высоты. Заменив в формуле (4.2) плотность ρ по уравнению (4.12) главы 1, получим

$$h = \frac{H_0}{p}(1 + \alpha t_v), \tag{4.3}$$

где $H_0 = 273R_c/g \approx 8000$ м.

Если сравниваются барические ступени на одной и той же изобарической поверхности ($p = \mathrm{const}$) в двух воздушных массах (теплой и холодной), то, согласно (4.3), *барическая ступень в теплой массе* ($h_т$) *больше барической ступени в холодной массе* ($h_х$), т. е. $h_т > h_х$. Чем меньше барическая ступень, тем быстрее падает с высотой давление. Значения барической ступени при разных температурах и давлениях приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1. Барическая ступень (м/гПа)

Давление, гПа	Температура, °С				
	− 40	− 20	0	20	40
1000	6,7	7,4	8,0	8,6	9,3
500	13,4	14,7	16,0	17,3	18,6
100	67,2	73,6	80,0	86,4	92,8

5 Вертикальный масштаб атмосферы

Барометрические формулы широко используются, в частности, при изучении свойств верхних слоев атмосферы (термосферы и экзосферы) с помощью ИСЗ, космических кораблей и ракет. Отметим, что атмосфера и на больших высотах оказывает существенное влияние на летательные аппараты при их длительном пребывании в ней: под влиянием силы сопротивления происходит постепенное уменьшение полной механической энергии спутника и, как следствие, изменение элементов орбиты. Сила сопротивления и скорость изменения элементов орбиты спутника прямо пропорциональны плотности воздуха на высоте полета. При облете Земли спутник проходит через слои атмосферы с различной плотностью. Для оценки влияния атмосферы на изменение элементов орбиты за полный оборот необходимо знать зависимость плотности воздуха от высоты. Выведем формулы для распределения давления и плотности воздуха по высоте в верхних слоях атмосферы, которые обобщают формулы п. 3. Необходимость такого обобщения диктуется тем, что в верхних слоях атмосферы изменяется с высотой не только температура, но и молекулярная масса (состав воздуха). Ускорение свободного падения при изменении высоты в широких пределах также нельзя принимать за постоянную величину.

Если, как и в п. 3, в основном уравнении статики (2.4) плотность воздуха заменить по уравнению состояния (4.8) главы 1, то получим

$$-\frac{dp}{p}=\frac{g\,dz}{RT} \quad \text{или} \quad -\frac{dp}{p}=\frac{\mu g}{R^*T}\,dz. \tag{5.1}$$

При последнем переходе R заменено на R^*/μ (здесь R^* — универсальная газовая постоянная, μ — относительная молекулярная масса воздуха).

Одним из важнейших свойств уравнений является равенство размерностей их левой и правой частей. Левая часть (5.1) безразмерная. Следовательно, и правая часть должна быть безразмерной. Но в последней множитель dz имеет размерность длины. Таким образом, приходим к заключению, что вошедшая в правую часть (5.1) величина

$$H=\frac{R^*T}{\mu g} \tag{5.2}$$

также имеет размерность длины; в этом можно убедиться и путем непосредственной проверки. Параметр H, *объединяющий три переменные величины* (T, μ, g), называют *высотой однородной атмосферы* или *вертикальным масштабом атмосферы*. После введения H основное уравнение статики принимает следующий вид:

$$-dp/p=dz/H. \tag{5.3}$$

По своему физическому смыслу параметр H совпадает с введенной в п. 2 высотой однородной атмосферы. Различие состоит в том, что в п. 2 в выражение для H входила температура у земной поверхности, в то время как в формулу (5.2) входит температура на произвольной высоте. Но во всех случаях H — это толщина такой однородной атмосферы, у которой давление и плотность на ее нижней границе равны давлению и плотности на том уровне в реальной атмосфере, для которого по формуле (5.2) рассчитан параметр H. Чтобы убедиться в этом, достаточно обратиться к формуле (2.7). Пусть на каком-либо фиксированном уровне z_1 давление будет p_1, плотность ρ_1 и температура T_1. Тогда, согласно (2.7) и определению толщины H_1 однородной атмосферы, в которой (на всех высотах) плотность равна ρ_1, можем записать

$$p_1=\int_{z_1}^{z_a} g\rho\,dz=\rho_1\int_0^{H_1} g\,dz.$$

Пренебрегая зависимостью g от z, получаем $p_1 = g\rho_1 H_1$, т. е.

$$H_1 = \frac{p_1}{g\rho_1} = \frac{R^* T_1}{\mu_1 g}.$$

Эта формула совпадает с формулой (5.2), хотя получена она на основе представления об H как о толщине однородной атмосферы.

Параметр H можно ввести также и в уравнение состояния воздуха:

$$p = \frac{R^*}{\mu} \rho T \quad \text{или} \quad p = \frac{R^* T}{\mu g} g\rho.$$

Отсюда

$$p = g\rho H \quad \text{или} \quad \rho = p/gH. \tag{5.4}$$

Подчеркнем, что с введением параметра H, объединяющего три переменные величины (T, μ, g), при получении барометрических формул отпадает необходимость раздельного учета изменения каждой из этих величин (в частности, g) с высотой. Формула (5.3) показывает, что изменение давления обусловливается распределением по высоте именно H, а не каждой из трех переменных величин в отдельности.

В общем случае H является достаточно сложной функцией высоты; выше 95—100 км изменяются с высотой не только T и g, но и μ. Если в некотором слое параметр H можно считать постоянным ($H = \mathrm{const}$), то, интегрируя уравнение (5.3), получаем барометрическую формулу для такого слоя в виде

$$p(z) = p_л \exp\left(-\frac{z - z_л}{H}\right), \tag{5.5}$$

где $z_л$ — высота нижней границы слоя, $p_л$ — давление воздуха на этой границе. Именно в таком виде чаще всего используется барометрическая формула при решении задач о влиянии атмосферы на изменение элементов орбиты, а также на время существования ИСЗ и других летательных аппаратов. В качестве нижней границы $z_л$ в этих случаях берется высота перигея спутника.

Если уравнение состояния (5.4) записать для уровня $z_л$

$$p_л = g_л \rho_л H, \tag{5.6}$$

то после деления (5.4) на (5.6), с учетом формулы (5.5), получаем формулу для плотности воздуха в слое с $H = \mathrm{const}$.

$$\rho(z) = \rho_л \frac{g_л}{g} \exp\left(-\frac{z - z_л}{H}\right). \tag{5.7}$$

Обычно изменением g с высотой пренебрегают, полагая в последней формуле $g_л/g \approx 1$.