -\,dp = \int_0^z g\rho\,dz \quad \text{или} \quad -p + p_0 = \int_0^z g\rho\,dz,$$

откуда

$$p = p_0 - \int_0^z g\rho\,dz. \tag{3.1}$$

Здесь $\rho = \rho(z)$ — функция высоты.

Вторую интегральную форму основному уравнению статики можно придать, если воспользоваться уравнением состояния влаж-