Оценим значение вертикального градиента давления G_1. При нормальных условиях вблизи уровня моря $\rho=1{,}29$ кг/м³, $g=9{,}81$ м/с². Подставив эти значения в (2.5), найдем

$$G_1 = 12{,}5 \text{ гПа}/100 \text{ м}.$$

Таким образом, вблизи уровня моря при подъеме на 100 м давление убывает примерно на 12,5 гПа. Это значение изменяется в зависимости от температуры и давления. При увеличении высоты значение G_1 уменьшается.

3 Барометрические формулы

Основное уравнение статики является *одним из важнейших* уравнений метеорологии, на основе которого устанавливаются закономерности распределения давления, плотности и массы воздуха по высоте. В своем дифференциальном виде основное уравнение статики (2.4) позволяет выполнить расчет изменения давления лишь для малых приращений высоты dz.

На практике всегда необходимо иметь данные о распределении давления в слоях атмосферы конечной толщины или определить толщину таких слоев по измеренным значениям давления. Для этой цели основное уравнение статики следует записать в конечном (интегральном) виде, т. е. найти его интегралы. Интегралы основного уравнения статики атмосферы, полученные при разных предположениях относительно изменения температуры и плотности воздуха с высотой, носят общее название *барометрических формул*. На основе барометрических формул решаются такие важные практические *задачи, как расчет распределения давления* и плотности по высоте, определение высот различных летательных аппаратов по измеренному давлению, приведение давления к уровню моря и др.

Для получения интегральной формы основного уравнения статики проинтегрируем левую и *правую части* (2.4) *в пределах от* уровня моря $z=0$ (или земной поверхности), где давление p_0, до произвольной высоты z, где давление p. Имеем

$$\int_{p_0}^{p} -\,dp = \int_0^z g\rho\,dz \quad \text{или} \quad -p + p_0 = \int_0^z g\rho\,dz,$$

откуда

$$p = p_0 - \int_0^z g\rho\,dz. \tag{3.1}$$

Здесь $\rho=\rho(z)$ — функция высоты.

Вторую интегральную форму основному уравнению статики можно придать, если воспользоваться уравнением состояния влажного воздуха (4.12) из главы 1. Подставив найденное отсюда значение ρ, перепишем (2.4) в виде

$$-\frac{dp}{p}=\frac{g\,dz}{R_c T_v}. \qquad (3.2)$$

Интегрируя в пределах от 0 до z и от p_0 до p, получаем

$$\ln p=\ln p_0-\frac{1}{R_c}\int_0^z \frac{g\,dz}{T_v(z)}. \qquad (3.3)$$

Интегральные формы (3.1) и (3.3) основного уравнения статики в дальнейшем широко используются для получения различных барометрических формул. Заметим, что p_0 в формулах (3.1) и (3.3) может обозначать давление как на уровне моря, так и на поверхности Земли. Различие будет состоять лишь в начале отсчета высоты z. В общем случае температура, а вместе с ней и плотность воздуха являются достаточно сложными функциями высоты, установить аналитический вид которых не всегда представляется возможным. Поэтому, прежде чем перейти к общему случаю, рассмотрим несколько частных случаев, отличающихся один от другого различными предположениями относительно вида функций $T=T(z)$ или $\rho=\rho(z)$, с помощью которых описывается распределение температуры или плотности по высоте.

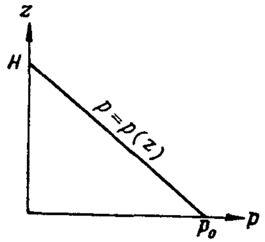

Рис. 3.2. Распределение давления по высоте в однородной атмосфере.

Однородная атмосфера. Предположим, что плотность воздуха в пределах всей атмосферы не изменяется с высотой, т. е.

$$\rho=\rho_0=\text{const}. \qquad (3.4)$$

Здесь ρ_0 — плотность воздуха при $z=0$. Такая атмосфера носит название *однородной*. Пренебрежем зависимостью ускорения свободного падения от высоты. Тогда на основании (3.1) получаем *барометрическую формулу однородной атмосферы*:

$$p=p_0-g\rho_0 z. \qquad (3.5)$$

Согласно этой формуле, давление в однородной атмосфере убывает с высотой по *линейному закону* (рис. 3.2).

Отметим, что в приложении к атмосфере формула (3.5) дает заведомо далекое от реальных условий распределение давления. Но для гидросферы, плотность которой изменяется в очень узких пределах (плотность воды близка к 1 г/см^3), формула (3.5) дает вполне удовлетворительные результаты. Поэтому ее можно назвать *барометрической формулой гидросферы* (высота в этом случае отсчитывается от дна моря или океана).

Поставим вопрос о высоте однородной атмосферы, т. е. такой высоте, на которой давление обращается в нуль ($p=0$). Обозначим ее через H. Согласно (3.5), имеем

$$0=p_0-g\rho_0 H \quad \text{или} \quad H=p_0/g\rho_0. \tag{3.6}$$

Так как по уравнению (3.8) главы 1 $p_0/\rho_0=R_c T_0$ (T_0 — температура воздуха при $z=0$), формула (3.6) принимает вид

$$H=\frac{R_c T_0}{g}=\frac{273R_c}{g}(1+\alpha t_0). \tag{3.7}$$

Отсюда следует, что высота однородной атмосферы конечна и зависит только от температуры воздуха на поверхности Земли. При $t=0$ °C она составляет

$$H_0=\frac{273R_c}{g}=\frac{273\cdot 287}{9{,}81}\approx 7990 \text{ м}\approx 8 \text{ км}.$$

Поскольку плотность в однородной атмосфере постоянна, а давление быстро убывает с высотой, температура ее, равная по уравнению состояния

$$T=p/R_c\rho_0, \tag{3.8}$$

должна понижаться. Если взять производную по высоте от левой и правой частей (3.8), то получим

$$\frac{dT}{dz}=\frac{1}{R_c\rho_0}\frac{dp}{dz}.$$

Привлекая (2.5), находим следующее выражение для вертикального градиента температуры γ_A в однородной атмосфере:

$$\gamma_A=-\frac{dT}{dz}=\frac{g}{R_c} \quad \text{или} \quad \gamma_A=3{,}42\,°\text{C}/100 \text{ м}. \tag{3.9}$$

Таким образом, в однородной атмосфере температура убывает с высотой по линейному закону:

$$T=T_0-\gamma_A z,$$

при этом скорость понижения (градиент) значительно больше среднего значения γ в пределах тропосферы.

Изменение плотности воздуха с высотой. Рассмотрим вопрос об *изменении плотности воздуха с высотой* в общем случае. С этой целью сначала прологарифмируем, а затем продифференцируем по высоте левую и правую части уравнения состояния (3.8) главы 1:

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dz}=\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dz}+\frac{1}{T}\frac{dT}{dz}. \tag{3.10}$$

Заменив dp/dz по (2.5) и в полученном выражении ρ по уравнению (3.8) главы 1, найдем

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dz}=-\frac{1}{T}\left(\frac{g}{R_c}+\frac{dT}{dz}\right) \text{ или } \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dz}=\frac{1}{T}(\gamma-\gamma_A). \qquad (3.11)$$

Формула (3.11) справедлива для любого распределения температуры воздуха по высоте. На основе ее можно сделать выводы относительно изменения плотности воздуха с высотой. Возможны три различных случая.

1. Если $\gamma > \gamma_A = 3{,}42°$ С/100 м, то $d\rho/dz > 0$, т. е. плотность воздуха возрастает с высотой. Вертикальные градиенты температуры γ, превышающие 3,42 °С/100 м, в реальных условиях атмосферы могут наблюдаться лишь в дневные часы (летом) в приземном слое атмосферы. При таких условиях плотность в этом слое растет с высотой.

2. Если $\gamma=\gamma_A$, то $d\rho/dz=0$, т. е. плотность воздуха не изменяется с высотой (постоянна): $\rho=\rho_0=\text{const}$. Это случай однородной атмосферы.

3. Если $\gamma < \gamma_A$, то $d\rho/dz < 0$, т. е. плотность воздуха убывает с высотой. Этот случай является абсолютно преобладающим в условиях атмосферы. Прежде всего выше приземного слоя $\gamma < \gamma_A$ при любых состояниях атмосферы. В приземном слое случаи, когда $\gamma < \gamma_A$, наблюдаются также значительно чаще, чем случаи $\gamma > \gamma_A$. Таким образом, наиболее характерным состоянием атмосферы является такое, когда плотность воздуха убывает с высотой.

Изотермическая атмосфера. Атмосфера называется *изотермической*, если температура не изменяется с высотой, т. е.

$$T=T_0=\text{const},$$

где T_0 — температура на уровне моря или поверхности Земли. Изотермическая атмосфера по своим свойствам во многом противоположна однородной атмосфере. Считая атмосферу сухой ($T_v = T$) и пренебрегая зависимостью ускорения свободного падения от высоты, на основании (3.3) и последнего соотношения получаем *барометрическую формулу изотермической атмосферы*:

$$\ln p=\ln p_0-\frac{gz}{R_cT_0} \text{ или } p(z)=p_0\exp\left(-\frac{gz}{R_cT_0}\right). \qquad (3.12)$$

Давление в изотермической атмосфере убывает с высотой по экспоненциальному (показательному) закону.

Графически зависимость давления p от высоты z в изотермической атмосфере представлена на рис. 3.3. Рисунок 3.3 *а* поясняет вытекающую из формулы (3.12) закономерность: *если высота растет в прогрессии арифметической, то давление убывает в прогрессии геометрической.* Кривые на рис. 3.3 *б* соответствуют различным температурам атмосферы (постоянным по высоте): $T_0'' > T_0'$. Из этого рисунка и анализа формулы (3.12) следует, что при одном и том же давлении у земной поверхности давление на высотах (например, 5, 10, 15 км) при температуре T_0'' больше, чем при T_0'. Одно и то же значение давления при температуре T_0'' наблюдается на более высоких уровнях, чем при температуре T_0'. Это означает, что *при более высокой температуре давление в изотермической атмосфере убывает с высотой медленнее, чем при более низкой температуре.*

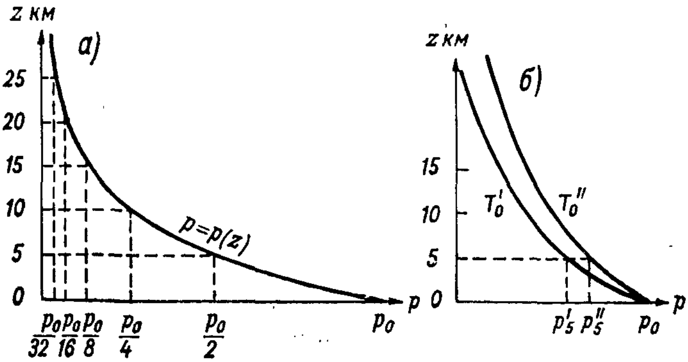

Рис. 3.3. Распределение давления по высоте в изотермической атмосфере.

а — общая закономерность убывания давления; *б* — убывание давления при разных температурах ($T_0'' > T_0'$).

Абсолютное значение убывания давления в нижних слоях атмосферы больше, чем в верхних, если высота изменяется на одно и то же значение. Так, в слое от 0 до 5 км давление при средних условиях падает на $p_0 - p_0/2 = p_0/2$, т. е. примерно на 500 гПа (при $p_0 = 1000$ гПа); в слое от 5 до 10 км падение давления составляет $p_0/2 - p/4 = p_0/4$, т. е. около 250 гПа, а в слое от 20 до 25 км давление уменьшается всего лишь на $p_0/16 - p_0/32 = p_0/32$, т. е. примерно на 31—32 гПа. Таким образом, *чем выше расположен слой атмосферы определенной толщины, тем меньше падение давления в этом слое.*

Высота изотермической атмосферы равна бесконечности, т. е. $p \to 0$ только при $z \to \infty$.

Формула для плотности воздуха может быть получена, если обратиться к уравнению состояния, согласно которому $\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T}$.

Так как в изотермической атмосфере $T/T_0=1$, то на основании (3.12)

$$\rho(z)=\rho_0 \exp\left(-\frac{gz}{R_c T_0}\right). \tag{3.13}$$

Величина $\delta=\rho/\rho_0$ носит название *относительной плотности*.

Политропная атмосфера. *Политропной* называют такую атмосферу, которая характеризуется линейным изменением температуры с высотой (или постоянным значением вертикального градиента температуры):

$$T=T_0-\gamma z. \tag{3.14}$$

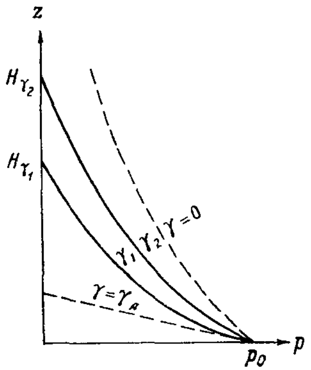

Рис. 3.4. Распределение давления по высоте в политропной атмосфере ($\gamma_1>\gamma_2$).

Считая атмосферу сухой ($T_v=T$) и подставляя T по (3.14) в формулу (3.3), получаем

$$\ln p=\ln p_0-\frac{1}{R_c}\int_0^z \frac{g\,dz}{T_0-\gamma z}.$$

Выполнив интегрирование (в предположении $g=\text{const}$), приходим к *барометрической формуле политропной атмосферы*:

$$\frac{p}{p_0}=\left(\frac{T_0-\gamma z}{T_0}\right)^{g/R_c\gamma}. \tag{3.15}$$

Графически зависимость p от z изображена на рис. 3.4. Кривые соответствуют одним и тем же значениям p_0 и T_0, но различным значениям вертикального градиента температуры: $\gamma_1>\gamma_2$. Давление при большем значении вертикального градиента температуры (γ_1) убывает с высотой быстрее, чем при меньшем (γ_2). Для сравнения на рис. 3.4 приведены кривые изменения давления в однородной и изотермической атмосферах (штриховые кривые). Высота политропной атмосферы конечна. В самом деле, согласно (3.15), давление обращается в нуль на такой высоте $z=H_\gamma$, на которой

$$T_0-\gamma H_\gamma=0 \quad \text{или} \quad H_\gamma=T_0/\gamma. \tag{3.16}$$

Высота политропной атмосферы изменяется в широких пределах; при $T_0=288$ K и $\gamma=0{,}65$ K/100 м значение $H_\gamma=44{,}3$ км.

Формула для плотности воздуха в политропной атмосфере имеет вид

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\left(\frac{T_0-\gamma z}{T_0}\right)^{\frac{g}{R_c\gamma}-1}. \tag{3.17}$$

Полная барометрическая формула (формула Лапласа). Рассмотрим общий случай, т. е. случай произвольного распределения температуры по высоте. Учтем также, что реальный воздух влажный, а ускорение свободного падения — функция широты и высоты. Привлекая соотношение (1.2) и замечая, что

$$T_v = T\,(1 + 0{,}608s) = 273\,(1 + \alpha t)\,(1 + 0{,}608s),$$

уравнение (3.2) перепишем в виде

$$-\frac{dp}{p} = \frac{g_0}{R_c \cdot 273}\,\frac{(1 - a_1 \cos 2\varphi)\,(1 - a_2 z)}{(1 + \alpha t)\,(1 + 0{,}608s)}\,dz. \qquad (3.18)$$

Так как $\dfrac{1}{1 - a_1 \cos 2\varphi} \approx 1 + a_1 \cos 2\varphi$ и $\dfrac{1}{1 - a_2 z} \approx 1 + a_2 z$ (вследствие малости слагаемых $a_1 \cos 2\varphi$ и $a_2 z$ по сравнению с единицей), то формулу (3.18) приведем к виду

$$dz = -H_0\,(1 + \alpha t)\,(1 + 0{,}608s)\,(1 + a_1 \cos 2\varphi)\,(1 + a_2 z)\,\frac{dp}{p}, \qquad (3.19)$$

где $H_0 = 273R_c/g_0$ — высота однородной атмосферы при $t = 0\,°C$.

Проинтегрируем (3.19) в пределах от высоты z_1, где давление p_1, до высоты z_2, где давление p_2. Для величин t, s и z в правой части (3.19) при интегрировании введем средние значения (на основании известной теоремы о среднем). Выполнив интегрирование, получим

$$z_2 - z_1 = -H_0\,(1 + \alpha \bar{t})\,(1 + 0{,}608\bar{s})\,(1 + a_1 \cos 2\varphi) \times$$
$$\times\,(1 + a_2 \bar{z})\,\ln \frac{p_2}{p_1}. \qquad (3.20)$$

Поскольку

$$-\ln \frac{p_2}{p_1} = \ln \frac{p_1}{p_2} = 2{,}30 \lg \frac{p_1}{p_2},$$

полная барометрическая формула (формула Лапласа) окончательно принимает вид

$$z_2 - z_1 = B\,(1 + \alpha \bar{t})\,(1 + 0{,}608\bar{s})\,(1 + a_1 \cos 2\varphi) \times$$
$$\times\,(1 + a_2 \bar{z})\,\lg \frac{p_1}{p_2}. \qquad (3.21)$$

Величина $B = 2{,}30H_0 \approx 18\,400$ м называется *барометрической постоянной*, а средние значения $\bar{t}$ и $\bar{s}$ носят название *средних барометрических* (температуры и доли водяного пара соответственно).

В таком полном виде барометрическая формула на практике используется лишь при барометрическом нивелировании. При решении подавляющего большинства метеорологических задач такой высокой точности, какую может обеспечить формула Лапласа, не требуется. К тому же следует иметь в виду, что точность измерения исходных данных (температуры, влажности, давления), необходимых для выполнения расчетов по формуле (3.21), как правило, значительно меньше тех уточнений, которые дает формула Лапласа по сравнению с приводимой ниже *барометрической формулой реальной атмосферы.* Последняя получается из формулы (3.21); если считать воздух сухим ($\bar{s}=0$) и пренебречь зависимостью ускорения свободного падения от широты и высоты:

$$z_2 - z_1 = B(1+\alpha\bar{t})\lg\frac{p_1}{p_2}. \tag{3.22}$$

Возвращаясь к натуральным логарифмам и абсолютной температуре, формулу (3.22) можно записать также в виде

$$p_2 = p_1 \exp\left[-\frac{g(z_2 - z_1)}{R_c\bar{T}}\right], \tag{3.23}$$

где $\bar{T}=273(1+\alpha\bar{t})$ — *средняя барометрическая температура* слоя воздуха, заключенного между уровнями z_1 и z_2. Из сравнения последней формулы с формулой (3.3) следует, что средняя барометрическая температура связана с температурой воздуха

$$\bar{T} = \frac{z_2 - z_1}{\int\limits_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{T(z)}}. \tag{3.24}$$

Средняя барометрическая температура — это такая постоянная в пределах слоя температура, которая обеспечивает значения давления на границах его, наблюдаемые при реальном распределении температуры по высоте. Практически $\bar{T}$ нередко отождествляют со средней арифметической температурой, т. е. полагают

$$\bar{T} = \frac{T_1 + T_2}{2},$$

где T_1 и T_2 — температуры воздуха на нижней и верхней границах слоя. Если уровень z_1 совпадает с поверхностью Земли ($z_1=0$), а уровень z_2 — произвольный ($z_2=z$), то формула (3.23) принимает вид

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{gz}{R_c\bar{T}}\right). \tag{3.25}$$

Эта формула имеет такой же вид, как и барометрическая формула (3.12) изотермической атмосферы. Принципиальное отличие состоит в том, что формулы (3.20)—(3.23) и (3.25) всегда справедливы лишь для слоя заданной *конечной толщины,* для которого температура $\bar{T}$ должна быть каждый раз определена прежде, чем по формулам можно начинать выполнять расчет. Вместе с изменением толщины слоя изменяется и величина $\bar{T}$. В случае же изотермической атмосферы температура является независимой (задаваемой) величиной. Поскольку барометрическая формула реальной атмосферы является показательной функцией, на основе ее анализа можно сделать такие же выводы относительно закономерностей изменения давления с высотой, какие были сделаны в случае изотермической атмосферы. Роль температуры T_0 в реальной атмосфере играет средняя барометрическая температура $\bar{T}$. Все выводы в случае реальной атмосферы относятся к слою *конечной толщины*. Поэтому вывод о бесконечной протяженности атмосферы, сделанный на основе формулы (3.12), здесь отпадает.

Если необходимо учесть влияние влажности на плотность воздуха и распределение давления по высоте, то в формулах (3.22)—(3.25) средняя барометрическая температура $\bar{T}$ должна быть заменена средней виртуальной барометрической температурой $\bar{T}_v$.

4 Барическая ступень

Для приближенной оценки высоты по известной разности давлений или, наоборот, для оценки давления по заданной разности высот на практике удобно пользоваться понятием «барическая ступень».

Барической ступенью называется такая высота, на которую нужно подняться с исходного уровня, чтобы давление понизилось на 1 гПа. Обозначим ее через h. Единица барической ступени — м/гПа. Формулу для барической ступени легко получить, если воспользоваться следующими рассуждениями. При увеличении высоты на dz давление понижается на $-dp$. Для того, чтобы давление уменьшилось на 1 гПа, необходимо подняться на высоту

$$h = dz/(-dp) = -dz/dp. \tag{4.1}$$

С учетом уравнения (2.5) эта формула принимает вид

$$h = 1/g\rho. \tag{4.2}$$

Формула (4.2) показывает, что h зависит только от плотности воздуха (не считая зависимости от g, которое изменяется в узких пределах). Чем меньше плотность воздуха, тем больше барическая ступень, и наоборот. Исследуем зависимость барической ступени от высоты (давления) и температуры. С увеличением высоты плотность воздуха, как было показано в п. 3, уменьшается, если исключить из рассмотрения тонкий приземный слой, в котором плотность может и возрастать с высотой (при $\gamma > \gamma_a$). Уменьшение плотности приводит к *росту барической ступени при увеличении*